

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2020.107

# 基于傅里叶逆变换的三维随机路面建模与仿真

余 贵<sup>1,2</sup>, 周兴林<sup>1</sup>, 董菊明<sup>2</sup>, 董泽蛟<sup>3</sup>

(1. 武汉科技大学 机械自动化学院, 武汉 430081; 2. 黄冈师范学院 机电与汽车工程学院, 湖北 黄冈 438000;  
3. 哈尔滨工业大学 交通科学与工程学院, 哈尔滨 150090)

**摘要:** 为了满足工程中虚拟实验的需求, 研究了利用功率谱密度函数的三维随机路面不平度建模方法。利用国家标准中采用的幂函数道路谱拟合公式, 推导出路面的二维功率谱解析表达式, 避免了有理函数法的参数估计问题。建立了二维傅里叶逆变换法生成三维随机路面的流程; 并以某汽车振动系统所关注性能需求, 仿真了国标中的 E 级路面; 分别采用周期图法和 AR 参数模型法估计了仿真路面的功率谱。结果表明, 仿真生成的路面与标准路面谱是高度一致的, 基于二维离散傅里叶逆变换的方法不仅准确而且快速, 有较强的实用性。

**关键词:** 路面不平度; 傅里叶逆变换; 功率谱密度; 随机路面; 路面仿真

中图分类号: U461.51

文献标志码: A

文章编号: 1000-582X(2020)10-062-08

## Modeling and simulation of 3D stochastic pavement based on inverse Fourier transform

YU Gui<sup>1,2</sup>, ZHOU Xinglin<sup>1</sup>, DONG Juming<sup>2</sup>, DONG Zejiao<sup>3</sup>

(1. School of Machinery and Automation, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, P. R. China; 2. School of Electromechanical and Automobile Engineering, Huanggang Normal University, Huanggang, Hubei 438000, P. R. China; 3. School of Transportation Science and Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150090, P. R. China)

**Abstract:** In order to meet the needs of virtual experiment in engineering, a 3D stochastic road roughness modeling method using power spectral density function is studied. By using the road spectrum fitting formula of power function adopted in the national standard, the analytical expression of two-dimensional power spectrum of road surface is derived, which avoids the parameter estimation problem of rational function method. The process of generating 3D stochastic pavement by two-dimensional inverse Fourier transform is established, and the E-grade pavement in the national standard is simulated by the performance requirements of a certain automobile vibration system. The power spectrum of the simulated pavement is estimated by using periodogram method and AR parameter model method respectively. The estimated results show that the simulated pavement spectrum is highly consistent with the standard

收稿日期: 2019-10-23 网络出版日期: 2020-06-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(51778509, 51827812); 湖北省自然科学基金项目(2018CFB293)。

Supported by the National Natural Science Foundation of China (51778509, and 51827812), and the Natural Science Foundation of Hubei Province (2018CFB293).

作者简介: 余贵(1981—), 男, 博士研究生, 主要从事车辆与道路智能检测技术研究, (E-mail) yugui81@foxmail.com。

通讯作者: 周兴林, 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为先进检测技术与应用、交通信息与控制系统等, (E-mail) zxl65@163.com。

pavement spectrum. The method based on two-dimensional inverse discrete Fourier transform is not only accurate and fast, but also has strong practicability.

**Keywords:** road roughness; inverse Fourier transform; power spectrum density; stochastic pavement; pavement simulation

路面不平度指的是道路表面对于理想平面的偏离,是车辆行驶过程中的主要激励振源,具有影响车辆动力性能、行驶质量和路面动力载荷三者的数值特征,是车辆的平顺性和耐久性分析中必须考虑的重要因素,因此建立准确的路面模型对车辆设计和性能评估有积极的意义。

路面不平度可利用两种方法得到:一种是通过测量真实路面得到;另一种是采用数值模拟的方法,将路面不平度功率谱密度转换成随机路面不平度,此法非常适用于标准化道路的模拟。关于路面不平度,中国标准 GB/T 7031—2005《机械振动 道路路面路面谱测量数据报告》<sup>[1]</sup>给出了 A~H 共 8 个道路等级的不平度值,其平均值可以用于道路仿真。

