

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2020.06.001

颗粒材料修正的微形态连续体模型研究

修晨曦¹, 楚锡华^{1,2}

(1. 武汉大学 土木建筑工程学院工程力学系, 武汉 430072;

2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要:基于细观力学给出了 1 个颗粒材料的修正的微形态连续体模型。在该模型中,考虑了颗粒的平动和转动,且对颗粒间的相对运动进行分解,认为颗粒的细观真实运动(包括平动和转动)是由细观平均运动与 1 个表征相对于平均运动的波动组成。对微曲率进行对称修正,推导得到了与对称应变张量共轭的对称柯西应力张量,与对称微曲率张量共轭的对称偶应力张量,以及与非对称相对应应变张量(微曲率张量)共轭的非对称相对应应力张量(偶应力张量)。基于运动分解与对称修正,最终得到了 1 个颗粒材料的 1 阶微形态宏观本构关系。宏观本构关系包括应力-应变关系,偶应力-微曲率关系,以及相对应应力(偶应力)-相对应应变(微曲率)关系。宏观本构模量通过表征细观信息的接触刚度、内部长度参数等识别。

关键词:颗粒材料;细观力学;微形态模型;微结构

中图分类号:O34

文献标志码:A

文章编号:1000-582X(2020)06-001-11

A modified micromorphic model based on micromechanics for granular materials

XIU Chenxi¹, CHU Xihua^{1,2}

(1. Department of Engineering Mechanics, School of Civil Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, P. R. China; 2. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P. R. China)

Abstract: A modified micromorphic continuum model is proposed for granular materials based on a micromechanics approach. In this model, a continuum material point is considered as a granular volume element whose deformation behavior is influenced by the translation and the rotation of particles. And a hypothesis is proposed that the microscopic actual motion is decomposed into a microscopic average motion and a fluctuation related to the average motion. By symmetric correction of micro curvature, a symmetric

收稿日期:2020-01-05

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11772237,11472196);工业装备结构分析国家重点实验室开放基金资助项目(GZ19110)。

Supported by National Natural Science Foundation of China (11772237,11472196) and Open Funds of the State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment (Dalian University of Technology) (GZ19110).

作者简介:修晨曦(1990—),男,武汉大学博士后,主要研究方向:计算固体力学、颗粒材料力学,(E-mail)xiuchx@whu.edu.cn。

通讯作者:楚锡华(1977—),男,武汉大学教授,博士生导师,主要研究方向:计算固体力学、颗粒材料力学,(E-mail)Chuxh@whu.edu.cn。

Cauchy stress and a symmetric couple stress conjugated with a symmetric strain and a symmetric curvature respectively, and asymmetric relative stress measures conjugated with asymmetric relative strain measures are obtained. Based on this decomposition and the symmetry correction, first-order micromorphic constitutive relationships are derived for granular materials with inclusion of stress-strain relation, even stress-micro curvature relation and relative stress-strain relation. Furthermore, the macroscopic constitutive moduli in the micromorphic model are obtained in the expressions of the microstructural information such as the contact stiffness and the internal length.

Keywords: granular materials; micromechanics; micromorphic model; microstructure

颗粒材料是指由大量离散固体颗粒及颗粒间孔隙构成的集合体,其具有强烈的非均匀性与复杂的力学性质,诸如多尺度行为、可破碎性及各向异性等^[1-2]。颗粒材料的宏观性质与细观尺度上的颗粒排布、接触刚度等信息密切相关。Chang 等^[3]认为通过微结构连续体途径(microstructural continuum approach)可以考虑细观结构的影响,基于能够反映细观离散特性的宏观变形量,得到宏观尺度上的本构关系。这种方法已被大量用于研究颗粒材料的力学行为中^[4-5]。该方法的关键是如何建立颗粒材料离散的细观力学响应与宏观上连续行为之间的联系^[6]。值得注意的是,由于考虑颗粒材料的细观离散特性,基于经典连续体的应力应变定义不再适用,大量研究^[7-9]致力于发展颗粒材料细观结构的描述、细观结构应力应变的定义以及如何建立宏-细观联系等问题。

微形态理论^[10-11]发展自 Mindlin^[10]与 Eringen^[11]的微结构理论,同样具有描述复杂微结构变形的能力。该理论假设物体是由宏观物质与细观物质组成的变形协调体,其每个物质点都是 1 个微结构胞元,并且引入相应的宏细观变形自由度用以描述微结构的变形与旋转,适用于复杂微结构的变形模拟。微形态理论得到了广泛的发展与应用,针对晶体、非均匀材料及分层材料等,相关的微形态弹性、弹塑性本构模型^[12-14]也得以建立。微形态理论同样被应用于颗粒材料的模拟当中。Misra 与 Poorsolhjouy^[15-17]提出了 1 个基于细观力学途径的颗粒材料微形态模型,并考察了弹性颗粒介质中的波的传播特性^[15, 17]。此模型的优势在于对微形态模型复杂的本构模量通过细观力学的途径进行了识别。修晨曦与楚锡华^[18]进一步提出了考虑独立转动自由度的颗粒材料微形态模型,并对弹性颗粒介质的频散现象与频率带隙进行了预测。

笔者基于微形态理论,给出了 1 个建立于细观力学途径的颗粒材料的修正的微形态连续体模型。正如上文所说,此模型可以对复杂的宏观变量用细观力学途径进行识别,这为颗粒材料的多尺度分析提供了一定的理论依据与参考。不同于 Mindlin-Eringen^[10-11]与 Misra-Poorsolhjouy^[15-17]的模型,笔者所提出的微形态模型在以下 5 个方面进行了修正与改进:1)提出了对称的微曲率张量,从而得到对称的应变张量与对称的微曲率,以及非对称的相对应变张量与相对微曲率张量,使得其形式上保持协调。此外,对称化处理有助于数值计算的稳定性与收敛性。而 Misra-Poorsolhjouy 模型^[15-17]仅有对称的应变张量,微曲率张量非对称。2)分别得到与对称应变张量和对称微曲率功共轭的对称柯西应力张量和对称偶应力张量。并且其本构模量 C_{ijkl} 与 D_{ijkl} 具有 $i-j$ 对称的次对称性。而在 Misra-Poorsolhjouy 模型^[15-17]中,应力张量 $\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum f_i L_j$ 非对称,却与对称的应变张量功共轭,且本构模量 C_{ijkl} 不具有 $i-j$ 次对称性。3)引入独立的颗粒转动,颗粒的相对位移受转动影响。4)忽略 2 阶的细观变形梯度项,得到 1 阶的宏观本构关系,包括应力-应变关系、偶应力-微曲率关系以及相对应力-相对应变关系,有利于模型的数值实现。5)假设颗粒的细观真实运动(包括平动与转动)是由细观平均运动与 1 个相对于平均运动的波动组成。基于以上思想,最终获得基于细观量表示的宏观本构关系与宏观本构模量,其中对称的柯西应力张量与对称的应变张量共轭,对称的偶应力张量与对称的微曲率张量共轭,而非对称的相对应力张量(偶应力张量)与非对称的相对应变张量(微曲率张量)共轭。

