

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2020.215

# 考虑多公差耦合的几何要素误差建模及产品装配精度预测

刘玉鑫, 张根保, 冉 琰

(重庆大学 机械传动国家重点实验室, 重庆 400044)

**摘要:**为了准确有效地实现零件几何要素误差建模,提出了一种基于多公差耦合作用下的几何要素误差建模方法。该方法采用小位移旋量(SDT, small displacement torsor)描述公差,针对平动公差与固定公差耦合建立几何要素误差模型,通过利用约束方程的不合格率 $p$ ,推导各个误差分量参数的实际的分布规律,建立几何要素误差模型。采用雅可比旋量模型将该方法扩展应用于复杂装配体的装配误差建模中,实现了装配精度的预测。以顶尖尾座装配精度预测为例,验证了该方法的合理性及可行性。

**关键词:**误差建模;装配精度预测;雅可比旋量模型

**中图分类号:**TH124

**文献标志码:**A

**文章编号:**1000-582X(2020)01-011-09

## Geometric element error modeling considering multi-tolerance coupling and accuracy prediction of product assembly

LIU Yuxin, ZHANG Genbao, RAN Yan

(State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University,  
Chongqing 400044, P. R. China)

**Abstract:** In order to accurately and effectively realize the geometrical element error modeling of parts, a geometric element error modeling method based on multi-tolerance coupling is proposed in this paper. Small displacement torsor (SDT) was adopted to describe the tolerance, and the geometric element error model for the translation of the translational tolerance and the fixed tolerance was established. By using the failure rate  $p$  of the constraint equation, the actual distribution of the parameters of each error component was derived and the geometric element error model was built. The method was extended to the assembly error modeling of complex assemblies by using the Jacobian spin model, realizing the prediction of assembly accuracy. The rationality and feasibility of the method are verified by the prediction of the assembly accuracy of the top tailstock.

**Keywords:** tolerance model; assembly accuracy prediction; Jacobian-torsor model

零件的加工误差是导致装配误差的重要因素之一,也是制造阶段中无法避免的误差,因此,建立零件几何要素的误差模型,是求解装配精度的重要前提,几何要素误差建模主要包括公差带的描述与变动后的几何

收稿日期:2019-05-20 网络出版日期:2019-10-08

基金项目:中央高校经费资助项目(106112017CDJPT280003)。

Supported by Central University Funding Project (106112017CDJPT280003).

作者简介:刘玉鑫(1994—),男,硕士研究生,主要从事机床可靠性研究,(E-mail) 357836259@qq.com。

通讯作者:冉琰,女,博士,主要从事机床可靠性研究,(E-mail) ranyan@cqu.edu.cn。

要素的描述<sup>[1]</sup>。最早的公差表达模型是 Requicha<sup>[2]</sup>提出了基于变动簇的实体漂移法,漂移实质上是在保持实体外形不变的情况下的拓扑变换,允许漂移的区域即为公差区域。在实体漂移模型的基础上, Jayaraman<sup>[3-4]</sup>发展完善了漂移理论,提出了一种虚拟边界要求的模型,提高了漂移理论的实用性。Bourdet 等<sup>[5]</sup>在特征恒定度以及 TTRS 的基础上提出了 SDT (small displacement torsor) 模型,该模型用于表示几何要素由于公差引起的位置和方向变动。Roy<sup>[6-7]</sup>、刘玉生等<sup>[8-12]</sup>在 SDT 模型基础上通过对常见几何要素的自由度分析,建立了尺寸公差、定向公差、定位公差和形状公差的数学模型,并给出了几何要素各误差旋量参数之间的约束关系,提高了公差分析的精度,使公差建模理论的发展向前推进了一大步。唐水龙等<sup>[13]</sup>通过构建虚拟平面进行了尺寸公差与平面度公差的耦合作用下的几何要素的误差变动分析;吕程等<sup>[14]</sup>完善了几何要素在各类公差耦合作用下的误差变动数学表达。

上述研究大多针对某一类公差进行误差建模和讨论,缺少对多公差作用下误差建模的系统研究。现有的多公差作用下的误差建模常采用蒙特卡洛法建立几何要素实际变动与公差之间的关系,其求解过程复杂,故文中提出了一种在公差耦合作用下的几何要素误差建模方法,利用约束方程的不合格率  $p$ ,更为简便地推导出了各个误差分量参数的实际分布规律,建立几何要素误差模型。基于雅可比旋量模型将该方法扩展应用于复杂装配体的装配误差建模中,实现了装配精度的预测,并结合可靠性理论提出了通过装配精度可靠度来评价装配精度指标,即可用概率来评价装配体满足精度要求的能力,更符合实际生产情况。