关于一维路面不平度的模拟仿真,比较典型的方法有谐波叠加法(三角级数法)<sup>[2-6]</sup>、滤波白噪声模型<sup>[7-8]</sup>、一维逆傅里叶变换法<sup>[9-10]</sup>和基于时间序列分析的 AR 模型<sup>[11-12]</sup>。彭佳等<sup>[13]</sup>比较了 4 种建模方法,认为逆傅里叶变换法速度快、适用性强、理论严密,在非特定要求情况下是较为理想的方法。

实际轮胎具有宽度,所以轮胎不仅有纵向包络,也存在侧向包络,因此需要把一维路面不平度模拟仿真向二维扩展,以便适应三维的轮胎模型。

三维随机路面的研究中,吴参等<sup>[14]</sup>采用谐波叠加法建立了三维随机道路模型,彭佳等<sup>[15]</sup>采用了本质上与谐波叠加法相同的方法,这两种方法均需要大量的三角函数运算,计算速度较慢。夏均忠等<sup>[16]</sup>指出路面功率谱密度的表现形式有幂函数和有理函数两种构造,两者在本质上是一致的。唐光武等<sup>[17]</sup>把路面的有理函数功率谱函数拓展到二维,得到各向同性的二维功率谱,进而利用二维 AR 模型仿真得到三维随机路面。但采用有理函数功率谱需要确定与路面等级有关的功率谱的参数。罗竹辉等<sup>[18]</sup>采用了这种有理函数二维功率谱模型,计算了 A~H 级路面对应的功率谱参数,然后通过二维傅里叶逆变换,建立了三维随机路面。

为避免文献<sup>[18]</sup>中的参数估计,笔者直接采用中国标准中的幂函数功率谱函数进行拓展,并且根据二维傅里叶逆变换生成三维随机路面,可以使用成熟快速的 FFT(Fast Fourier Transform,快速傅里叶变换)算法。

## 1 路面不平度的标准路面谱

路面不平度表示道路表面对于理想平面的偏离,可以看作是各态历经的平稳随机过程,中国标准<sup>[1]</sup>按照功率谱密度将路面不平度分为 A~H 共 8 个等级。

### 1.1 路面不平度的一维功率谱密度

中国标准<sup>[1]</sup>采用式(1)拟合路面纵断面高程位移功率谱:

$$G_d(n) = G_d(n_0) \left( \frac{n}{n_0} \right)^{-\omega} \quad (1)$$

式中: $n$  为空间频率,即波长的倒数,单位为  $\text{m}^{-1}$ ;  $n_0$  为参考空间频率,取值为  $0.1 \text{ m}^{-1}$ ;  $G_d(n_0)$  为路面不平度系数,单位为  $\text{m}^3$ ,不同等级的路面有不同的不平度系数; $\omega$  为频率指数,取 2,为功率谱密度双对数坐标图下的斜率; $G_d(n)$  为功率谱密度,单位为  $\text{m}^3$ 。

由于  $G_d(n)$  为单边谱密度,计算时常用的是双边谱,令其对应的双边谱密度为  $S_d(n)$ ,由于  $S_d(n)$  为偶函数,有  $S_d(n) = G_d(n)/2$ ,所以进一步简化式(1)为:

$$S_d(n) = \frac{a}{n^2}, \quad (2)$$

式中  $a = G_d(n_0)n_0^2/2$ 。

## 1.2 路面不平度的二维功率谱密度

为了得到三维随机路面, 需要把路面的功率谱密度扩展到二维。根据 Wiener-Khinchin 定理, 宽平稳随机过程的功率谱密度函数是自相关函数的傅里叶变换。因此对式(2)进行傅里叶逆变换, 可以得到路面的一维自相关函数  $R(x)$ 。通过查表可得

$$R(x) = -2\pi^2 a |x|, \quad (3)$$

式中  $x$  表示波长, 单位为 m。

根据二维各向同性随机场的性质, 可以把路面一维自相关函数  $R(x)$  扩展到二维, 得到二维路面的自相关函数  $R(x_1, x_2)$ :

$$R(x_1, x_2) = R(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) = -2\pi^2 a \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (4)$$