1 颗粒的运动描述

根据 Mindlin 的微结构理论^[10],建立 1 个全局坐标系 x ,并考虑 1 个颗粒集合体的体积单元为 V ,此时,

V 代表了 1 个物质点 P , 如图 1 所示。然后在 P 的重心建立 1 个局部坐标系 X , 保持 X 的坐标轴平行于 x 的坐标轴, 见图 1。 V 中的颗粒同时具有平动与转动自由度。用 c 表示 V 中参考颗粒的第 c 个接触颗粒, 且为了简便可将参考颗粒的上标省略, 那么根据细观力学方法^[3]可以得到接触点的相对位移与相对转动:

$$\delta_i^c = U_i^c - U_i + e_{ijk} (\Omega_j^c R_k^c - \Omega_j R_k), \theta_i^c = \Omega_j^c - \Omega_j, \quad (1)$$

式中: 大写的 U_i, Ω_j, R_k 分别为局部坐标系 X 下参考颗粒的细观位移、细观转动以及颗粒半径; U_i^c, Ω_j^c 与 R_k^c 分别为参考颗粒第 c 个接触点的颗粒的细观位移、转动与半径; e_{ijk} 为转换符号, $i, j=1, 2, 3$ 。值得注意的是, U_i 与 Ω_i 为 X 的 1 个特定函数与 x 和 t 的任意函数之和^[10], 即 $U_i = U_i(x, X, t), \Omega_i = \Omega_i(x, X, t)$ 。假设仿射变形, 那么第 c 个接触点两颗粒的相对位移与转动表示为:

$$U_i^c = U_i + \psi_{ij} L_j^c, \Omega_j^c = \Omega_j + \varphi_{ij} L_j^c, \quad (2)$$

式中: $L_j^c = X_j - X_j^c$ 为连接接触点上两颗粒中心的分支向量; ψ_{ij} 与 φ_{ij} 分别为细观位移梯度与细观转动梯度, 可定义为:

$$\psi_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \psi_{ij}(x, t), \varphi_{ij} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial \Omega_j} = \varphi_{ij}(x, t), \quad (3)$$

由此, 可以得到 ψ_{ij} 与 φ_{ij} 只是 x 和 t 的函数。

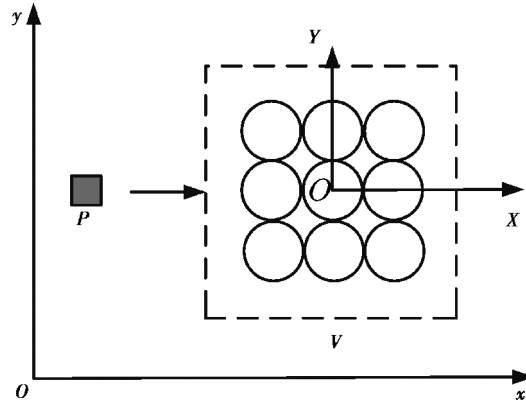


图 1 物质点 P 与其微结构体积单元 V 的示意图

Fig. 1 Schematic diagram for a material point P and its microstructural volume element V

假设颗粒的细观真实运动(平动与转动)是由细观平均运动与 1 个相对于平均运动的波动组成, 如图 2 所示。其中, 平均位移与平均转动分别表示为 \bar{u}_i 与 $\bar{\omega}_i$, 且其与局部坐标系 X 无关, 即 $\bar{u}_i = \bar{u}_i(x, t), \bar{\omega}_i = \bar{\omega}_i(x, t)$ 。那么, 通过宏细观的位移梯度, 可以定义波动部分的梯度:

$$\gamma_{ij} = \psi_{ij} - \bar{u}_{i,j}, \alpha_{ij} = \varphi_{ij} - \bar{\omega}_{i,j}, \quad (4)$$

式中: $\bar{u}_{i,j}$ 与 $\bar{\omega}_{i,j}$ 为平均位移与平均转动的宏观梯度。值得注意的是, 平均位移可被认为是宏观位移, 而宏观转动则是平均转动与刚体转动之和, 如图 3 所示。因此, 应变张量 ϵ_{ij} 可以定义为:

$$\epsilon_{ij} = \bar{u}_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}). \quad (5)$$

以相同方式, 可以定义微曲率张量 κ_{ij} 为平均转动的宏观梯度的对称部分^[19]:

$$\kappa_{ij} = \bar{\omega}_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2} (\bar{\omega}_{i,j} + \bar{\omega}_{j,i}). \quad (6)$$

那么, 将式(2)与(4)代入式(1)中, 接触点的相对位移与相对转动可以求得为:

$$\delta_i^c = \psi_{ij} L_j + e_{ijk} [(\varphi_{jl} L_l^c + \Omega_j) R_k^c - \Omega_j R_k] = \psi_{ij} L_j + e_{ijk} \varphi_{jl} R_k^c L_l^c + e_{ijk} \Omega_j (R_k^c - R_k) = \bar{u}_{i,j} L_j^c + \gamma_{ij} L_j^c + e_{ijk} \bar{\omega}_{j,l} L_l^c R_k^c + e_{ijk} \alpha_{jl} L_l^c R_k^c - e_{ijk} \Omega_j L_k^c, \quad (7)$$

$$\theta_i^c = \varphi_{ij} L_j^c = \bar{\omega}_{i,j} L_j^c + \alpha_{ij} L_j^c. \quad (8)$$