## 1 基于 SDT 平动公差与固定公差耦合作用下几何要素的误差建模

几何要素误差建模主要需要解决以下 2 个方面问题:①公差带的形成及表达。公差带是由一个或几个理想的几何线或面所限定的、由线性公差值表示其大小的区域,用来描述允许几何要素尺寸、形状及位置变动的范围。②变动后的几何要素的形成与表示。几何要素在公差带内发生变动后,其尺寸、位置及形状均会发生变化,不是以前的理想状态,因此存在着如何描述变动后几何要素的问题,即如何使变动后的几何要素上表达出公差的效果。本节将采用小位移旋量 SDT 以理想平面为参考,描述各类公差带以及变动后的几何要素,具体分析过程如下。

### 1.1 公差带的基本属性与分类

公差带是产品在设计阶段,设计人员给予产品实际尺寸、形状及位置的变动范围,也是产品制造及检测的依据。几何要素的公差带具有形状、大小、方向和位置四个要素,可以根据公差带的方向和位置是否确定来对公差进行分类,具体可以分为 3 类<sup>[8]</sup>:公差带固定的公差、公差带平动的公差和公差带浮动的公差,如表 1。其中固定的公差带不仅可以控制几何要素对基准的位置变动,还能控制其对基准的方向变动,故如要控制几何要素对基准方向变动,其平动的公差带应小于该几何要素固定的公差带,同理,如要控制几何要素的形状,浮动的公差带应小于该几何要素平动的公差带。

表 1 公差分类

Table 1 Classification of tolerances

公差带类型	公差类别	公差类型
公差带浮动的公差	形状公差	直线度、平面度、圆度、圆柱度、定形尺寸公差
公差带平动的公差	方向公差	平行度、垂直度、倾斜度
公差带平动的公差	跳动公差	圆跳动*、全跳动*
公差带固定的公差	位置公差	位置度、同心度、同轴度、对称度、定位尺寸公差
公差带固定的公差	跳动公差	圆跳动*、全跳动*

注:\*表示依据其不同的使用条件,圆跳动、全跳动可以属于不同类型。公差带浮动的公差、公差带平动的公差、公差带固定的公差以下简称浮动公差、平动公差、固定公差。

### 1.2 基于 SDT 公差耦合作用下几何要素的误差建模

在 SDT 公差模型中,将零件实际几何要素的误差通过公称表面的一种微小的刚性变动来表示,并用理想几何要素来代替实际零件实际几何要素<sup>[15]</sup>,小位移旋量可以描述几何要素六个自由度的微小变动,可表

示为  $D=(\alpha, \beta, \gamma, u, v, w)$ , 其中  $\alpha, \beta, \gamma$  代表着绕着  $x, y, z$  轴旋转的微小转动量,  $u, v, w$  代表着沿着  $x, y, z$  轴平动的微小移动量。在文中研究范围内, SDT 各个变动量是用来描述零件几何要素的误差, 故后文也将 SDT 各个变动量称为误差分量。

由 1.1 节可知, 几何要素误差受多项公差控制时, 其的位置分量由固定公差控制, 方向由平动公差控制。由于浮动公差不能控制几何要素位置和方向, 对 SDT 各个变动量没有约束作用, 故 SDT 模型对浮动的公差表示还不够完善, 且浮动的公差对装配体的误差累积作用相对较小, 故文中仅对固定公差和平动公差进行耦合建模, 浮动的公差建模的详细内容见参考文献[16]。

鉴于平面几何要素在实际工程中应用较为广泛, 文中将重点讨论平面在固定公差和平动公差耦合作用下的几何要素 SDT 建模。其中, 约束平面的平动公差有平行度、垂直度和倾斜度, 固定公差有定位尺寸公差、位置度和对称度, 下面以平面定位尺寸公差与平面度公差的耦合作用为例, 对几何要素的误差变动情况进行分析, 建立多公差耦合作用下的平面公差带。