式中  $x_1$  和  $x_2$  分别为两个维度方向的波长, 单位为 m。

反过来对式(4)进行二维傅里叶变换, 即可得到路面的二维功率谱密度。由于  $R(x_1, x_2)$  是径向对称函数, 所以经过二维傅里叶变换后, 其对应的二维功率谱密度函数  $S_d(n_1, n_2)$  也同样是径向对称的, 即

$$S_d(n_1, n_2) = S_d(\sqrt{n_1^2 + n_2^2}), \quad (5)$$

式中  $n_1$  和  $n_2$  为空间频率, 单位为  $\text{m}^{-1}$ 。

令  $x_1 = r \cos\theta, x_2 = r \sin\theta$ , 这里  $r$  为极坐标下的半径,  $\theta$  为极角, 代入式(4)中得到

$$R(r) = -2\pi^2 ar. \quad (6)$$

这样求  $R(x_1, x_2)$  的二维傅里叶变换等同于求  $R(r)$  的一维 Hankel 变换。查变换表得到

$$S_d(\rho) = \frac{a}{2\rho^3}. \quad (7)$$

把  $a = G_d(n_0)n_0^2/2, \rho = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$  代入式(7), 并联合式(5)得到路面二维功率谱密度函数:

$$S_d(n_1, n_2) = \frac{G_d(n_0)n_0^2}{4(n_1^2 + n_2^2)^{3/2}}. \quad (8)$$

## 2 三维随机路面模型

计算机处理的只是有限的、离散化的数据, 因此需要建立起三维随机路面连续模型与离散模型之间的联系。

### 2.1 三维随机路面连续模型

令  $f(x_1, x_2)$  为三维路面上坐标点  $(x_1, x_2)$  处路面相对于理想参考面的高程。  $f(x_1, x_2)$  的二维傅里叶变换  $F(n_1, n_2)$  的表达式为:

$$F(n_1, n_2) = \lim_{\substack{L_1 \rightarrow \infty \\ L_2 \rightarrow \infty}} \int_{-\frac{L_1}{2}}^{\frac{L_1}{2}} \int_{-\frac{L_2}{2}}^{\frac{L_2}{2}} f(x_1, x_2) e^{-j2\pi(x_1 n_1 + x_2 n_2)} dx_1 dx_2, \quad (9)$$

式中:  $L_1, L_2$  为两个正交方向上路面长度;  $j$  为虚数单位。

根据功率谱密度函数的定义, 路面二维功率谱密度函数为

$$S(n_1, n_2) = \lim_{\substack{L_1 \rightarrow \infty \\ L_2 \rightarrow \infty}} \frac{1}{L_1 L_2} |F(n_1, n_2)|^2. \quad (10)$$

### 2.2 三维随机路面连续模型离散化

实际路面不平度是建立在有限采样点基础之上的。因此  $L_1, L_2$  为有限值。令两正交方向上的采样间隔分别为  $\Delta x_1, \Delta x_2$ , 采样点数分别为  $M_1, M_2$ , 则三维路面的离散高程值为

$$f[m_1, m_2] = f(m_1 \Delta x_1, m_2 \Delta x_2), \quad (11)$$

式中:  $m_1 = 0, 1, 2, \dots, M_1; m_2 = 0, 1, 2, \dots, M_2 - 1$ 。

令两个正交方向上的空间频率采样间隔分别为  $\Delta n_1 = 1/L_1, \Delta n_2 = 1/L_2$ , 则离散的二维空间频率傅里叶变换值为

$$F[p, q] = F(p \Delta n_1, q \Delta n_2)。 \quad (12)$$

式中:  $p=0, 1, 2, \dots, M_1; q=0, 1, 2, \dots, M_2-1$ 。

同样,离散化的功率谱密度函数为

$$S[p, q] = S(p \Delta n_1, q \Delta n_2)。 \quad (13)$$

根据以上假设,式(9)的离散表达式为

$$F[p, q] = \Delta x_1 \Delta x_2 \sum_{m_1=0}^{M_1-1} \sum_{m_2=0}^{M_2-1} f[m_1, m_2] e^{-j2\pi(\frac{p}{M_1}m_1 + \frac{q}{M_2}m_2)}。 \quad (14)$$