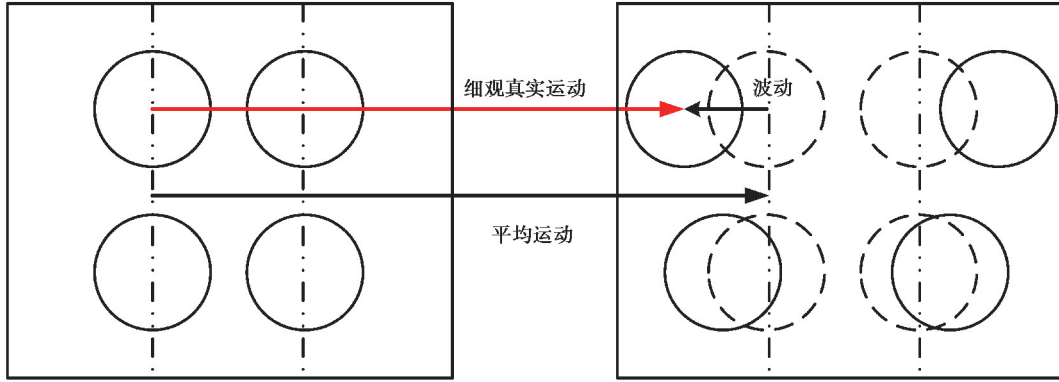


图 2 颗粒微观真实运动分解示意图

Fig. 2 Schematic diagram for a decomposition of microscopic actual motion

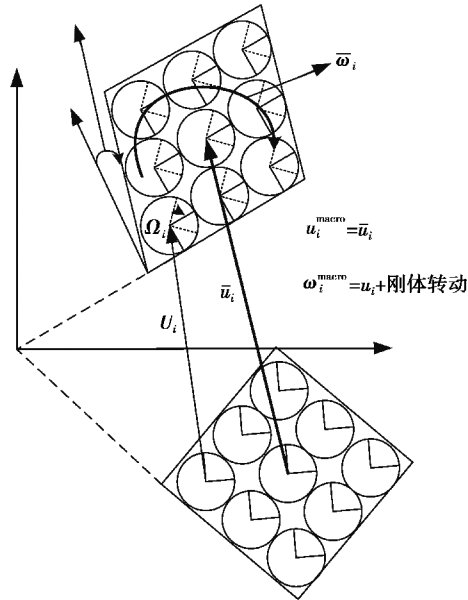


图 3 宏观位移与转动示意图

Fig. 3 Schematic diagram for macroscopic displacement and rotation

2 颗粒材料的宏观本构关系

2.1 接触本构关系

为建立颗粒的微观本构关系,首先对 1 个颗粒接触对建立局部坐标系,如图 4 所示。向量 \boldsymbol{n} 是接触面的法向向量,另外两个正交向量 \boldsymbol{s} 与 \boldsymbol{t} 在接触面切向平面上:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} &= \cos \alpha \boldsymbol{e}_1 + \sin \alpha \cos \beta \boldsymbol{e}_2 + \sin \alpha \sin \beta \boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{s} &= \frac{dn}{d\alpha} = -\sin \alpha \boldsymbol{e}_1 + \cos \alpha \cos \beta \boldsymbol{e}_2 + \cos \alpha \sin \beta \boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{t} &= \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{s} = -\sin \beta \boldsymbol{e}_2 + \cos \beta \boldsymbol{e}_3, \end{aligned} \quad (9)$$

式中: $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 与 \boldsymbol{e}_3 分别为平行于坐标轴的 3 个单位向量。通过旋转张量将局部坐标转换为全局坐标,大量研究^[3,20]给出了颗粒的微观本构关系为:

$$f_i^c = K_{ij}^c \delta_j^c, K_{ij}^c = K_n n_i n_j + K_t (s_i s_j + t_i t_j), \quad (10)$$

$$m_i^c = G_{ij}^c \theta_j^c, G_{ij}^c = G_n n_i n_j + G_t (s_i s_j + t_i t_j), \quad (11)$$

式中: f_i^c 与 m_i^c 分别为接触力与接触力矩; K_n 与 K_t (G_n 与 G_t) 分别为法向与切向接触刚度。

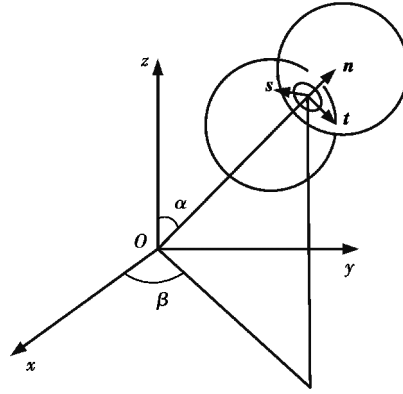


图4 接触点局部坐标系

Fig. 4 Local coordinate system at a contact pair

2.2 颗粒集合体的应力

从式(7)与(8)中可以看到,对颗粒材料的宏观变形能密度有贡献的变形量为 $\bar{u}_{i,j}$, γ_{ij} , $\bar{\omega}_{i,j}$ 与 α_{jl} , 并且注意到, $\bar{u}_{i,j}$ 与 γ_{ij} 的反对称部分以及旋转向量 Ω_j 对宏观变形能密度无贡献。因此,宏观变形能密度 W 可以表示为连续变形量的函数: $W = W(\epsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \kappa_{ij}, \alpha_{ij})$ 。而细观变形能密度 τ^c 为接触点 c 处细观运动量的函数,其在 V 中体积平均即为宏观变形能密度,可以表示为:

$$W = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n \tau^c, \quad (12)$$

式中: \sum 代表对 V 中所有接触求和。式(7)与(8)中 δ_i^c 与 θ_i^c 可以分解为不同的分量对应于不同的变形量,具体表示为:

$$\delta_i^{cU} = \bar{u}_{i,j} L_j, \delta_i^{cu} = \gamma_{ij} L_j, \delta_i^{cR} = e_{ijk} \bar{\omega}_{j,l} L_l r_k, \delta_i^{cr} = e_{ijk} \alpha_{jl} L_l r_k, \theta_i^{cR} = \bar{\omega}_{i,j} L_j, \theta_i^{cr} = \alpha_{ij} L_j. \quad (13)$$

那么,宏观变形能密度可以表示为:

$$W = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n \tau^c(\delta_i^{cU}, \delta_i^{cu}, \delta_i^{cR}, \delta_i^{cr}, \theta_i^{cR}, \theta_i^{cr}), \quad (14)$$

从而可以求得与这些变形量共轭的宏观应力量:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}}, \tau_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}}, \mu_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{ij}}, \nu_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ij}}, \quad (15)$$

式中: σ_{ij} 为柯西应力; τ_{ij} 为相对应应力; μ_{ij} 为偶应力; ν_{ij} 为相对偶应力。

对细观变形能密度求偏导,可以得到对应细观运动量 $\delta_i^{cU}, \delta_i^{cu}, \delta_i^{cR}, \delta_i^{cr}, \theta_i^{cR}, \theta_i^{cr}$ 的颗粒接触力与接触力矩:

$$\frac{\partial \tau^c}{\partial \delta_i^{c\eta}} = f_i^{c\eta}, \frac{\partial \tau^c}{\partial \theta_i^{c\eta}} = m_i^{c\eta}, \quad (16)$$