如图 1 所示, 长  $b$ , 宽  $a$  的平面, 以理想矩形平面的几何中心为坐标系原点, 坐标系法线方向为  $Z$  轴, 建立坐标系。  $T_D$  表示平面的定位尺寸公差带, 其方向平行于基准平面, 位置距离于基准  $L$  处。  $T_P$  表示平面的平行度公差带, 其方向平行于基准平面, 位置不确定。定位尺寸公差与平行度公差耦合作用下的公差带取两个公差带的交集, 根据产品几何技术规范(GPS), 方向公差带小于该要素的位置公差带, 故耦合公差带的大小为  $T_P$ , 方向与基准平面, 位置在尺寸公差带内平动, 可由图 1 的阴影区域表示。在 SDT 公差模型中, 将实际平面用理想表面  $S_s$  表示, 平面几何要素误差由理想表面  $S_s$  的  $\alpha, \beta, w$  3 个分量的变动描述。则由图 1 可知, 理想表面  $S_s$  移动误差分量  $w$  的变动区间为  $T_D$ , 由尺寸公差控制, 转动误差  $\alpha, \beta$  的变动区间为  $T_P$ , 由平行度公差控制。

综上所述, 在尺寸公差与平面度公差耦合作用下, 平面几何要素的 SDT 分量变动不等式为

$$-\frac{T_P}{a} \leq \alpha \leq \frac{T_P}{a}, -\frac{T_P}{b} \leq \beta \leq \frac{T_P}{b}, -T_{DL} \leq w \leq T_{DU}, \quad (1)$$

式中,  $T_{DU}, -T_{DL}$  分别为尺寸的上、下偏差。

为使理想表面位于耦合公差带内, 应对 SDT 公差模型中的分量添加约束关系为

$$-T_{DL} \leq w + a\alpha + b\beta \leq T_{DU}. \quad (2)$$

利用 2 组数学不等式来表示耦合公差的数学模型, 式 1 为误差分量的变动不等式, 它表示了平面几何要素单个误差分量所允许的变动范围。式 2 为误差分量的约束不等式, 它表示了平面几何要素各分量参数之间的变动约束关系, 确保了误差分量取值的合理性。

通过上述分析可知, 几何要素在 SDT 模型中移动误差分量由固定公差  $T_s$  决定, 转动误差分量由平动公差  $T_t$  决定, 其误差变动不等式可表示为:

$$\begin{aligned} T_{S_{\min}} &\leq f(u, v, w) \leq T_{S_{\max}}, \\ T_{t_{\min}} &\leq f(\alpha, \beta, \gamma) \leq T_{t_{\max}}, \end{aligned} \quad (3)$$

约束方程可表示为

$$T_{S_{\min}} \leq f(\alpha, \beta, \gamma, u, v, w) \leq T_{S_{\max}}, \quad (4)$$

式中:  $T_{S_{\max}}, T_{S_{\min}}$  分别为固定公差的上极限和下极限;  $T_{t_{\max}}, T_{t_{\min}}$  分别为平动公差的上极限和下极限。

### 1.3 几何要素误差分量实际分布规律求解

在 SDT 模型中, 约束不等式限制了各误差分量在变动不等式所确定的变动区间内的运动, 为了得到各分量的实际分布规律, 文中依据误差分量值的随机性特点, 以及约束方程的不合格率  $p$ , 推导出

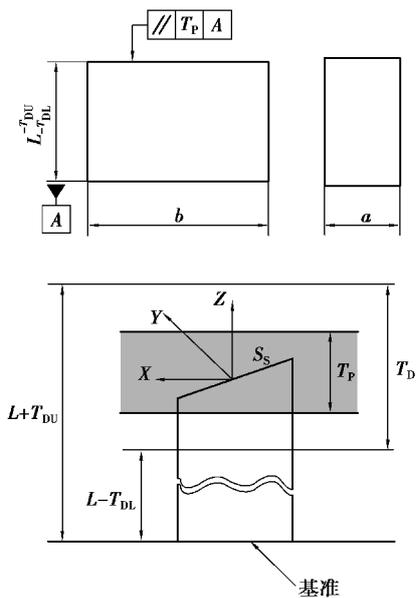


图 1 多公差耦合作用下的平面公差带  
Fig. 1 Plane tolerance band under multi-tolerance coupling

约束不等式限制情况下的几何要素的各个误差分量参数的实际的分布规律,此方法相较于传统蒙特卡洛模拟法更为简便地建立误差分量实际分布规律与公差之间的函数关系。

在实际加工过程中,由于人、机、料、法、环等各类因数的影响,使得几何要素的各误差分量呈现一定的分布规律<sup>[17]</sup>,其实际分布情况难以确定。因此,文中主要研究当各个误差分量服从正态分布且相互独立的情况下的实际分布规律<sup>[18]</sup>。当各误差分量符合正态分布时,各分量的分布特征可用均值  $\mu$  和方差  $\sigma^2$  来描述,当耦合公差都为对称分布时,均值  $\mu=0$ 。由于形位均为对称分布,尺寸公差可以通过改变公称尺寸化为对称分布公差,为了方便计算,可将各公差化为对称分布公差,此时耦合公差带服从对称分布,均值  $\mu=0$ ,故仅通过方差  $\sigma^2$  就可表达各误差分量的分布特征。