式(10)的离散表达式为

$$S[p, q] = \frac{1}{L_1 L_2} |F[p, q]|^2, \quad (15)$$

式中:  $L_1 = (M_1 - 1)\Delta x_1; L_2 = (M_2 - 1)\Delta x_2$ 。

### 3 三维随机路面不平度建立流程

#### 3.1 用二维离散功率谱生成二维离散傅里叶变换

根据信号分析理论,  $f[m_1, m_2]$  的二维离散傅里叶变换  $H[p, q]$  的表达式为

$$H[p, q] = \sum_{m_1=0}^{M_1-1} \sum_{m_2=0}^{M_2-1} f[m_1, m_2] e^{-j2\pi(\frac{p}{M_1}m_1 + \frac{q}{M_2}m_2)}。 \quad (16)$$

因此,根据式(14)和式(16)有

$$F[p, q] = \Delta x_1 \Delta x_2 H[p, q]。 \quad (17)$$

根据式(15)和式(17)有

$$S[p, q] = \frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{(M_1 - 1)(M_2 - 1)} |H[p, q]|^2。 \quad (18)$$

因此

$$|H[p, q]| = \sqrt{\frac{(M_1 - 1)(M_2 - 1)}{\Delta x_1 \Delta x_2} S[p, q]}。 \quad (19)$$

通过式(19)得到  $f[m_1, m_2]$  的二维离散傅里叶变换的模值  $|H[p, q]|$ 。令  $H[p, q]$  的相角为  $\varphi[p, q]$ , 则

$$H[p, q] = |H[p, q]| e^{j\varphi[p, q]}。 \quad (20)$$

由于路面不平度是一个平稳随机过程,可令  $\varphi[p, q]$  为  $[0, 2\pi)$  内的随机数。

#### 3.2 利用二维离散傅里叶逆变换生成三维随机路面

三维随机路面的离散高程值  $f[m_1, m_2]$  通过二维离散傅里叶逆变换得到:

$$f[m_1, m_2] = \frac{1}{M_1 M_2} \sum_{p=0}^{M_1-1} \sum_{q=0}^{M_2-1} H[p, q] e^{j2\pi(\frac{p}{M_1}m_1 + \frac{q}{M_2}m_2)}。 \quad (21)$$

#### 3.3 建立三维随机路面不平度的步骤概述

根据上面的推导可知,通过二维离散傅里叶逆变换可以建立三维随机路面。该方法的步骤如下。

**步骤 1:** 对路面功率谱进行采样,得到离散的功率谱密度值  $S[p, q]$ 。当路面功率谱为标准谱时,用标准功率谱  $S_d$  替代  $S$ ;

**步骤 2:** 用式(19)得到二维离散傅里叶变换的模值  $|H[p, q]|$ ;

**步骤 3:** 生成随机相位,并用式(20)得到  $H[p, q]$ ;

**步骤 4:** 最后用式(21)得到路面离散高程值  $f[m_1, m_2]$ , 这里可采用成熟快速的 FFT 算法。

计算过程中,由于  $f[m_1, m_2]$  的值为实数,所以其二维离散傅里叶变换系数  $H[p, q]$  组成的矩阵为共轭对称矩阵,因此编码时应先计算非共轭单元和一半的共轭单元,然后通过共轭运算填充另一半的共轭单元。

## 4 仿真算例

### 4.1 仿真路面生成

路面对轮胎激振频率为  $f=vn$ , 其中  $v$  为车辆速度, 单位为  $\text{m/s}$ ,  $n$  为路面不平度的空间频率, 单位为  $\text{m}^{-1}$ 。根据轮胎与道路激励的时间频率范围  $[f_L, f_H]$ , 得出路面不平度功率谱密度的有效空间频率范围  $[n_L, n_H]$ 。

