

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2020.06.005

基于布谷鸟搜索算法的弹性力学边界条件识别

吴秀壮, 周焕林, 陈豪龙

(合肥工业大学 土木与水利工程学院, 合肥 230009)

摘要: 二维弹性力学 Cauchy 边界条件反问题的可进入测量部分边界上的全部面力和位移边界条件均已知, 难进入测量部分边界上的所有边界条件需要求解。基于边界元方法, 采用多项式函数近似未知的面力边界条件, 将该反演问题转化为多项式系数识别问题。目标函数定义为已知边界上面力的计算值和给定值之间的最小二乘误差, 利用布谷鸟算法最小化目标函数, 实现对待求边界上面力边界条件的数值反演。未知位移由反演得到的面力结合其他已知边界条件代入正问题中求解得到。比较了未采用多项式和采用多项式近似的计算结果, 并分别讨论了鸟巢数量、多项式阶数及测量误差对数值反演的影响。数值算例验证了布谷鸟算法联合多项式近似可准确有效地求解弹性力学 Cauchy 边界条件反问题。

关键词: 边界元法; 布谷鸟算法; 弹性力学; 边界条件; 反问题

中图分类号: O343

文献标志码: A

文章编号: 1000-582X(2020)06-040-10

Identification of elasticity boundary conditions based on cuckoo search algorithm

WU Xiuzhuang, ZHOU Huanlin, CHEN Haolong

(School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, P. R. China)

Abstract: For Cauchy boundary condition inverse problems in 2-D elasticity, all the boundary conditions on accessible part of the boundary are known, and the boundary conditions on the rest inaccessible part of the boundary need to be solved. In this paper, based on the boundary element method, and with a polynomial function to approximate the unknown traction boundary conditions, the inverse problem was transformed into a problem with the identification of unknown coefficients of the polynomial. The objective function was defined as the least square error between the calculated values and the given values of the tractions on the measurable part of the boundary. The unknown tractions on the immeasurable boundary were recognized by minimizing the objective function through the cuckoo search (CS) algorithm. Then, the unknown boundary displacements were obtained by solving the direct problem with the inversed tractions and the other known conditions. The calculation results with and without using polynomial approximation were compared, and the influences of nest number, polynomial order and measurement noise on the numerical inversion were also discussed. Numerical examples verify that the CS algorithm combined with polynomial approximation can accurately and effectively solve the Cauchy problem in elasticity.

收稿日期: 2020-01-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11672098)。

Supported by National Natural Science Foundation of China (11672098).

作者简介: 吴秀壮(1995—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为计算力学, (E-mail)519336395@qq.com。

通讯作者: 周焕林, 男, 博士, 教授, 主要研究方向为计算力学和结构工程, (E-mail)zhouhl@hfut.edu.cn。

Keywords: boundary element method; cuckoo search algorithm; elasticity problem; boundary condition; inverse problem

反问题具有重要的研究价值和工程背景。在过去几十年里,反问题的应用已经扩展到许多领域,如热传导、电阻抗层析成像、无损检测等。弹性力学 Cauchy 边界条件反问题是一类经典的反问题。在这类问题中,只在解域的部分边界上可以测量或者给出边界条件,而剩余边界则不方便测量或得到任何信息。这类问题的数值反演一般是不适定的,即微小的测量误差会导致计算结果的精度严重下降。因此,提出准确有效的数值方法以克服反问题的不适定性是一项很有必要的工作。

边界元法^[1]是解决工程问题的一种常用计算方法,被广泛用于求解各类力学反问题。与有限元法相比,边界元法只需离散待求区域表面,从而降低维度,减少求解问题的自由度数,节省大量时间。由于边界元法只需将区域边界离散,域内值仍可解析计算得到,因此计算精度更高。

Marin 等^[2]基于边界元法和共轭梯度法对弹性力学 Cauchy 反问题进行求解,识别了未知边界上的面力和位移。Li 等^[3]对有限差分法进行拓展,采用了广义有限差分法求解二维 Cauchy 反问题,避免了网格划分和数值求积等耗时长的工作。El Seblani 等^[4]提出了一种局部无网格 Hermite 型配点法用于求解 Cauchy 反问题。Marin 等^[5]利用基本解法和衰落正则化方法进行缺失边界数据的数值重构,并根据 Morozov 偏差原理确定合适的迭代步数。Grigor'ev^[6]给出了一种求解弹性理论中 Lamé 方程 Cauchy 反问题的解析计算方法。Yang 等^[7]用改进的 Tikhonov 正则化方法求解 Cauchy 反问题。Liu 等^[8]结合 Trefftz 法和基本解法,改善了 Cauchy 问题解的精度。Wang 等^[9]首次尝试用局部基本解方法求解复杂几何中的 Cauchy 反问题。周焕林等^[10]利用截断奇异值分解法识别 Cauchy 边界条件,并用 L-Curve 法确定正则化参数,得到正则解。