### 1.3.1 蒙特卡洛模拟法求解几何要素误差分量实际分布规律

在传统的基于蒙特卡洛模拟法求解误差分量的实际变动区间中,首先根据式(3)中误差分量  $\varphi$  的变动不等式对其进行抽样( $\varphi\{\alpha, \beta, \gamma, u, v, w\}$ ),模拟实际公差表面的变动,再根据式(4)对满足约束不等式的样本加以保留,不满足约束不等式的则剔除,当产生足够多满足条件的随机数样本后,对样本进行分析,求解出对应误差分量的均值与方差。具体流程如图 2 所示。

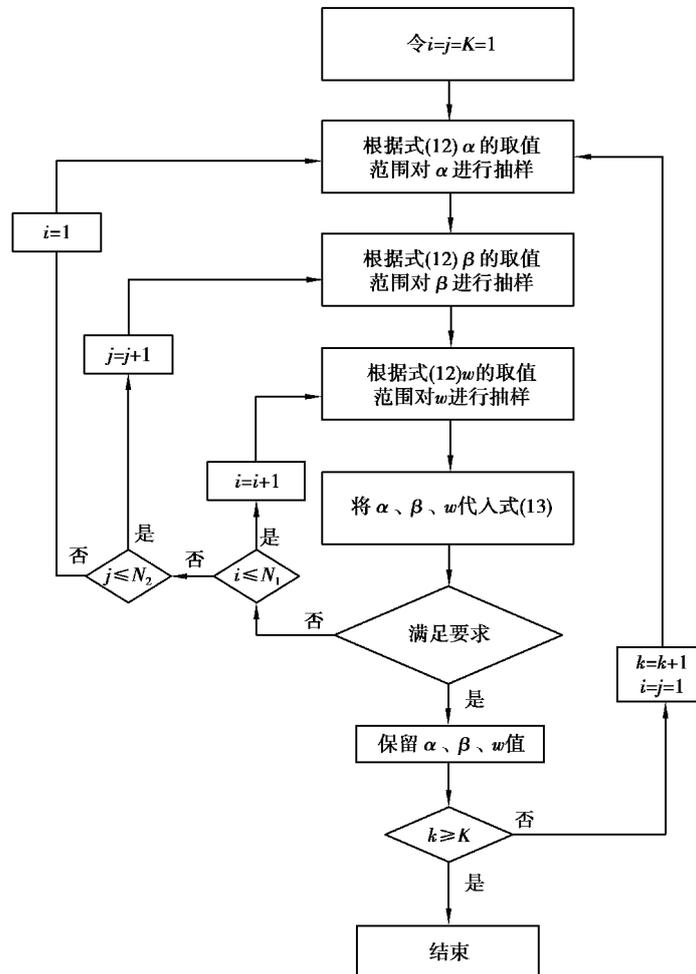


图 2 各误差分量模拟抽样流程

Fig. 2 Simulated sampling process for each error component

### 1.3.2 以约束方程的不合格率求解几何要素误差分量实际分布规律

为了体现误差分量间的约束关系,文中将利用约束方程的不合格率  $p$ ,推导各个误差分量的实际分布规律。

由于几何要素的各个误差分量服从正态分布,各分量可表示为

$$i \sim N(0, \sigma_i^2) \quad i = \alpha, \beta, \gamma, u, v, w, \quad (5)$$

几何要素的各个误差分量标准差之间关系与分量变动区间有关,可表示为

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_j} = \frac{T_i}{T_j} i, j = \alpha, \beta, \gamma, u, v, w. \quad (6)$$

式中: $T_i$  表示误差分量  $i$  变动区间的大小; $\sigma^i$  表示几何要素误差分量  $i$  的标准差。

由于几何要素各个误差分量相互独立,约束函数由各分量线性组成,可知约束函数  $f$  也服从正态分布,可表示为

$$f(\alpha, \beta, \gamma, u, v, w) \sim N(0, \sigma^2), \quad (7)$$

$$\sigma^2 = g(\sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \sigma_\gamma^2, \sigma_u^2, \sigma_v^2, \sigma_w^2), \quad (8)$$