根据式(8), 路面功率谱密度函数的取值如下面的分段函数所示。

$$S[p, q] = \begin{cases} \frac{G_d(n_0)n_0^2}{4(n_p^2 + n_q^2)^{3/2}}, & n_L \leq |n_p| \leq n_H, n_L \leq |n_q| \leq n_H; \\ 0, & \text{其他情况。} \end{cases}$$

利用得到的  $S[p, q]$  用式(19)~(21)计算得到三维路面的离散高程值  $f[m_1, m_2]$ 。

常见车速一般为  $36 \sim 180 \text{ km/h}$  (即  $10 \sim 50 \text{ m/s}$ )。一般而言对于汽车振动系统, 取  $f_L = 0.5 \text{ Hz}$ ,  $f_H = 30 \text{ Hz}$  可满足实际需要<sup>[4]</sup>。对应的空间频率为:

$$n_L = \frac{f_L}{v_{\max}} = 0.01 \text{ m}^{-1};$$

$$n_H = \frac{f_H}{v_{\min}} = 3 \text{ m}^{-1}.$$

因此只需在  $0.01 \sim 3 \text{ m}^{-1}$  的空间频率范围内模拟路面不平度, 就足以覆盖车辆振动系统固有频率范围, 这就保证了利用仿真路面所得到的相关结论符合该车辆真实情况。

为使空间频率的下限准确, 也为了避免频率混叠, 应当满足

$$\max(\Delta x_1, \Delta x_2) \leq \frac{1}{2n_H} = 0.1667 \text{ m}$$

$$\min(L_1, L_2) \geq \frac{1}{n_L} = 100 \text{ m}$$

在本例中, 采样间隔  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.1 \text{ m}$ ,  $L_1 = L_2 = 409.5 \text{ m}$ 。因此 2 个方向上的采样点数  $M_1 = M_2 = 4096$ 。空间频率分辨率为  $\Delta n_1 = \Delta n_2 = 1/L_1 = 1/L_2 = 0.00244 \text{ m}^{-1}$ 。

据统计中国高等级公路基本属于 A~C 等级, 对较差路面的研究更能切合实际应用的需要。

对 E 级路面的不平度系数  $G_d(n_0)$  取几何平均值  $4096 \text{ mm}^2/\text{m}^{-1}$ 。其他变量的意义及取值参考前面的叙述。仿真得到的 E 级三维路面和切面高程分别见图 1~2。

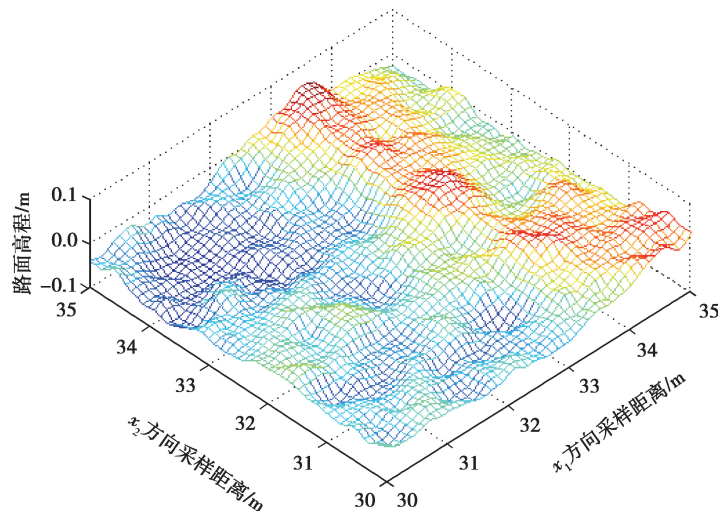


图 1 E 级三维路面模拟(片段)

Fig. 1 Simulation of Grade E pavement (fragment)