式中: η 代表不同分量 U, u, R 与 r 。同时式(10)与(11)中的接触刚度 K_{ij}^c 与 G_{ij}^c 可以写为对应于 $\delta_i^{c\eta}$ 与 $\theta_i^{c\eta}$ 的分量形式 $K_{ij}^{c\eta}$ 与 $G_{ij}^{c\eta}$ 。因此,将式(14)与(16)代入到式(15)中,宏观应力量可以用细观的接触力与接触力矩表示。

首先,柯西应力表示为:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n \frac{\partial \tau^c}{\partial \delta_k^{cU}} \frac{\partial \delta_k^{cU}}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n \frac{\partial \tau^c}{\partial \delta_k^{cU}} \frac{\partial \bar{u}_{k,l} L_l^c}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad (17)$$

式中偏导 $\frac{\partial \bar{u}_{k,l}}{\partial \epsilon_{ij}}$ 需要求得,且注意到 $\frac{\partial \bar{u}_{k,l}}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial \bar{u}_{l,k}}{\partial \epsilon_{ij}}$, 那么,偏导 $\frac{\partial \bar{u}_{k,l}}{\partial \epsilon_{ij}}$ 为:

$$\frac{\partial \bar{u}_{k,l}}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_{k,l} + \partial \bar{u}_{l,k}}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{2\partial \epsilon_{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon_{kl} + \partial \epsilon_{lk}}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (18)$$

因此,可以求得柯西应力为:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n \frac{\partial \omega^c}{\partial \delta_k^{cU}} \frac{\partial \delta_k^{cU}}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n \frac{\partial \omega^c}{\partial \delta_k^{cU}} \frac{\partial \bar{u}_{k,l} L_l^c}{\partial \epsilon_{ij}} = \\ & \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n f_l^{cU} \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) L_l^c = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n \frac{1}{2} (f_i^{cU} L_j^c + f_j^{cU} L_i^c),\end{aligned}\quad (19)$$

此时,柯西应力 σ_{ij} 为对称形式。值得注意的是,在 Misra-Poorsolhjouy 模型^[15-17]中, $\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum f_i L_j^c$ 并不是一定对称的,其原因是推导过程中令等式 $\frac{\partial \delta_k^{cU}}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial (\epsilon_{kl} L_l^c)}{\partial \epsilon_{ij}}$ 成立。而事实上,其正确形式应为 $\frac{\partial \delta_k^{cU}}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial (\bar{u}_{k,l} L_l^c)}{\partial \epsilon_{ij}}$,如式(13)所示。

同样地,偶应力计算式为:

$$\mu_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{ij}} = \frac{1}{V} \left(\sum_{c=1}^n \frac{\partial \omega^c}{\partial \delta_l^{cR}} \frac{\partial \delta_l^{cR}}{\partial \kappa_{ij}} + \sum_{c=1}^n \frac{\partial \omega^c}{\partial \theta_l^{cR}} \frac{\partial \theta_l^{cR}}{\partial \kappa_{ij}} \right), \quad (20)$$

式中的偏导 $\frac{\partial \delta_l^{cR}}{\partial \kappa_{ij}}$ 与 $\frac{\partial \theta_l^{cR}}{\partial \kappa_{ij}}$ 分别为:

$$\frac{\partial \delta_l^{cR}}{\partial \kappa_{ij}} = \frac{\partial \bar{\omega}_{m,n} e_{lmk} L_n^c R_k^c}{\partial \kappa_{ij}} = e_{lmk} L_n^c R_k^c \frac{\partial \bar{\omega}_{m,n}}{\partial \kappa_{ij}} = \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) e_{lmk} L_n^c R_k^c, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \theta_l^{cR}}{\partial \kappa_{ij}} = \frac{\partial \bar{\omega}_{l,n} L_n^c}{\partial \kappa_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\omega}_{l,n} + \partial \bar{\omega}_{n,l}}{\partial \kappa_{ij}} L_n^c = \frac{1}{2} \frac{\partial \kappa_{ln} + \partial \kappa_{nl}}{\partial \kappa_{ij}} L_n^c = \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jl}) L_n^c. \quad (22)$$

那么,求出式(20)的偶应力为:

$$\begin{aligned}\mu_{ij} &= \frac{\partial W}{\partial \kappa_{ij}} = \frac{1}{V} \left(\sum_{c=1}^n \frac{\partial \omega^c}{\partial \delta_l^{cR}} \frac{\partial \delta_l^{cR}}{\partial \kappa_{ij}} + \sum_{c=1}^n \frac{\partial \omega^c}{\partial \theta_l^{cR}} \frac{\partial \theta_l^{cR}}{\partial \kappa_{ij}} \right) = \\ & \frac{1}{V} \left(\sum_{c=1}^n f_l^{cR} \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) e_{lmk} L_n^c R_k^c + \sum_{c=1}^n m_i^{cR} \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jl}) L_n^c \right) = \\ & \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n \frac{1}{2} f_l^{cR} (e_{lik} L_j^c + e_{ljk} L_i^c) R_k^c + \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n \frac{1}{2} (m_i^{cR} L_j^c + m_j^{cR} L_i^c),\end{aligned}\quad (23)$$

可以看到,求得的偶应力与柯西应力一样为对称形式。从而,此对称的偶应力与所提出的对称的微曲率功共轭。

通过相似的推导过程,相对应力与相对偶应力计算式为:

$$\tau_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n \frac{\partial \omega^c}{\partial \delta_k^{cU}} \frac{\partial \delta_k^{cU}}{\partial \gamma_{ij}} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n f_k^{cU} \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial \gamma_{ij}} L_l^c = \frac{1}{V} \sum f_i^{cU} L_j^c, \quad (24)$$

$$\begin{aligned}\nu_{ij} &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ij}} = \frac{1}{V} \left(\sum_{c=1}^n \frac{\partial \omega^c}{\partial \delta_l^{cR}} \frac{\partial \delta_l^{cR}}{\partial \alpha_{ij}} + \frac{\partial \omega^c}{\partial \theta_k^{cR}} \frac{\partial \theta_k^{cR}}{\partial \alpha_{ij}} \right) = \\ & \frac{1}{V} \sum f_l^{cR} \frac{\partial \alpha_{mn} e_{lmk} L_n^c R_k^c}{\partial \alpha_{ij}} + \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n m_k^{cR} \frac{\partial \alpha_{kl}}{\partial \alpha_{ij}} L_l^c = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n e_{ikl} f_l^{cR} L_n^c R_k^c + \frac{1}{V} \sum m_i^{cR} L_j^c.\end{aligned}\quad (25)$$