近年来,元启发式算法作为一种新兴的优化类算法,广泛应用于很多领域。Mahmud 等^[11]将边界元法、共轭梯度法和遗传算法结合,用于 Cauchy 反问题的求解,识别非均匀体内的夹杂。Tian 等^[12]基于量子行为粒子群算法和共轭梯度法反演稳态条件下的几何形状,应用 Tikhonov 正则化方法处理问题的病态性。布谷鸟搜索(cuckoo search, CS)算法^[13]由 Yang 和 Deb 于 2009 年提出,并在近年来得到广泛的关注。严俊等^[14]基于 CS 算法反演了稳态热传导问题的导热系数。Naumann 等^[15]用改进的 CS 算法进行空气动力学的设计优化。Kaveh 等^[16]使用改进的 CS 算法对地震荷载作用下的三维钢结构框架进行尺寸优化。Walton 等^[17]基于改进的 CS 算法,讨论了非梯度算法的一些工程应用。

笔者结合 CS 算法和多项式近似法求解弹性力学 Cauchy 边界条件反问题,将待识别面力边界条件用多项式函数拟合,从而将离散结点未知边界条件求解问题转化成多项式未知系数识别问题。通过 CS 算法最小化已知边界上的面力计算值与给定值的最小二乘误差来反演未知面力,将反演得到的面力边界条件代入正问题求解得到未知边界位移。

1 正问题

1.1 弹性力学理论

考虑一线弹性区域 $\Omega \in \mathbf{R}^d$, \mathbf{R} 为实数集, d 为所求问题的空间维数,一般 $d \in \{1, 2, 3\}$, 并且域 Ω 由光滑边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 包裹。假设边界由两部分组成, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, 其中 $\Gamma_1, \Gamma_2 \neq \emptyset$, 并且 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, \emptyset 为空集。仅研究二维弹性力学问题,且不考虑体力作用,则系统的控制方程可按式给出:

$$G \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_j(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \mathbf{x} \in \Omega, i, j = 1, 2. \quad (1)$$

式中: G 和 ν 分别为材料的剪切模量和泊松比; \mathbf{x} 为区域内一点, x_i 和 x_j 为该点 i 和 j 方向上的坐标, u_i 和 u_j 表示该点 i 和 j 方向上的位移。

几何方程为:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right), \mathbf{x} \in \Gamma, i, j = 1, 2. \quad (2)$$

式中: ε_{ij} 为应变分量。由胡克定律可得应力和应变之间的关系, 即:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = 2G \left(\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{kk}(\mathbf{x}) \right), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad i, j = 1, 2. \quad (3)$$

式中: ε_{kk} 为体积应变, σ_{ij} 为应力分量。

令 $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ 为边界 Γ 上的外法线向量, 且 $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ 为其上一点 \mathbf{x} 处的面力向量, 则有:

$$t_i(\mathbf{x}) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad i, j = 1, 2. \quad (4)$$

若在边界 Γ 的部分边界, 即 Γ_2 上已知所有信息, 而剩余边界 Γ_1 上边界条件全未知, 则有:

$$u_i(\mathbf{x}) = \bar{u}_i(\mathbf{x}), \quad t_i(\mathbf{x}) = \bar{t}_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

式中: \bar{u}_i 为 i 方向上已知位移条件, \bar{t}_i 为 i 方向上已知面力条件。

利用已知边界条件式(5)去识别剩余边界未知信息, 此类问题为 Cauchy 型边界条件反问题, 如图 1 所示。

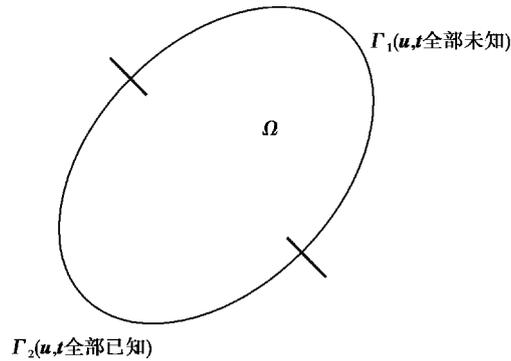


图 1 Cauchy 边界条件反问题

Fig. 1 The inverse problem of Cauchy boundary conditions

1.2 边界积分方程

考虑二维弹性力学平面问题且不考虑体力项, 则边界积分方程可写成:

$$C_{ij} u_j + \int_{\Gamma} T_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}^* t_j d\Gamma, \quad i, j = 1, 2. \quad (6)$$

对于二维各向同性线弹性体, 其位移基本解和面力基本解分别为:

$$U_{ij}^* = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)} [(3-4\nu) \ln r \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}]; \quad (7)$$

$$T_{ij}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ r_{,n} [(1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j}] - (1-2\nu) (r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \}. \quad (8)$$

式中: U_{ij}^* 和 T_{ij}^* 分别表示弹性体内 i 向作用单位集中力时引起的 j 向位移和面力分量; C_{ij} 为与点 \mathbf{x} 位置有关的常数; δ_{ij} 为克罗内克函数; r 为边界上源点到场点之间的距离; $r_{,i}$ 、 $r_{,j}$ 和 $r_{,n}$ 分别表示 r 对 x_i 、 x_j 以及外法线向量 \mathbf{n} 的偏导数; n_i 和 n_j 分别表示外法线 \mathbf{n} 在 i 和 j 方向上的方向余弦。对于平面应力问题, 将 ν 换为 $\frac{\nu}{1+\nu}$ 。利用边界元法离散边界积分方程式(6), 可得以下表达式:

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{T}. \quad (9)$$

式中: \mathbf{H} 和 \mathbf{G} 是只与边界 Γ 几何有关的系数矩阵, \mathbf{U} 和 \mathbf{T} 为结点的位移和面力列向量。引入已知边界条件(5)中 Γ_2 上的位移边界条件和 Γ_1 边界上的面力边界条件, 该面力边界条件采用布谷鸟算法优化计算得到的系数进行多项式拟合后获得, 式(9)可改写为:

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{s}. \quad (10)$$

式中: \mathbf{A} 为式(9)移项后形成的已知系数矩阵; \mathbf{s} 为移项后形成的已知列向量; 向量 \mathbf{f} 包含边界 Γ_1 上的未知位移边界条件和 Γ_2 上的面力边界条件计算值。

2 反问题

2.1 多项式近似

假定未知面力边界条件由已知形式的 m 阶多项式组成,通过下式表示:

$$t_i(\mathbf{x}) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1^2 + b_4 x_1 x_2 + b_5 x_2^2 + \cdots + b_m (m+3)/2 x_2^m. \quad (11)$$

对整个边界 Γ_1 上未知面力进行拟合,用矩阵形式表示,则有

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{b} \mathbf{q}(\mathbf{x}). \quad (12)$$

式中: $\mathbf{b} = (b_0 \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ \cdots \ b_m)_{(m+3)/2}$, $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = (1 \ x_1 \ x_2 \ x_1^2 \ x_1 x_2 \ x_2^2 \ \cdots \ x_2^m)^T$ 。从而,边界条件反问题转化为未知多项式系数识别问题。

2.2 目标函数

通过多项式函数插值拟合后,未知面力边界条件识别转化为找出一组最优系数 \mathbf{b} 满足收敛条件。目标函数表示如下:

$$J(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^N \|t_i^l - \hat{t}_i^l\|^2. \quad (13)$$

式中: N 为可测得面力和位移边界条件信息的边界上划分的结点数, t_i^l 为通过边界元法计算得到的第 l 个结点在 i 方向上的面力分量计算值, \hat{t}_i^l 为第 l 个结点在 i 方向上的面力分量已知值。考虑测量误差的结点面力测量值为

$$\mathbf{t}^* = \hat{\mathbf{t}}_0 (1 + \mathbf{w}p). \quad (14)$$

式中: $\hat{\mathbf{t}}_0$ 表示不带误差的结点面力测量值; \mathbf{w} 表示服从 $0 \sim 1$ 分布的正态分布随机误差; p 为误差水平系数。

当目标函数 $J(\mathbf{b})$ 满足

$$J(\mathbf{b}) < \varepsilon. \quad (15)$$

时,迭代终止, ε 为迭代终止条件。

2.3 布谷鸟搜索算法

布谷鸟算法是一种新型元启发式算法。该算法通过模拟布谷鸟的繁殖寄生行为,并加入 Lévy 飞行机制求解最优化问题。布谷鸟搜索算法可以用如下 3 点理想化准则概括:

- 1) 每只布谷鸟单次只产 1 枚卵,并且随机选择宿主巢穴放入;
- 2) 将存有最好鸟蛋的巢穴留至下一代;
- 3) 用于迭代的鸟巢数量 η 是一定的,鸟巢中外来蛋被发现的概率是 $p_a \in [0, 1]$ 。

基于以上 3 条准则,鸟巢位置更新方式表示为:

$$\mathbf{X}_g^{K+1} = \mathbf{X}_g^K + \alpha \oplus L(\lambda). \quad (16)$$

式中: \mathbf{X}_g^K 表示第 g ($g=1, 2, \dots, \eta$) 个鸟巢在第 K 代的位置, \oplus 为元素点乘, α 为步长因子, $L(\lambda)$ 为莱维飞行搜索步长,服从分布

$$L(\lambda) \sim z = K^{-\lambda}. \quad (17)$$

飞行步长 λ 定义为:

$$\lambda = \frac{z}{|v|^{1/\beta}}. \quad (18)$$

式中: z 和 v 为正态分布随机变量, $z \sim N(0, \sigma_z^2)$, $v \sim N(0, \sigma_v^2)$, $\beta=1.5$ 。

$$\sigma_z^2 = \left[\frac{\Gamma(1+\beta)}{\beta \Gamma(1+\beta)/2} \cdot \frac{\sin(\pi\beta/2)}{2^{(\beta-1)/2}} \right] 1/\beta, \quad \sigma_v = 1; \quad (19)$$

$$\Gamma_\alpha = \int_0^\infty K^{\alpha-1} e^{-K} dK. \quad (20)$$

式中: Γ_α 为伽马函数; K 为迭代次数。

综上所述,鸟巢位置更新公式可表示为:

$$\mathbf{X}_g^{K+1} = \mathbf{X}_g^K + \alpha_0 \frac{\sigma_u \times u^{\frac{1}{\beta}}}{|\nu|} (\mathbf{X}_q^K - \mathbf{X}_{\text{best}}^K) \quad (21)$$