式中, $\sigma^2$  表示约束函数的方差。

当约束函数  $f$  的取值在  $[T_{\min}, T_{\max}]$  范围内的不合格率为  $p$  时,可知:

$$\sigma = \frac{T_{S_{\max}} - T_{S_{\min}}}{2X}, \quad (9)$$

式中, $X = \Phi^{-1}(1 - \frac{p}{2})$ 。根据式(5)~式(9),可求出在约束关系限制下的各个误差分量分布参数  $\sigma_i^2$ 。

## 2 装配精度可靠度计算

雅可比矩阵模型是一种由机器人运动学理论发展而来的装配体误差传递模型<sup>[19]</sup>,可用于表达零件功能元素由于制造或装配误差引起的微小变动,对装配功能要求的作用关系。文中基于该方法提出雅可比方差矩阵,用于表达各误差分量的方差对装配要求的影响关系,可表示为

$$R = \sum_{i=1}^n (\mathbf{J}_{E_i})^2 E_i, \quad (10)$$

式中: $R$  为功能要求误差分量的方差, $E_i$  表示为特征  $i$  误差分量的方差,由于  $\mathbf{J}_{E_i}$  为的雅可比矩阵,现定义  $\mathbf{J}_{E_i}$  为的雅可比方差矩阵,用于表达特征  $i$  各误差分量的方差对  $R$  的影响关系, $n$  为对  $R$  有影响的特征的个数。

基于雅可比旋量方差模型对实际误差传递路径上的各误差分量进行累积计算,最终可获得装配体各误差分量的分布情况。笔者提出通过装配精度可靠度来评价的装配体精度指标,以可靠度作为评价装配精度性能的依据,即可用概率来评价装配体满足精度要求的能力,更符合实际生产情况。假设精度指标要求允许的最大误差范围为  $\Omega$ ,则可通过计算装配精度指标的分布密度函数在  $\Omega$  上的积分求解装配精度可靠度,用  $R(t)$  表示可靠度,具体的表达式为

$$R(t) = \int_{\Omega} E(X) dx, \quad (11)$$

式中, $E(X)$  为装配精度指标的分布密度函数。

## 3 实例分析

以 Peng<sup>[20]</sup> 论文中的简易顶尖尾座装配体为例,详细阐述了零件几何误差建模及装配精度预测流程,并通过分析对比误差预测结果,论证了文中方法的可行性及合理性。图 3 为简易顶尖尾座,其关键组成零件有顶尖、阶梯型底座和 L 型底座组成。零件的关键几何要素精度公差取值范围如表 2 所示。假设不考虑由于定位操作等引起装配误差,为了保证易顶尖尾座装配精度,要求顶尖轴线在  $w$  方向的允许误差为  $\pm 0.3$  mm,可靠度为 98%。其中,小结合面  $F_3$  和  $F_4$  装配误差仅对顶尖  $v$  移动方向误差分量有影响,故可忽略不计,文中假设几何要素的误差分量均服从正态分布,则具体计算流程如下。