从而,4个宏观应力量可以通过细观的接触力 f_i^c 、接触力矩 m_i^c 以及表征微结构尺寸的内部长度 L_j^c 和 R_k^c 表示,其中,柯西应力与偶应力为对称形式,相对应力与相对偶应力为非对称形式。

2.3 宏观本构关系

将式(10)与(11)代入到式(19)与式(23)~(25)中,可以求得用宏观应变量表示的宏观应力量。柯西应力表示为:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n \frac{1}{2} (f_i^{cU} L_j^c + f_j^{cU} L_i^c) = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n \frac{1}{2} (K_{ik}^{cU} \bar{u}_{k,l} L_l^c L_j^c + K_{jl}^{cU} \bar{u}_{l,k} L_k^c L_i^c) = \\ & \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n \frac{1}{2} (K_{kl}^{cU} \bar{u}_{k,l} L_i^c L_j^c + K_{lk}^{cU} \bar{u}_{l,k} L_j^c L_i^c) = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n \frac{1}{2} K_{kl}^{cU} (\bar{u}_{k,l} + \bar{u}_{l,k}) L_i^c L_j^c = \\ & \left(\frac{1}{V} \sum_{c=1}^n K_{kl}^{cU} L_i^c L_j^c \right) \epsilon_{kl} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}.\end{aligned}\quad (26)$$

因此,可以看到对称的柯西应力 σ_{ij} 与对称的应变 ϵ_{kl} 功共轭。并且,值得注意的是,本构模量 $C_{ijkl} = \left(\frac{1}{V} \sum_{c=1}^n K_{kl}^{cU} L_i^c L_j^c\right) = \left(\frac{1}{V} \sum_{c=1}^n K_{kl}^{cU} L_j^c L_i^c\right) = C_{jikl}$,这就说明本构模量 C_{ijkl} 具有 $i-j$ 的次对称性。然而,在 Misra-Poorsolhjouy 模型^[15-17]中,非对称的应力 σ_{ij} 与对称的应变 ϵ_{kl} 共轭,并且,本构模量 $C_{ijkl} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n K_{ik}^{cU} L_j^c L_c l \neq \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n K_{jk}^{cU} L_i^c L_c l = C_{jikl}$,即不具有 $i-j$ 的次对称性。

对于式(23)中偶应力,其各项计算公式为:

$$f_l^{cR} e_{lik} L_j^c R_k^c = K_{lm}^{cR} \delta_{cm} e_{lik} L_j^c R_k^c = K_{nm}^{cR} e_{mkq} \bar{\omega}_{k,l} L_l^c R_q^c e_{nlp} L_j^c R_p^c = \quad (27)$$

$$K_{nm}^{cR} e_{mkq} \bar{\omega}_{k,l} (L_i^c e_{nlp} L_j^c) R_p^c R_q^c = (K_{nm}^{cR} e_{mkq} e_{nlp} L_i^c L_j^c R_p^c R_q^c) \bar{\omega}_{k,l},$$

$$f_l^{cR} e_{ijk} L_i^c R_k^c = K_{ln}^{cR} \delta_{cn} e_{ijk} L_i^c R_k^c = K_{mn}^{cR} e_{nlq} \bar{\omega}_{l,k} L_k^c R_q^c e_{mjp} L_i^c R_p^c = \quad (28)$$

$$K_{mn}^{cR} e_{nlq} \bar{\omega}_{l,k} (L_j^c e_{mkp} L_i^c) R_p^c R_q^c = (K_{mn}^{cR} e_{nlq} e_{mkp} L_j^c L_i^c R_p^c R_q^c) \bar{\omega}_{l,k}.$$

则有

$$f_l^{cR} e_{lik} L_j^c R_k^c + f_l^{cR} e_{ijk} L_i^c R_k^c = (K_{nm}^{cR} e_{mkq} e_{nlp} L_i^c L_j^c R_p^c R_q^c) (\bar{\omega}_{k,l} + \bar{\omega}_{l,k}) = 2 (K_{nm}^{cR} e_{mkq} e_{nlp} L_i^c L_j^c R_p^c R_q^c) \kappa_{kl}. \quad (29)$$

而对于 $m_i^{cR} L_j^c + m_j^{cR} L_i^c$ 也可以同样求出。那么,偶应力最终为:

$$\mu_{ij} = \left(\frac{1}{V} \sum_{c=1}^n K_{mn}^{cR} e_{nlq} e_{mkp} L_j^c L_i^c R_p^c R_q^c\right) \kappa_{kl} + \left(\frac{1}{V} \sum_{c=1}^n G_{kl} R_{kl} L_i^c L_j^c\right) \kappa_{kl} = D_{ijkl} \kappa_{kl}, \quad (30)$$

式中的 D_{ijkl} 同样具有 $i-j$ 的次对称性。近似地,可以求得与非对称的相对应变和相对微曲率共轭的非对称的相对应力和相对偶应力:

$$\tau_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n f_i^{cU} L_j^c = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n K_{ik}^{cU} \delta_{ck} L_j^c = \left(\frac{1}{V} \sum_{c=1}^n K_{ik}^{cU} L_l^c L_j^c\right) \gamma_{kl} = A_{ijkl} \gamma_{kl}, \quad (31)$$

$$\nu_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n e_{ikl} f_l^{cU} L_j^c R_k^c + \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n m_i^{cU} L_j^c = \left(\frac{1}{V} \sum_{c=1}^n K_{nm}^{cU} e_{mkq} L_i^c R_p^c e_{nlp} L_j^c R_q^c\right) \alpha_{kl} + \left(\frac{1}{V} \sum_{c=1}^n G_{ik}^{cU} L_l^c L_j^c\right) \alpha_{kl} = B_{ijkl} \alpha_{kl}. \quad (32)$$

那么,从式(26)与式(30)~(32)可以看到,宏观本构关系为 1 阶。这是由于引入独立的颗粒转动自由度,在一定程度上,它可以代替 Mindlin-Eringen 模型^[10-11]中 2 阶的细观变形梯度。同时,宏观本构模量求得为接触刚度与表征微结构尺寸的内部长度的表达式,且具有 $i-j$ 次对称性。对称化处理不仅使宏观本构关系在形式上和谐统一,并且有助于增强数值计算的稳定性与收敛性。