式中: \mathbf{X}_g^{K+1} 为算法更新后得到的 $K+1$ 代解, \mathbf{X}_g^K 和 \mathbf{X}_q^K 是算法在 K 代生成的 2 个解, $\mathbf{X}_{\text{best}}^K$ 为算法在 K 代的最优解, α_0 为步长因子。

算法在根据发现概率 p_a 抛弃部分解后, 利用下式生成新解

$$\mathbf{X}_g^{K+1} = \mathbf{X}_g^K + \gamma (\mathbf{X}_q^K - \mathbf{X}_o^K) \quad (22)$$

式中: γ 为标准正态分布随机变量; \mathbf{X}_o^K 是算法在第 K 代产生的 1 个随机解。

2.4 边界条件识别过程

布谷鸟算法求解弹性力学边界条件反问题的步骤如下:

1) 给定所需的算法参数: 未知参数个数、鸟巢数量、发现概率、最大迭代次数等。

2) 用布谷鸟算法得到 η 组未知参数初始值, 计算每一组未知参数对应的适应度, 选出当前最优的一组参数及其对应的目标函数值。

3) 验算目标函数是否满足式(15)迭代停止条件, 如满足, 输出最优解并转到第 8 步, 否则转第 4 步。

4) 通过式(16)的 Lévy 游走生成新的鸟巢, 并根据对应的目标函数值选出当前最优鸟巢。

5) 按概率抛弃部分鸟巢, 并按照式(22)生成同样数量的新鸟巢。

6) 根据式(13)计算各鸟巢的目标函数值, 找出当前最好鸟巢。

7) 更新鸟巢, 返回第 3 步。

8) 利用得到的最优系数计算出 Γ_1 边界上的面力边界条件, 结合边界 Γ_2 上的已知位移边界条件, 代入正问题中计算得出边界 Γ_1 上的未知位移边界条件。

3 数值算例

利用 2 个数值算例验证布谷鸟算法联合多项式近似识别未知边界条件的有效性和准确性, 选用相对误差 e_t 和 e_u 表示反演结果的精度。

$$e_t = \frac{\|t^{(\text{num})} - t^{(\text{an})}\|}{\|t^{(\text{an})}\|}; \quad (23)$$

$$e_u = \frac{\|u^{(\text{num})} - u^{(\text{an})}\|}{\|u^{(\text{an})}\|} \quad (24)$$

式中: $t^{(\text{num})}$ 和 $u^{(\text{num})}$ 分别表示未知边界上反演得到的面力和位移边界条件数值解, $t^{(\text{an})}$ 和 $u^{(\text{an})}$ 为精确的面力和位移边界条件。

3.1 受单向拉伸方板

考虑一个 $[-2, 2] \times [-2, 2]$ 的受单向拉伸方板, 如图 2 所示。弹性模量 $E = 5.0 \text{ N/m}^2$, 泊松比 $\nu = 0.3$ 。边界 $\Gamma_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1 = -2, -2 \leq x_2 \leq 2\}$, 其余边界为 Γ_2 。整个边界划分为 16 个线性单元。精确的边界条件给定为:

$$\begin{cases} u_1^{(\text{an})}(x_1, x_2) = \frac{1}{E}x_1, u_2^{(\text{an})}(x_1, x_2) = -\frac{\nu}{E}x_2; \\ \sigma_{11}^{(\text{an})}(x_1, x_2) = \sigma_0, \sigma_{12}^{(\text{an})}(x_1, x_2) = \sigma_{22}^{(\text{an})}(x_1, x_2) = 0; \\ t_i^{(\text{an})}(x_1, x_2) = \sigma_{i1}^{(\text{an})}(x_1, x_2)n_1(x_1, x_2) + \sigma_{i2}^{(\text{an})}(x_1, x_2)n_2(x_1, x_2)。 \end{cases} \quad (25)$$

式中: $\sigma_0 = 2.0 \text{ N/m}^2$; $i = 1, 2$ 。已知的边界条件为: Γ_1 上边界条件全未知, Γ_2 上边界条件全已知。收敛条件为 $\epsilon = 1 \times 10^{-5}$, 最大迭代次数为 1 000。

3.1.1 鸟巢数量的影响

不考虑测量误差, 采用一阶多项式反演未知边界条件, 讨论鸟巢数量分别为 5, 10, 15, 20 时的计算结果。计算结果如表 1 所示。

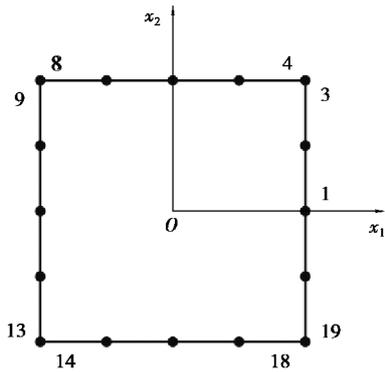


图 2 受单向拉伸方板

Fig. 2 Square plate under uniaxial tension

表 1 鸟巢数量对计算结果的影响

Table 1 Influence of nest number

鸟巢数量	迭代次数	相对误差 e_u	相对误差 e_t
5	501	8.22×10^{-5}	9.21×10^{-5}
10	260	3.91×10^{-5}	2.64×10^{-5}
15	252	4.37×10^{-5}	2.35×10^{-5}
20	240	3.24×10^{-5}	1.34×10^{-5}