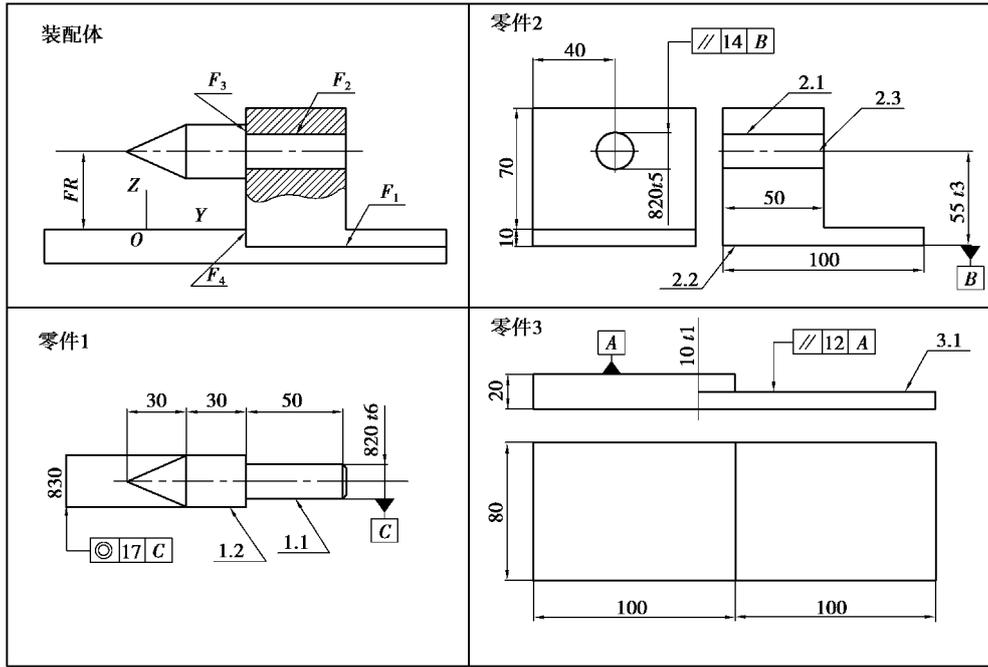


图 3 顶尖尾座装配简图

Fig. 3 Top tailstock assembly diagram

表 2 顶尖尾座关键几何要素公差项

Table 2 Top tailstock key geometry feature tolerances

结合面	定位特征坐标原点	几何要素	相关公差项	公差取值范围
F <sub>1</sub>	(0,100,-10)	平面 3.1	尺寸公差 t <sub>1</sub>	[-0.2,0.2]
		平面 3.1	平行度公差 t <sub>2</sub>	0.1
		平面 2.2	基准几何要素	—
F <sub>2</sub>	(0,75,45)	柱面轴线 2.3	尺寸公差 t <sub>3</sub>	[-0.1,0.1]
		柱面轴线 2.3	平行度公差 t <sub>4</sub>	0.1
		柱面 2.1	尺寸公差 t <sub>5</sub>	[0,003 3]
		柱面 1.1	尺寸公差 t <sub>6</sub>	[-0.020,-0.007]
—	(0,35,45)	柱面 1.2	同轴度公差 t <sub>7</sub>	0.1

3.1 几何要素误差分量的方差求解

1)以约束方程的不合格率求解几何要素误差分量方差以平面 3.1 为例,其的误差分量的方差计算方法具体如下:

由式(3)可得到误差分量的变动不等式:

$$-\frac{0.1}{100} \leq \alpha \leq \frac{0.1}{100}, -\frac{0.1}{80} \leq \beta \leq \frac{0.1}{80}, -0.2 \leq w \leq 0.2, \tag{12}$$

由式(4)可得到误差分量的约束不等式:

$$-0.2 \leq w + 100\alpha + 80\beta \leq 0.2, \tag{13}$$

现假设约束方程的不合格率 p=1.24%,根据式(5)~式(9)可求出各误差分量实际变动区间。

$$\sigma = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{2X} = \frac{0.4}{5} = 0.08,$$

$$\sigma^\alpha : \sigma^\beta : \sigma^w = T_\alpha : T_\beta : T_w = 4 : 5 : 800,$$

$$\sigma^2 = 100^2 \sigma_\alpha^2 + 80^2 \sigma_\beta^2 + \sigma_w^2,$$

联立以上 3 个方程可得:

$$\begin{cases} \sigma_\alpha^2 = 1.0667 \times 10^{-7}, \\ \sigma_\beta^2 = 1.6663 \times 10^{-7}, \\ \sigma_w^2 = 4.2667 \times 10^{-3}. \end{cases}$$

### 3.2 蒙特卡洛模拟法求解几何要素误差分量方差

在传统的基于蒙特卡洛模拟法求解误差分量的实际变动区间中,首先根据式(3)中误差分量  $\varphi$  的变动不等式对其进行抽样( $\varphi = \{\alpha, \beta, \gamma, u, v, w\}$ ),模拟实际公差表面的变动,再根据式(4)对满足约束不等式的样本加以保留,不满足约束不等式的则剔除,当产生足够多满足条件的随机数样本后,对样本进行分析,求解出对应误差分量的方差,以平面 3.1 为例,具体流程图 2 所示。

图 2 中,  $K$  为合格样本数量,  $N_1, N_2$  为常量,目的是为了防止前面的误差分量抽样值过大,导致后面的误差分量无法取到满足约束不等式的值而使抽样过程陷入死循环。

对保留的样本进行分析,求解出对应误差分量的方差。

$$\begin{cases} \sigma_\alpha^2 = 1.0862 \times 10^{-7}, \\ \sigma_\beta^2 = 1.6371 \times 10^{-7}, \\ \sigma_w^2 = 4.0426 \times 10^{-3}. \end{cases}$$

通过对比 2 种求解误差分量方差的方法发现,求解结果近似相同,且以约束方程的不合格率求解几何要素误差分量方差相较于蒙特卡洛模拟法更为简便,故验证了以约束方程的不合格率求解几何要素误差分量方差合理性及可行性。同理可以约束方程的不合格率求解各几何要素误差分量的方差:

柱面轴线 2.3 误差分量的方差:

$$\sigma_\alpha^2 = \sigma_\gamma^2 = 3.2002 \times 10^{-7}; \sigma_u^2 = \sigma_w^2 = 7.9976 \times 10^{-4},$$