2.4 宏观本构模量的识别

宏观本构模量是接触刚度和内部长度的函数。对于 1 个体积元 V 来说,其中的每个接触点的接触刚度和分支向量通常是不同的,为了简化计算,假设材料是各向同性的。Chang 等^[20]提出了 1 个各向同性的方向分布密度函数 $\xi(\alpha, \beta) = 1/4\pi$, (α, β) 为式(9)所示的局部坐标系。因此,宏观本构模量的离散求和可以转化为积分形式:

$$C_{ijkl} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n K_{kl}^{cU} L_i^c L_j^c = l^2 N_V \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (K_{kl}^{cU} n_i n_j) \xi \sin \alpha d\beta d\alpha, \quad (33)$$

$$D_{ijkl} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n K_{mn}^{cR} e_{nlq} e_{mkp} L_j^c L_i^c R_p^c R_q^c + \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n G_{kl}^{cR} L_i^c L_j^c = \quad (34)$$

$$l^2 r^2 N_V \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (K_{mn}^{cR} e_{nlq} e_{mkp} n_i n_j n_p n_q) \xi \sin \alpha d\beta d\alpha + l^2 N_V \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (G_{kl}^{cR} n_i n_j) \xi \sin \alpha d\beta d\alpha,$$

$$A_{ijkl} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n K_{ik}^{cU} L_l^c L_j^c = l^2 N_V \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (K_{ik}^{cU} n_i n_j) \xi \sin \alpha d\beta d\alpha, \quad (35)$$

$$B_{ijkl} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n K_{nm}^{cr} e_{mkq} L_i^c R_p^c e_{nip} L_j^c R_q^c + \frac{1}{V} \sum_{c=1}^n G_{ik}^{cr} L_l^c L_j^c = \quad (36)$$

$$l^2 r^2 N_V \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (K_{nm}^{cr} e_{mkq} n_l n_p e_{nip} n_j n_q) \xi \sin \alpha d\beta d\alpha + l^2 N_V \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (G_{ik}^{cr} n_l n_j) \xi \sin \alpha d\beta d\alpha,$$

式中: N_V 表示体积元的接触体积密度, 且颗粒尺寸假设相同, 则有 $L_j^c = l n_j$ 与 $R_j^c = r n_j$ 。那么, 求解上述积分, 就可以得到宏观本构模量:

$$\begin{cases} C_{iiii} = \frac{l^2 N_V}{15} (3K_n^U + 2K_t^U), \\ C_{ijij} = \frac{l^2 N_V}{15} (K_n^U + 4K_t^U), \\ C_{ijji} = C_{ijij} = \frac{l^2 N_V}{15} (K_n^U - K_t^U), \\ C_{ijkl} = 0, \text{其他。} \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} D_{iiii} = \frac{l^2 r^2 N_V}{15} (2K_t^R) + \frac{l^2 N_V}{15} (3G_n^R + 2G_t^R), \\ D_{ijij} = \frac{l^2 r^2 N_V}{15} (4K_t^R) + \frac{l^2 N_V}{15} (G_n^R + 4G_t^R), \\ D_{ijji} = D_{ijij} = \frac{l^2 r^2 N_V}{15} (-K_t^R) + \frac{l^2 N_V}{15} (G_n^R - G_t^R), \\ D_{ijkl} = 0, \text{其他。} \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} A_{iiii} = \frac{l^2 N_V}{15} (3K_n^u + 2K_t^u), \\ A_{ijij} = A_{ijji} = \frac{l^2 N_V}{15} (K_n^u - K_t^u), \\ A_{ijji} = \frac{l^2 N_V}{15} (K_n^u + 4K_t^u), \\ A_{ijkl} = 0, \text{其他。} \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} B_{iiii} = \frac{l^2 r^2 N_V}{15} (2K_t^r) + \frac{l^2 N_V}{15} (3G_n^r + 2G_t^r), \\ B_{ijij} = B_{ijji} = \frac{l^2 r^2 N_V}{15} (-K_t^r) + \frac{l^2 N_V}{15} (G_n^r - G_t^r), \\ B_{ijji} = \frac{l^2 r^2 N_V}{15} (4K_t^r) + \frac{l^2 N_V}{15} (G_n^r + 4G_t^r), \\ B_{ijkl} = 0, \text{其他。} \end{cases} \quad (40)$$

式中 $i \neq j$ 。

3 平衡方程与边界条件

根据能量守恒, 外力做功转化为动能与势能, 则由哈密顿原理可以得到在边界为 S 的体积元 V 中有:

$$\delta \int_0^t (T - W) dt + \int_0^t \delta W^{\text{ext}} dt = 0, \quad (41)$$

式中: W 为总势能; T 为总动能; δW^{ext} 为外力功的变分。并且, $W \equiv \int_V w dV$, 其中, w 为总势能密度, 其变分为:

$$\begin{aligned} \delta w &= \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} + \tau_{ij} \delta \gamma_{ij} + \mu_{ij} \delta \kappa_{ij} + \nu_{ij} \delta \alpha_{ij} = \sigma_{ij} \delta \bar{u}_{i,j} + \tau_{ij} (\delta \psi_{ij} - \delta \bar{u}_{i,j}) + \mu_{ij} \delta \bar{\chi}_{i,j} + \nu_{ij} (\delta \varphi_{ij} - \delta \bar{\omega}_{i,j}) = \\ &= (\sigma_{ij} - \tau_{ij}) \delta \bar{u}_{i,j} + \tau_{ij} \delta \psi_{ij} + (\mu_{ij} - \nu_{ij}) \delta \bar{\omega}_{i,j} + \nu_{ij} \delta \varphi_{ij} = \\ &= [(\sigma_{ij} - \tau_{ij}) \delta \bar{u}_i]_{,j} - (\sigma_{ij} - \tau_{ij})_{,j} \delta \bar{u}_i + \tau_{ij} \delta \psi_{ij} + [(\mu_{ij} - \nu_{ij}) \delta \bar{\omega}_i]_{,j} - (\mu_{ij} - \nu_{ij})_{,j} \delta \bar{\omega}_i + \nu_{ij} \delta \varphi_{ij}. \end{aligned} \quad (42)$$

又如图 3 所示,宏观转动为细观平均转动与刚体转动之和,即有

$$\Gamma_i = \omega_i^{\text{macro}} = e_{ijk} \bar{u}_{k,j} + \omega_i, \quad (43)$$