由表 1 可知,随着鸟巢数量增加,反演结果精度提高,且所需迭代次数逐渐减少。鸟巢数取 20 时,所需迭代次数最少,获得的解精度最高。因此,为保证计算效率与精度,其余算例鸟巢数均取 20。

3.1.2 多项式近似对计算结果的影响

为了验证多项式近似对边界条件识别问题的有效性,考虑用布谷鸟算法直接识别未知边界条件。表 2 给出了布谷鸟算法在采用多项式近似和直接反演 2 种情况下计算结果的对比。考虑非多项式直接反演时待识别未知量多,布谷鸟算法识别难度较大,设置算法在非多项式识别时的最大迭代次数为 5 000。

表 2 多项式反演和直接反演的计算结果对比

Table 2 The comparison between polynomial inversion and direct inversion

	迭代次数	相对误差 e_u	相对误差 e_t
多项式	240	3.24×10^{-5}	1.34×10^{-5}
非多项式	5 000	9.77×10^{-3}	3.17×10^{-3}

由表 2 看出,算法在引入多项式函数近似未知面力边界条件后,反演结果精度提高,收敛速度也明显加快。因此对未知边界条件反演问题采用多项式近似方法,将获得更快的收敛速度和更高的计算精度。

3.1.3 多项式阶数的选取

多项式的阶数取值为 $m = 1, 2, 3$, 讨论不同多项式阶数对反演结果的影响。在整个待识别边界 Γ_1 上,横坐标 x_1 为常数,边界条件表达形式如下:

$$\begin{cases} t_i(x_2) = b_0 + b_2 x_2 & m = 1; \\ t_i(x_2) = b_0 + b_2 x_2 + b_5 x_2^2 & m = 2; \\ t_i(x_2) = b_0 + b_2 x_2 + b_5 x_2^2 + b_9 x_2^3 & m = 3. \end{cases} \quad (26)$$

表 3 给出了选用不同阶数多项式时布谷鸟算法的计算结果。

表 3 多项式阶数对 CS 计算结果的影响

Table 3 The results of CS with different polynomial degree

m	迭代次数	相对误差 e_u	相对误差 e_t
1	240	3.24×10^{-5}	1.34×10^{-5}
2	565	9.68×10^{-5}	5.86×10^{-5}
3	1 000	1.17×10^{-2}	7.09×10^{-3}

结果表明,随着多项式阶数 m 增加,计算结果误差变大,同时需要的迭代数也大幅增加。对于本例,待识别边界上面力值为常数,多项式阶数增加不能有效提高结果精度。在多项式阶数为 1 的情况下获得的结果足够精确。因此,为了保证算法能快速准确收敛,多项式阶数取 1。

3.1.4 测量误差的影响

在 1%、3%、5% 三种不同测量误差下进行边界条件识别,研究测量误差对反演结果的影响。待求面力边界条件和位移边界条件的数值解与解析解之间的对比结果如图 3 所示。