柱面 2.1 误差分量的方差:

$$\sigma_\alpha^2 = \sigma_\gamma^2 = 1.3948 \times 10^{-8}; \sigma_u^2 = \sigma_w^2 = 8.7143 \times 10^{-6},$$

柱面 1.1 误差分量的方差:

$$\sigma_\alpha^2 = \sigma_\gamma^2 = 2.1632 \times 10^{-9}; \sigma_u^2 = \sigma_w^2 = 1.3526 \times 10^{-6},$$

柱面 1.2 误差分量的方差:

$$\sigma_\alpha^2 = \sigma_\gamma^2 = 6.1732 \times 10^{-7}; \sigma_u^2 = \sigma_w^2 = 5.5554 \times 10^{-4}.$$

### 3.3 基于雅可比旋量方差模型的装配体精度可靠度计算。

由式(10)可知,装配体的雅可比旋量方差模型为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 55 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 85 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 85 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 85 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 85 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.267 \times 10^{-3} \\ 1.067 \times 10^{-7} \\ 1.666 \times 10^{-7} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.000 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 8.000 \times 10^{-4} \\ 3.200 \times 10^{-7} \\ 3.200 \times 10^{-7} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.714 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 8.714 \times 10^{-6} \\ 1.395 \times 10^{-8} \\ 1.395 \times 10^{-8} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.353 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 1.353 \times 10^{-6} \\ 2.163 \times 10^{-9} \\ 2.163 \times 10^{-9} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.555 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 5.555 \times 10^{-4} \\ 6.173 \times 10^{-7} \\ 6.173 \times 10^{-7} \\ 0 \end{bmatrix}^T,$$

经过计算:

$$\mathbf{R} = [1.87 \times 10^{-3}, 3.23 \times 10^{-4}, 9.31 \times 10^{-3}, 1.060 \times 10^{-6}, 1.120 \times 10^{-6}, 0]^T.$$

则  $w$  方向误差分量标注差为  $\sigma^w = 0.0965$ 。

在误差预测结果中,顶尖轴线在  $w$  方向废品率为 5% 时,对应的允许误差变动范围为  $[-0.328\ 74, 0.328\ 74]$ , 经计算可知  $w$  方向的误差分量标准差为 0.168, Peng 的误差预测模型中未考虑误差分量之间的相互约束关系,使得各几何要素误差分量的变动范围大于实际值,进而令最终装配误差预测值偏大。文中装配误差预测值为 0.096 5, 略小于 Peng 的预测值,相对而言更为合理。

由式子(11)可知,装配体精度可靠度为

$$R(t) = \int_{-0.3}^{0.3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w^2} e^{-\frac{w^2}{2\sigma_w^2}} dw = \int_{-0.3}^{0.3} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times 9.31 \times 10^{-3}} e^{-\frac{w^2}{9.31 \times 10^{-3}}} dw = 0.998\ 1。$$

经过计算,顶尖尾座装配精度可靠度为 99.81%, 故装配体达到装配精度要求。

## 4 结 论

1) 提出了一种在多公差耦合作用下的几何要素误差建模方法,利用约束方程的不合格率  $p$ , 推导出了各个误差分量参数的实际的分布规律,建立了几何要素误差模型。

2) 基于雅可比旋量模型,提出了雅可比方差矩阵,表达各误差分量的方差与装配体精度指标方差的之间影响关系,进而建立了装配误差建模,实现了装配精度的预测。

3) 提出了以可靠度作为评价装配精度性能的依据,使得可用概率来评价装配体满足精度要求的能力,更符合实际生产情况,最后以顶尖尾座装配精度预测为例,验证了该方法的合理性及可行性。