那么,式(42)中有:

$$\begin{aligned} & [(\mu_{ij} - \nu_{ij}) \delta \bar{\omega}_i]_{,j} - (\mu_{ij} - \nu_{ij})_{,j} \delta \bar{\omega}_i = \\ & [(\mu_{ij} - \nu_{ij}) \delta \Gamma_i]_{,j} - [(\mu_{ij} - \nu_{ij}) \delta e_{ikl} \bar{u}_{l,k}]_{,j} - (\mu_{ij} - \nu_{ij})_{,j} \delta \Gamma_i + (\mu_{ij} - \nu_{ij})_{,j} \delta e_{ikl} \bar{u}_{l,k} = \\ & [(\mu_{ij} - \nu_{ij}) \delta \Gamma_i]_{,j} - [e_{ikl} (\mu_{ij} - \nu_{ij}) \delta \bar{u}_l]_{,kj} + [e_{ikl} (\mu_{ij} - \nu_{ij})_{,k} \delta \bar{u}_l]_{,j} - (\mu_{ij} - \nu_{ij})_{,j} \delta \Gamma_i + \\ & [e_{ikl} (\mu_{ij} - \nu_{ij})_{,j} \delta \bar{u}_l]_{,k} - [e_{ikl} (\mu_{ij} - \nu_{ij})_{,j} \delta \bar{u}_l]_{,k} = [(\mu_{ij} - \nu_{ij}) \delta \Gamma_i]_{,j} - [e_{lki} (\mu_{lj} - \nu_{lj}) \delta \bar{u}_i]_{,kj} + \\ & [e_{lki} (\mu_{lj} - \nu_{lj})_{,k} \delta \bar{u}_i]_{,j} - (\mu_{ij} - \nu_{ij})_{,j} \delta \Gamma_i + [e_{lki} (\mu_{lj} - \nu_{lj})_{,j} \delta \bar{u}_i]_{,k} - e_{lki} (\mu_{lj} - \nu_{lj})_{,jk} \delta \bar{u}_i. \end{aligned} \quad (44)$$

因此,可以求得总势能 W 的变分为:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_V [-(\sigma_{ij} - \tau_{ij})_{,j} - e_{lki} (\mu_{lj} - \nu_{lj})_{,jk}] \delta \bar{u}_i dV + \int_V [-(\mu_{ij} - \nu_{ij})_{,j}] \delta \Gamma_i dV + \int_V \tau_{ij} \delta \psi_{ij} dV + \\ & \int_V \nu_{ij} \delta \varphi_{ij} dV + \int_s [(\sigma_{ij} - \tau_{ij}) n_j + e_{lki} (\mu_{lj} - \nu_{lj})_{,k} n_j + e_{lki} (\mu_{lj} - \nu_{lj})_{,j} n_k] \delta \bar{u}_i dS + \\ & \int_s [(\mu_{ij} - \nu_{ij}) n_j] \delta \Gamma_i dS - \int_s [e_{lki} (\mu_{lj} - \nu_{lj}) \delta \bar{u}_i]_{,k} n_j dS = \int_V [-(\sigma_{ij} - \tau_{ij})_{,j} - e_{lki} (\mu_{lj} - \nu_{lj})_{,jk}] \delta \bar{u}_i dV + \\ & \int_V [-(\mu_{ij} - \nu_{ij})_{,j}] \delta \Gamma_i dV + \int_V \tau_{ij} \delta \psi_{ij} dV + \int_V \nu_{ij} \delta \varphi_{ij} dV + \int_s [(\sigma_{ij} - \tau_{ij}) n_j + e_{lki} (\mu_{lj} - \nu_{lj})_{,j} n_k] \delta \bar{u}_i dS + \\ & \int_s [(\mu_{ij} - \nu_{ij}) n_j] \delta \Gamma_i dS - \int_s e_{lki} (\mu_{lj} - \nu_{lj}) n_j \delta \bar{u}_{i,k} dS. \end{aligned} \quad (45)$$

同时,式(41)中的外力功的变分可以表示为:

$$\delta W^{\text{ext}} = \int_V f_i \delta \bar{u}_i dV + \int_V m_i \delta \Gamma_i dV + \int_V F_{ij} \delta \psi_{ij} dV + \int_V R_{ij} \delta \varphi_{ij} dV + \int_s t_i \delta \bar{u}_i dS + \int_s M_i \delta \Gamma_i dS, \quad (46)$$

式中: f_i, m_i, F_{ij}, R_{ij} 分别为单位体积内的体力、力矩、2 阶体力和 2 阶力矩; t_i 与 M_i 分别为单位面积上的面力与力矩。此外,总动能的变分为:

$$\delta \int_0^t T dt = - \int_0^t dt \int_V \rho \ddot{u}_i \delta \bar{u}_i + \rho' I' \ddot{\psi}_{ij} \delta \psi_{ij} + \rho I \ddot{\Gamma}_i \delta \Gamma_i + \rho' J' \ddot{\varphi}_{ij} \delta \varphi_{ij} dV, \quad (47)$$

式中: ρ 为宏观质量密度; ρ' 为细观质量密度; I, I', J' 分别为惯性矩。为简化分析,假设体积元 V 中的颗粒大小相等且规则排布。此时每个颗粒可以看作是 1 个胞元(例如 Voronoi 胞元),并假定颗粒分布在体积元的整个体积内,如图 5 所示,那么, ρ 就代表胞元及体积元的等效密度, ρ' 代表固体颗粒的密度, $2d$ 为胞元的边长,则有 $I = \frac{2}{3} d^2, I' = \frac{3}{5} r^2, J' = \frac{1}{2} r^4$ 以及 $\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\pi r^3}{6 d^3}$ 。

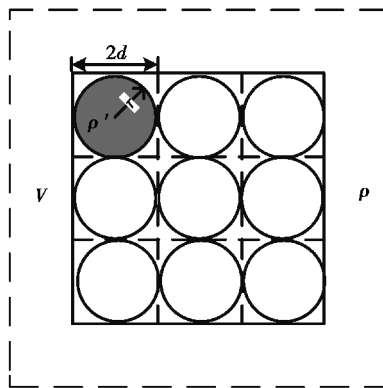


图 5 颗粒胞元示意图

Fig. 5 Schematic diagram for microcells

从而,将式(45)~(47)代入式(41)中,可以得到:

$$\begin{aligned} & \int_V [(\sigma_{ij} - \tau_{ij})_{,j} + e_{lki} (\mu_{lj} - \nu_{lj})_{,jk} + f_i - \rho \ddot{u}_i] \delta \bar{u}_i dV + \int_V [-\nu_{ij} + R_{ij} - \rho' J \ddot{\varphi}_{ij}] \delta \varphi_{ij} dV + \\ & \int_V [(\mu_{ij} - \nu_{ij})_{,j} + m_i - \rho I \ddot{\Gamma}_i] \delta \Gamma_i dV + \int_V [-\tau_{ij} + F_{ij} - \rho' I' \ddot{\psi}_{ij}] \delta \psi_{ij} dV + \\ & \int_s [t_i - (\sigma_{ij} - \tau_{ij}) n_j - e_{lki} (\mu_{lj} - \nu_{lj})_{,j} n_k] \delta \bar{u}_i dS + \\ & \int_s [M_i - (\mu_{ij} - \nu_{ij}) n_j] \delta \Gamma_i dS + \int_s [e_{lki} (\mu_{lj} - \nu_{lj}) n_j] \delta \bar{u}_{i,k} dS = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