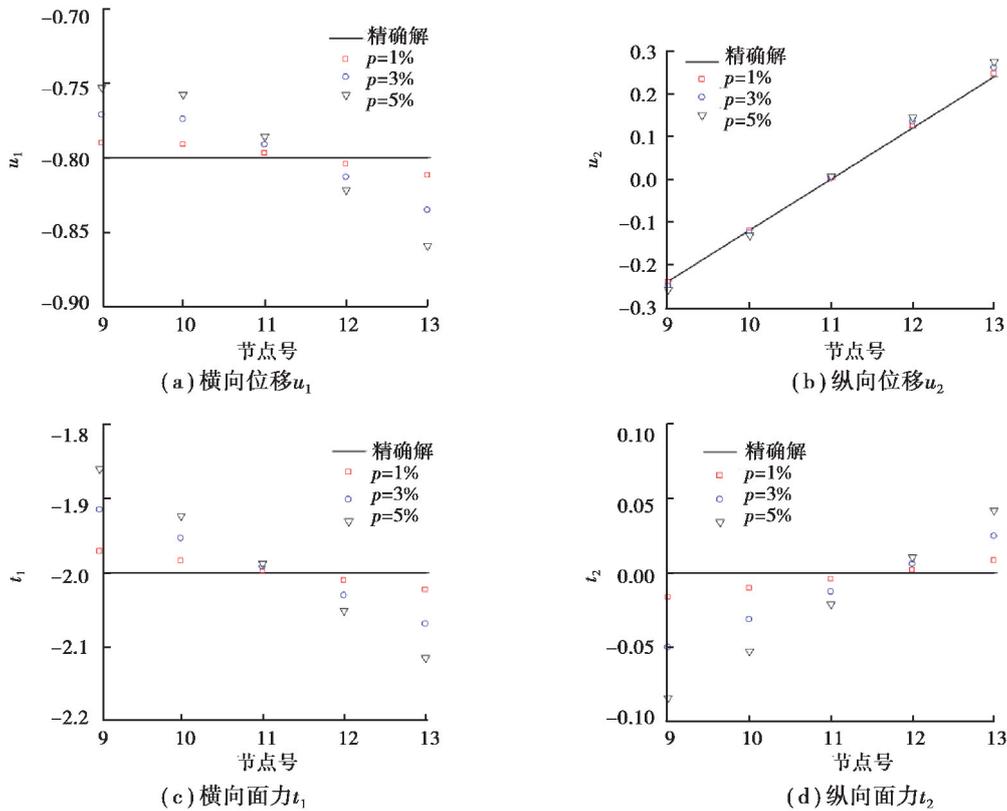


图 3 不同测量误差对反演结果的影响

Fig. 3 Inverse results with different measurement errors

待求位移边界条件的相对误差分别为 1.02×10^{-2} 、 3.02×10^{-2} 、 5.01×10^{-2} , 面力识别结果的相对误差分别为 9.21×10^{-3} 、 2.72×10^{-2} 、 4.49×10^{-2} 。在 3 种测量误差水平下的迭代次数分别为 300、313、352。不难看出,测量误差越大,反演精度越低,迭代次数也越多。

从图 3 可以看出,测量误差对反演结果的影响较大。在误差水平为 1% 时,反演值与真实值相差较小,随着测量误差增加,反演值与真实值偏差逐渐增大。

3.2 受内外均匀压力作用的厚壁圆筒

如图 4 所示,一厚壁圆筒受内外均匀压力作用,其边界由两部分组成: $\Gamma_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 10^2\}$ 和 $\Gamma_2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 25^2\}$ 。本问题的弹性模量 $G = 8\,000 \text{ N/m}^2$, 泊松比 $\nu = 0.2$ 。已知的边界条件为:边界 Γ_2 上,面力和位移全已知;边界 Γ_1 上,面力和位移均未知。外边界划分 56 个线性单元,内边界划分 40 个单元。收敛条件给定为 $\epsilon = 1 \times 10^{-4}$, 最大迭代次数取 5 000。边界条件解析解为:

$$\begin{cases} u_i^{(\text{an})} = \frac{-(1-\nu)}{2G(1+\nu)}\sigma_0 x_i; \\ \sigma_{ij}^{(\text{an})} = -\sigma_0 \delta_{ij}. \end{cases} \quad (27)$$

式中: $\sigma_0 = 100 \text{ N/m}^2$, $i = 1, 2$ 。

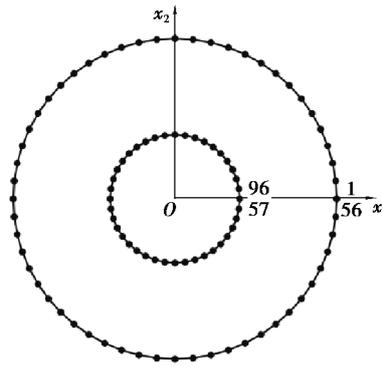


图 4 受均布压力作用的厚壁圆筒

Fig. 4 Thick-wall cylinder under uniform distribution pressure

3.2.1 多项式近似对计算结果的影响

本例待识别结点数为 40,故待识别面力分量数为 80,使用布谷鸟算法直接识别难度大,故考虑给出更大的容许迭代次数。在不使用多项式近似求解未知边界数值时,令最大迭代步数为 10 000。不考虑测量误差,表 4 给出了未采用多项式近似未知面力边界条件和采用多项式近似面力 2 种情况下的反演结果对比。

表 4 多项式反演和直接反演的计算结果对比

Table 4 The comparison between polynomial inversion and direct inversion

	迭代次数	相对误差 e_u	相对误差 e_t
多项式	293	7.80×10^{-6}	3.91×10^{-6}
非多项式	10 000	1.98×10^{-2}	5.99×10^{-2}

使用多项式近似方法识别未知边界条件,由于待识别参数少,所以通过较少的迭代就能得到精度满足需求的结果;而直接使用布谷鸟算法进行边界条件识别时,由于未知参数过多而使得计算结果精度较差。

3.2.2 多项式阶数的选取

合适的多项式阶数有利于反演过程的进行。与算例 3.1 不同,此例边界 Γ_1 上的横坐标 x_1 是变化的,所以采用如式(28)的多项式进行未知面力边界条件近似。表 5 给出了采用不同阶数的多项式函数时布谷鸟算法的反演结果误差。

$$\begin{cases} t_i(x_1, x_2) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 & m = 1; \\ t_i(x_1, x_2) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2 + b_5x_2^2 & m = 2; \\ t_i(x_1, x_2) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2 + b_5x_2^2 + b_6x_1^3 + b_7x_1^2x_2 + b_8x_1x_2^2 + b_9x_2^3 & m = 3. \end{cases} \quad (28)$$