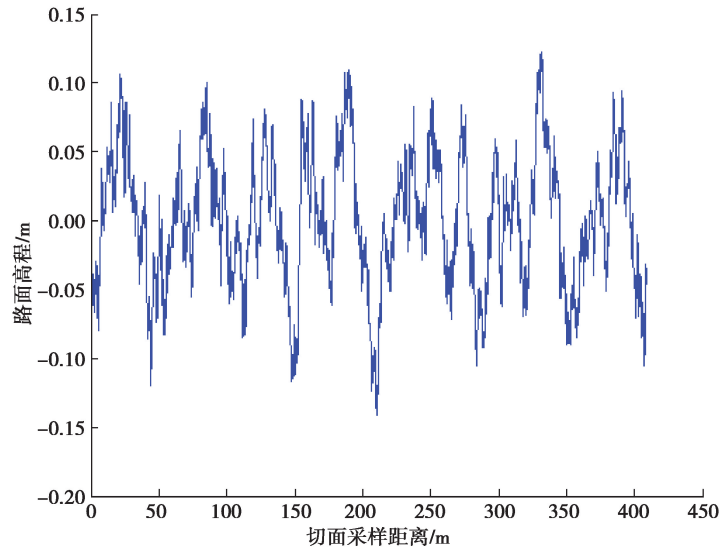


图 2 模拟路面中某一切面的道路高程

Fig. 2 Simulating road roughness of a section in pavement

#### 4.2 仿真结果分析讨论

利用标准路面谱生成模拟路面后,对生成的路面进行评估,分析模拟路面的功率谱与标准路面谱的接近程度。这里分别采用经典的周期图法和现代 AR 参数模型进行功率谱估计。

采用周期图法估计的功率谱(图 3)得到的仿真结果与理论一致。其谱线的分辨率较高,但离散性较大,数据波动明显,方差较大,尤其是高频处曲线比较粗糙,信息非常丰富。

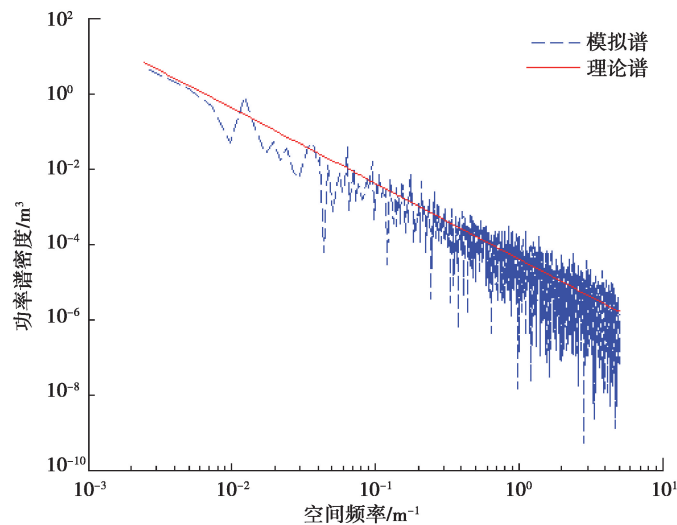


图 3 周期图法估计的功率谱密度

Fig. 3 Power spectrum density estimated by periodogram method

利用 AR 参数模型估计功率谱,采用公认较好的 Burg 方法。参数模型估计功率谱需要先定出模型的阶数。图 4 中计算的反射系数表明,模型在高于 3 阶时其均方误差之和已没有太大的变化,因此 AR 模型可以取阶数为 4 阶。