为了使式(48)成立,要求式中每一项均为 0,那么,就可以得到 4 组平衡方程:

$$\begin{cases} (\sigma_{ij} - \tau_{ij})_{,j} + e_{ilk} (\mu_{lj} - \nu_{lj})_{,jk} + f_i = \rho \ddot{u}_i, \\ (\mu_{ij} - \nu_{ij})_{,j} + m_i = \rho I \ddot{\Gamma}_i, \\ -\tau_{ij} + F_{ij} = \rho' I' \ddot{\psi}_{ij}, \\ -\nu_{ij} + R_{ij} = \rho' J' \ddot{\varphi}_{ij}. \end{cases} \quad (49)$$

以及 3 组边界条件:

$$\begin{cases} (\sigma_{ij} - \tau_{ij}) n_j + e_{ilk} (\mu_{lj} - \nu_{lj})_{,j} n_k = t_i, \\ (\mu_{ij} - \nu_{ij}) n_j = M_i, \\ e_{iji} (\mu_{ik} - \nu_{ik}) n_k = 0. \end{cases} \quad (50)$$

4 结 论

颗粒材料的细观力学方法已经被应用于发展颗粒材料的微形态模型当中,基于此方法发展的颗粒材料宏观连续体模型可以反映材料的细观结构信息。针对颗粒材料提出了 1 个基于细观力学的修正的微形态模型,对微曲率张量进行了对称修正,推导出了与对称微曲率张量共轭的对称偶应力张量。结果得到,对称柯西应力和对称偶应力分别与对称应变和对称微曲率共轭,非对称相对应力和非对称相对偶应力分别与非对称相对应变和非对称相对微曲率共轭。此对称化处理有助于数值计算的稳定性与收敛性。引入了颗粒的独立转动自由度,从而得到 1 个较完备的变形模式。并且,假设了颗粒的细观真实运动(包括平动与转动)是由细观平均运动与 1 个相对于平均运动的波动组成。在此基础上,根据材料的细观结构信息,推导出颗粒材料的微形态宏观本构关系与宏观本构模量。宏观本构关系为 1 阶本构关系,包括应力-应变关系、偶应力-微曲率关系、相对应力-相对应变关系以及相对偶应力-相对微曲率关系。此外,1 阶的本构关系在数值实现方面更具优势。而宏观本构关系与宏观本构模量由表征细观信息的接触刚度、内部长度参数等进行识别,这对于进行颗粒材料的多尺度分析有一定的优势与参考价值。

参考文献:

- [1] Chu X H, Yu C X, Xiu C X, et al. Two scale modeling of behaviors of granular structure: size effects and displacement fluctuations of discrete particle assembly[J]. Structural Engineering & Mechanics, 2015, 55(2): 315-334.
- [2] Xiu C X, Chu X H. A micromechanics-based gradient model and the effect of high-order stress and particle rolling on localizations for granular materials[J]. Granular Matter, 2017, 19(4): 87.
- [3] Chang C S, Ma L. Modeling of discrete granulates as micropolar continua[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1990, 116(12): 2703-2721.
- [4] Christoffersen J, Mehrabadi M M, Nemat-Nasser S. A Micromechanical description of granular material behavior[J]. Journal of Applied Mechanics, 1981, 48(2): 339.
- [5] Mehrabadi M M, Nemat-Nasser S. Stress, dilatancy and fabric in granular materials[J]. Mechanics of Materials, 1983, 2(2): 155-161.

- [6] de Gennes P G. Granular matter: a tentative view[J]. *Reviews of Modern Physics*,1999,71(2):S374-S382.
- [7] Chang C S, Chang Y, Kabir M G. Micromechanics modeling for stress-strain behavior of granular soils. I: theory[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*,1992,118(12):1959-1974.
- [8] Chang C S, Kuhn M R. On virtual work and stress in granular media[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(13):3773-3793.
- [9] Kruyt N P, Millet O, Nicot F. Macroscopic strains in granular materials accounting for grain rotations[J]. *Granular Matter*,2014,16(6):933-944.
- [10] Mindlin R D. Micro-structure in linear elasticity[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*,1964,16(1):51-78.
- [11] Eringen A C. Microcontinuum field theories I: foundations and solids[J]. *Applied Mechanics Reviews*,1999,55(1): B15.
- [12] Asian O, Cordero N M, Gaubert A, et al. Micromorphic approach to single crystal plasticity and damage[J]. *International Journal of Engineering Science*,2011,49(12):1311-1325.
- [13] Chambon R, Caillerie D, Matsushima T. Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials: Localization studies[J]. *International Journal of Solids & Structures*,2001,38(46):8503-8527.
- [14] Enakoutsa K. Exact results for the problem of a hollow sphere subjected to hydrostatic tension and made of micromorphic plastic porous material[J]. *Mechanics Research Communications*,2013,49:1-7.
- [15] Misra A, Poorsolhjoui P. Granular micromechanics based micromorphic model predicts frequency band gaps [J]. *Continuum Mechanics & Thermodynamics*,2016,28(1/2):215-234.
- [16] Misra A, Poorsolhjoui P. Grain- and macro-scale kinematics for granular micromechanics based small deformation micromorphic continuum model[J]. *Mechanics Research Communications*,2017,81:1-6.
- [17] Poorsolhjoui P, Misra A. Granular micromechanics based continuum model for grain rotations and grain rotation waves[J]. *Journal of the Mechanics & Physics of Solids*,2019,129:244-260.
- [18] 修晨曦, 楚锡华. 基于微形态模型的颗粒材料中波的频散现象研究[J]. *力学学报*,2018,50(2):315-328.
XIU Chenxi, CHU Xihua. Study on dispersion behavior and band gap in granular materials based on a micromorphic model[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*,2018,50(2):315-328. (in Chinese)
- [19] Yang F, Chong A C M, Lam D C C, et al. Couple stress based strain gradient theory for elasticity[J]. *International Journal of Solids & Structures*,2002,39(10):2731-2743.
- [20] Chang C S, Lun M. Elastic material constants for isotropic granular solids with particle rotation[J]. *International Journal of Solids and Structures*,1992,29(8):1001-1018.

(编辑 张 苹)