表 5 多项式阶数对 CS 算法结果的影响

Table 5 The results of CS with different polynomial degree

m	迭代次数	相对误差 e_u	相对误差 e_t
1	293	7.80×10^{-6}	3.91×10^{-6}
2	2 216	1.77×10^{-5}	1.83×10^{-5}
3	5 000	3.93×10^{-3}	6.89×10^{-3}

由表 5 可以看出,在 3 种不同多项式阶数情况下,随着多项式阶数 m 增加,相对误差 e_u 和 e_t 增大,数值结果逐渐偏离精确解。迭代次数随多项式阶数升高而增加,在多项式阶数为 3 时,即使迭代至最大迭代次

数,计算结果仍无法令人满意。由此可知,多项式阶数的选取对反演结果有显著的影响。对于本例,由于所受荷载均匀分布在区域表面,与坐标值呈简单线性变化关系,故仅需一阶多项式即可获得足够精度的数值解。为了保证算法的准确性和计算效率,多项式阶数取 1。

3.2.3 测量误差的影响

考虑不同测量误差对反演结果的影响,待识别边界条件反演值与精确解之间的对比结果如图 5 所示。

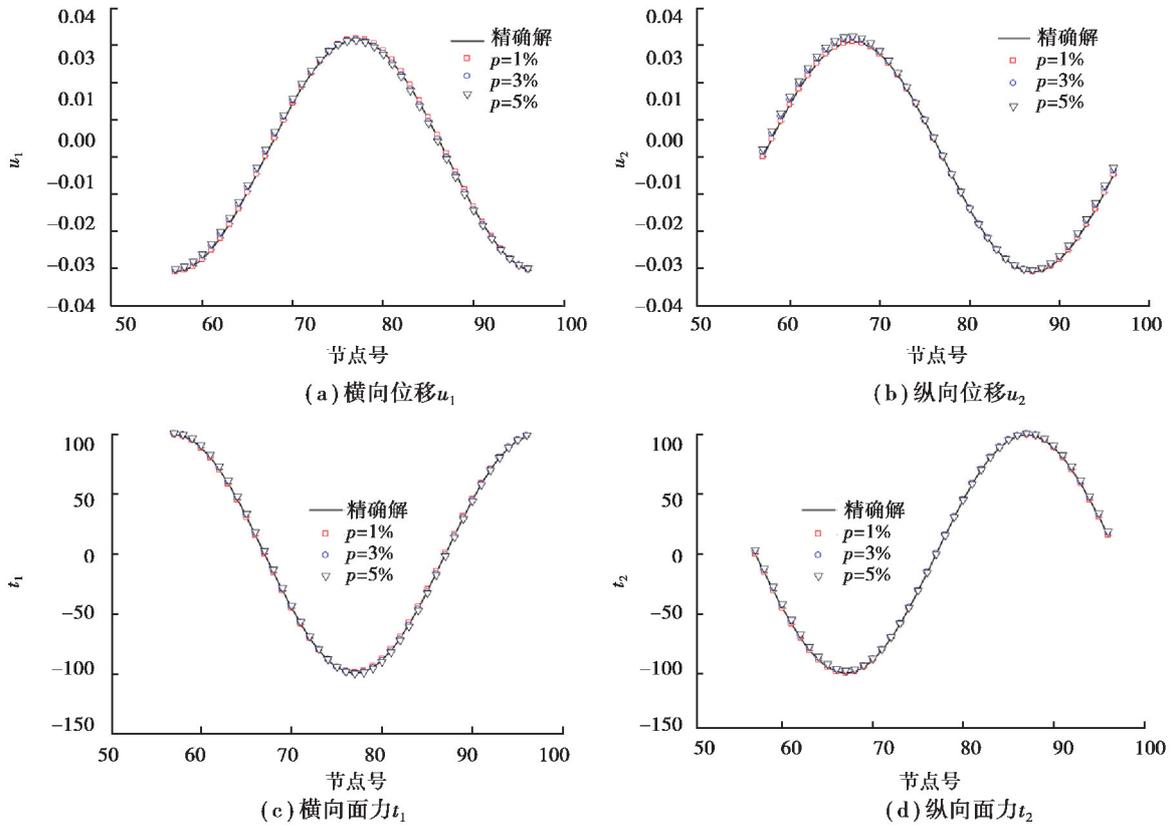


图 5 不同测量误差对反演结果的影响

Fig. 5 Inverse results with different measurement errors

测量误差水平为 1%、3% 和 5% 时,位移边界条件识别结果的计算误差分别为 6.20×10^{-3} 、 1.61×10^{-2} 、 2.63×10^{-2} ,面力反演结果的相对误差分别为 3.44×10^{-3} 、 8.55×10^{-3} 、 1.40×10^{-2} ,迭代次数分别为 320、392、500。测量误差增加会降低计算结果的精度,随着测量误差增加,迭代次数也随之增加。