图 5 中 AR 参数模型估计功率谱与理论谱非常吻合,曲线明显比经典谱估计方法光滑,其处理结果的方差比经典谱估计方法的小。

无论是采用经典周期图法谱估计,还是现代 AR 参数模型谱估计,估计的结果表明仿真模拟的路面与标准路面的理论谱是高度一致的,证明本研究中的方法是有效和适用的。



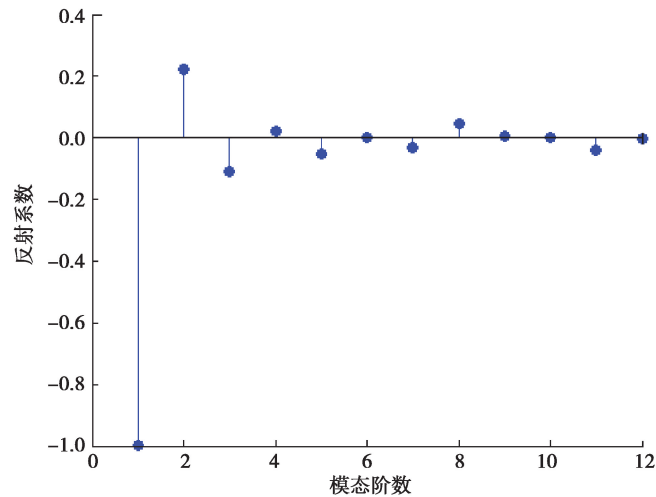


图 4 利用反射系数确定 AR 模型阶数

Fig. 4 AR model order determined by reflection coefficient

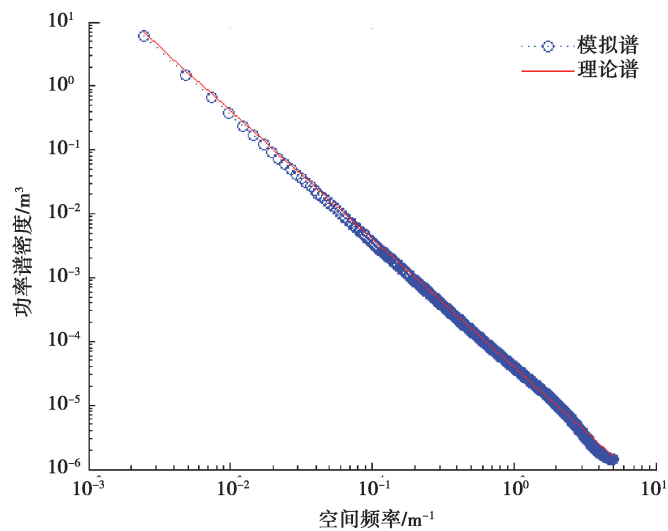


图 5 AR 参数模型估计的功率谱密度

Fig. 5 Power spectrum density estimated by AR parametric model

## 5 结 语

笔者把一维逆傅里叶变换法生成随机路面拓展到二维,以生成三维随机路面。利用国家标准中采用的幂函数法路面谱拟合公式,推导并得出幂函数法表示的标准路面二维功率谱解析表达式,避免了有理函数法中的参数估计问题。建立了二维傅里叶逆变换法生成三维随机路面的流程。该方法可以直接使用成熟快速的 FFT 算法。以某汽车振动系统所关注性能需求,仿真了中国标准中的 E 级路面。分别采用周期图法和 AR 参数模型法估计了仿真生成路面的功率谱,两种方法估计的结果表明仿真模拟的路面与标准路面谱是高度一致的。

### 参考文献:

[1] 中华人民共和国国家质量监督检验检疫总局. 机械振动 道路路面谱测量数据报告: GB/T 7031-2005 [S]. 北京: 中国标准出版社, 2005.

General Administration of Quality Supervision, Inspection and Quarantine of the People's Republic of China. Mechanical vibration-road surface profiles-reporting of measured data: GB/T 7031-2005 [S]. Beijing: China Standard Press, 2005. (in Chinese)