### 参考文献:

- [1] 刘玉生. 基于数学定义的平面尺寸和形位公差建模与表示技术的研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2000.  
Liu Y S. Study on tolerance modeling and representation of plane based on mathematic definition[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2000.(in Chinese)
- [2] Requicha A A G. Toward a theory of geometric tolerancing[J]. The International Journal of Robotics Research, 1983, 2(4): 45-60.
- [3] Jayaraman R, Srinivasan V. Geometric tolerancing: I. virtual boundary requirements[J]. IBM Journal of Research and Development, 1989, 33(2): 90-104.
- [4] Srinivasan V, Jayaraman R. Geometric tolerancing: II. conditional tolerances [J]. IBM Journal of Research and Development, 1989, 33(2): 105-124.
- [5] Bourdet P. The concept of small displacement torsor in metrology[J]. Advances in Applied Mathematics, 1996, 40: 110-122.
- [6] Roy U, Li B. Representation and interpretation of geometric tolerances for polyhedral objects; I. Form tolerances[J]. Computer-Aided Design, 1998, 30(2): 151-161.
- [7] Roy U, Li B. Representation and interpretation of geometric tolerances for polyhedral objects. II.[J]. Computer-Aided Design, 1999, 31(4): 273-285.
- [8] 刘玉生, 高曙明, 吴昭同, 等. 一种基于数学定义的三维公差语义表示方法[J]. 中国机械工程, 2003, 14(3): 241-245.  
Liu Y S, Gao S M, Wu Z T, et al. A representation method of 3D tolerance semantics based on mathematical definition [J]. China Mechanical Engineering, 2003, 14(3): 241-245.(in Chinese)
- [9] 蔡敏, 杨将新, 吴昭同. 平面要素公差数学定义理论及应用的研究[J]. 中国机械工程, 2002, 13(2): 44-46, 4.  
Cai M, Yang J X, Wu S T, et al. Research on theory and application of mathematical definition of plane element tolerance [J]. China Mechanical Engineering, 2002, 13(2): 44-46, 4.(in Chinese)
- [10] 蔡敏, 杨将新, 吴昭同. 基于数学定义的圆柱要素形状公差数学模型的研究[J]. 机械工程学报, 2003, 39(12): 86-90.  
Cai M, Yang J X, Wu Z T. Mathematical model of form tolerance for cylindrical feature based on mathematical definition [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2003, 39(12): 86-90.(in Chinese)
- [11] 茅健, 曹衍龙, 杨将新, 等. 基于公差原则的直线对称度公差数学模型[J]. 中国机械工程, 2007, 18(19): 2351-2354.  
Mao J, Cao Y L, Yang J X, et al. Mathematical model for linear symmetry based on tolerancing principle[J]. China Mechanical Engineering, 2007, 18(19): 2351-2354.(in Chinese)
- [12] 茅健, 张恒, 曹衍龙. 基于 SDT 的平面尺寸公差模型研究及应用[J]. 工程设计学报, 2010, 17(5): 321-324, 354.

- Mao J, Zhang H, Cao Y L. Research and application on model of size tolerance for plane based on SDT[J]. Journal of Engineering Design, 2010, 17(5): 321-324,354.(in Chinese)
- [13] 唐水龙, 余剑锋, 李原, 等. 基于虚拟配合面的带平面度零件装配容差分析[J]. 计算机集成制造系统, 2011, 17(4): 711-715.  
Tang S L, Yu J F, Li Y, et al. Assembly tolerance analysis for parts with flatness based on virtual mating plane[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2011, 17(4): 711-715.(in Chinese)
- [14] 吕程. 基于结合面误差建模的装配精度预测与优化研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2016.  
Lyu C. The study on prediction and optimization of assembly accuracy based on joint surface error modeling [D]. Changsha: Hunan University, 2016.(in Chinese)
- [15] Sergent A, Buiminh H, et al. Identification of machining defects by Small Displacement Torsor and form parameterization method[C]//IDMME Virtual Concept 2010 International conference, Bordeaux, France, 2010:1-6.
- [16] 张娇娜. 基于 GPS 标准体系的形状公差建模及其误差评价技术[D]. 杭州: 浙江大学, 2007.  
Zhang J N. Form tolerance modeling and error evaluation techniques based on GPS[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2007.(in Chinese)
- [17] 余治民, 刘子建, 董思科, 等. 基于蒙特卡洛模拟与响应面方法的公差建模[J]. 中国机械工程, 2015, 26(4): 427-434.  
Yu Z M, Liu Z J, Dong S K, et al. Tolerance modeling based on monte-carlo simulation and response surface method [J]. China Mechanical Engineering, 2015, 26(4): 427-434.(in Chinese)
- [18] 袁贵星. 计算机辅助统计公差设计的研究[D]. 天津: 天津科技大学, 2009.  
Yuan G X. Study on computer-aided statistical tolerance design[D]. Tianjin: Tianjin University of Science & Technology, 2009. (in Chinese)
- [19] 江荣汉. 工程系统可靠性分析基础[M]. 长沙: 湖南大学出版社, 1987: 13-18.  
Jiang R H. Engineering system reliability analysis foundation[M]. Changsha: Hunan University Press, 1987: 13-18. (in Chinese)
- [20] Peng H, Wang B. A statistical approach for three-dimensional tolerance redesign of mechanical assemblies [C] // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2018, 232 (12): 2132-2144.

(编辑 詹燕平)