4 结 论

笔者将布谷鸟搜索算法应用于弹性力学 Cauchy 边界条件反问题求解,并引入了多项式函数近似未知边界条件的方法。采用布谷鸟算法最小化已知边界上面力的计算值和给定值之间的差异,实现对未知边界上的面力边界条件的反演,并利用边界元法求解弹性力学正问题得到未知位移。通过对比未使用多项式和使用多项式近似的计算结果,验证了将未知面力边界条件进行多项式近似是一种求解 Cauchy 边界条件反问题的更加快速准确的方法。在布谷鸟算法识别过程中,进一步讨论了鸟巢数量、多项式阶数和测量误差对数值结果的影响。研究表明:鸟巢数量增加,识别精度提高;多项式阶数增加,数值结果精度下降;随着测量误差增大,反演结果误差变大并且所需迭代次数增多。因此,选择合适的鸟巢数量、多项式阶数并减少测量误差可获得更加准确的反演结果。算例验证了基于多项式近似的布谷鸟算法能准确有效地反演弹性力学边界条件。

参考文献:

- [1] 姜弘道. 弹性力学问题的边界元法[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2008.
JIANG Hongdao. Boundary element method for elasticity problems [M]. Beijing: China Water Power Press, 2008. (in Chinese)
- [2] Marin L, Hào D N, Lesnic D. Conjugate gradient-boundary element method for the Cauchy problem in elasticity[J]. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 2002, 55(2): 227-247.
- [3] Li P W, Fu Z J, Gu Y, et al. The generalized finite difference method for the inverse Cauchy problem in two-dimensional isotropic linear elasticity[J]. International Journal of Solids and Structures, 2019, 174/175: 69-84.
- [4] El Seblani Y, Shivanian E. Boundary value identification of inverse Cauchy problems in arbitrary plane domain through meshless radial point Hermite interpolation[J/OL]. Engineering with Computers, 2019-04-29 [2019-12-05]. <https://doi.org/10.1007/s00366-019-00755-8>.
- [5] Marin L, Delvare F, Cimetière A. Fading regularization MFS algorithm for inverse boundary value problems in two-dimensional linear elasticity[J]. International Journal of Solids and Structures, 2016, 78/79: 9-20.
- [6] Grigor'ev Y. An analytical method for the inverse Cauchy problem of Lamé equation in a rectangle[J/OL]. Journal of Physics: Conference Series, 2018, 991: 012029 [2019-12-05]. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/991/1/012029/pdf>. DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012029.
- [7] Yang F, Fu C L, Li X X. A modified Tikhonov regularization method for the cauchy problem of Laplace equation[J]. Acta Mathematica Scientia, 2015, 35(6): 1339-1348.
- [8] Liu C S, Wang F J, Gu Y. A Trefftz/MFS mixed-type method to solve the Cauchy problem of the Laplace equation[J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 87: 87-92.
- [9] Wang F J, Fan C M, Hua Q S, et al. Localized MFS for the inverse Cauchy problems of two-dimensional Laplace and biharmonic equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 364: 124658.
- [10] 周焕林, 江伟, 胡豪, 等. 二维弹性力学边界条件反识别 TSVD 正则化法[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2013, 36(9): 1076-1081.
ZHOU Huanlin, JIANG Wei, HU Hao, et al. Inverse identification of 2-D elasticity boundary conditions by using TSVD regularization method[J]. Journal of Hefei University of Technology(Natural Science), 2013, 36(9): 1076-1081. (in Chinese)
- [11] Khodadad M, Ardakani M D. Inclusion identification by inverse application of boundary element method, genetic algorithm and conjugate gradient method[J]. American Journal of Applied Sciences, 2008, 5(9): 1158-1166.
- [12] Tian N, Zhu L C, Lai C H. Identification of boundary shape using a hybrid approach[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2015, 6(3): 385-397.
- [13] Yang X S, Deb S. Cuckoo search via lévy flights[C]//2009 World Congress on Nature & Biologically Inspired Computing (NaBIC), December 9-11, 2009, Coimbatore, India. IEEE, 2009: 210-214.
- [14] 严俊, 周焕林, 余波, 等. 基于改进布谷鸟算法的导热系数反演[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2018, 41(12): 1667-1671, 1677.
YAN Jun, ZHOU Huanlin, YU Bo, et al. Inversion of thermal conductivity based on improved cuckoo search algorithm[J]. Journal of Hefei University of Technology(Natural Science), 2018, 41(12): 1667-1671, 1677. (in Chinese)
- [15] Naumann D S, Evans B, Walton S, et al. A novel implementation of computational aerodynamic shape optimisation using modified cuckoo search[J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40(7/8): 4543-4559.
- [16] Kaveh A, Bakhshpoori T, Azimi M. Seismic optimal design of 3D steel frames using cuckoo search algorithm[J]. The Structural Design of Tall and Special Buildings, 2015, 24(3): 210-227.
- [17] Walton S, Hassan O, Morgan K. Selected engineering applications of gradient free optimisation using cuckoo search and proper orthogonal decomposition[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2013, 20(2): 123-154.