- [ 2 ] Au F T K, Cheng Y S, Cheung Y K. Effects of random road surface roughness and long-term deflection of prestressed concrete girder and cable-stayed bridges on impact due to moving vehicles[J]. Computers & Structures, 2001, 79(8): 853-872.
- [ 3 ] Schiehlen W, Hu B. Spectral simulation and shock absorber identification [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2003, 38(2): 161-171.
- [ 4 ] Grigoriu M. On the spectral representation method in simulation[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1993, 8(2): 75-90.
- [ 5 ] Zhang Y L. Time domain model of road irregularities simulated using the harmony superposition method[J]. Transactions of The Chinese Society of Agricultural Engineering, 2003, 19(6): 32-35.
- [ 6 ] Wang X, Zhao J B, Wang J Z. An improved road roughness simulation method based on trigonometric series method [J]. Applied Mechanics and Materials, 2014, 513/514/515/516/517: 3277-3282.
- [ 7 ] Zhang Y L, Zhang J F. Numerical simulation of stochastic road process using white noise filtration[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2006, 20(2): 363-372.
- [ 8 ] Heath A N. Application of the isotropic road roughness assumption[J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, 115(1): 131-144.
- [ 9 ] 刘献栋, 邓志党, 高峰. 基于逆变换的路面不平度仿真研究[J]. 中国公路学报, 2005, 18(1): 122-126.  
LIU Xiandong, DENG Zhidang, GAO Feng. Study of simulation of road roughness based on inverse transform[J]. China Journal of Highway and Transport, 2005, 18(1): 122-126.(in Chinese)
- [10] 张亚欧, 马吉盛, 吴大林, 等. 基于 Fourier 逆变换法的路面不平度模拟[J]. 河北工业大学学报, 2005, 34(6): 66-69.  
ZHANG Yaou, MA Jisheng, WU Dalin, et al. Modeling and simulation of road roughness based on the method of reverse Fourier[J]. Journal of Hebei University of Technology, 2005, 34(6): 66-69.(in Chinese)
- [11] 张永林, 李诗龙, 杨建林. 汽车道路随机不平顺的时序模型重构[J]. 武汉理工大学学报(交通科学与工程版), 2005, 29(6): 883-886.  
ZHANG Yonglin, LI Shilong, YANG Jianlin. Time series model regeneration of random road undulation input to vehicles [J]. Journal of Wuhan University of Technology (Transportation Science & Engineering), 2005, 29(6): 883-886.(in Chinese)
- [12] 朱茂桃, 刘建, 王国林. 路面不平度重构的 AR 模型阶数确定方法研究[J]. 公路交通科技, 2010, 27(7): 25-28, 51.  
ZHU Maotao, LIU Jian, WANG Guolin. Research on method of determining order of AR model for road roughness reconstruction[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2010, 27(7): 25-28, 51.(in Chinese)
- [13] 彭佳, 何杰, 李旭宏, 等. 路面不平度随机激励时域模型的仿真比较与评价[J]. 解放军理工大学学报(自然科学版), 2009, 10(1): 77-82.  
PENG Jia, HE Jie, LI Xuhong, et al. Simulation comparison and evaluation of common time domain models under road irregularity excitation[J]. Journal of PLA University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2009, 10(1): 77-82.(in Chinese)
- [14] 吴参, 王维锐, 陈颖, 等. 三维路面谱的仿真建模与验证[J]. 浙江大学学报(工学版), 2009(10): 1935-1938.  
WU Can, WANG Weirui, CHEN Ying, et al. Simulation and validation of three-dimensional road surface spectrum [J]. Journal of Zhejiang University(Engineering Science), 2009(10): 1935-1938.(in Chinese)
- [15] 彭佳, 何杰, 丛颖, 等. 三维随机路面通用模型建立与仿真[J]. 农业机械学报, 2009, 40(3): 1-4, 25.  
PENG Jia, HE Jie, CONG Ying, et al. Modeling and simulation of general 3D virtual stochastic road model [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(3): 1-4, 25.(in Chinese)
- [16] 夏均忠, 马宗坡, 白云川, 等. 路面不平度激励模型研究现状[J]. 噪声与振动控制, 2012, 32(5): 1-5, 41.  
XIA Junzhong, MA Zongpo, BAI Yunchuan, et al. State of the research on model for road roughness excitation[J]. Noise and Vibration Control, 2012, 32(5): 1-5, 41.(in Chinese)
- [17] 唐光武, 成思源. 二维路面不平度的时域模型及计算机仿真[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2000, 23(6): 31-34.  
TANG Guangwu, CHENG Siyuan. Time domain model of 2-D road roughness and numerical simulation[J]. Journal of Chongqing University(Natural Science Edition), 2000, 23(6): 31-34. (in Chinese)
- [18] 罗竹辉, 魏燕定, 周晓军, 等. 随机激励三维路面空间域模型建模与仿真[J]. 振动与冲击, 2012, 31(21): 68-72.  
LUO Zhuhui, WEI Yanding, ZHOU Xiaojun, et al. 3-D random excitation road surface modeling and simulation[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(21): 68-72.(in Chinese)