

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2020.212

结合 Kriging 与改进 NSGA-II 的 RV 减速器优化

缪嘉成, 李朝阳, 陈兵奎

(重庆大学机械传动国家重点实验室, 重庆 400044)

摘要:将体积、扭转刚度和传动效率作为优化目标, 构建了 RV 减速器的多目标优化模型。为提高设计效率并节省计算开销, 结合 NXOpen C++ 与 Abaqus Python 二次开发技术, 建立了部分扭转刚度的 Kriging 代理模型。为解决多目标混合整数非线性规划问题, 提出了 MP-NSGA-II (mixed population-NSGA-II) 算法, 改进了离散变量的编码方案。利用 PySide2 开发了一体化结构 RV 减速器设计软件, 并分析了优化目标间的耦合关系。将熵权法选优后的结构参数与 BAJ-25E 比较, 验证了该方法的有效性。

关键词:RV 减速器; 多目标混合整数非线性规划; MP-NSGA-II 算法; Kriging 模型; 熵权法

中图分类号:TH132.414

文献标志码:A

文章编号:1000-582X(2021)02-065-14

Optimization of an RV reducer by integrating Kriging with improved NSGA-II

MIAO Jiacheng, LI Chaoyang, CHEN Bingkui

(State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

Abstract: With the volume, torsional stiffness and transmission efficiency taken as the optimization objectives, a multi-objective optimization model of the RV reducer was constructed. To improve the design efficiency and save the computational cost, a Kriging surrogate model with a partial torsional stiffness was established based on the NXOpen C++ and the Abaqus Python secondary development technology. To solve the multi-objective mixed-integer nonlinear-programming problem, an MP-NSGA-II (mixed population-NSGA-II) algorithm was proposed, and the coding scheme for discrete variables was improved. An integrated RV reducer design software was developed by using PySide2, and the coupling relationship between optimization objectives was analyzed. The structural parameters selected by the entropy method were compared with BAJ-25E, and the effectiveness of this method was verified.

Keywords: RV reducer; MOMINLP; MP-NSGA-II algorithm; Kriging model; entropy method

RV(rotational vector)减速器是一种效率高、体积小、重量轻、扭转刚度大、传动精度高的新型传动机构, 在工业机器人、数控机床、医药化工设备等领域应用广泛。其设计参数众多, 约束条件复杂, 传动性能相互耦合, 传统设计方法难以获得最优解。随着优化理论逐渐成熟, 多目标优化算法逐渐应用于摆线类减速器设

收稿日期:2019-06-10 **网络出版日期:**2019-09-27

基金项目:国家重点研发计划智能机器人重点专项(2017YFB1300700)。

Supported by the National Key R&D Program of China (2017YFB1300700).

作者简介:缪嘉成(1994—), 男, 重庆大学硕士研究生, 主要从事精密传动研究, (E-mail)haomjc@163.com。

通讯作者:陈兵奎, 重庆大学机械传动国家重点实验室教授, 博士研究生导师, 主要从事精密传动及系统研究, (E-mail)bkchen@cqu.edu.cn。

计。Wang 等^[1]对 K-H-V 摆线减速器进行了优化,提升了传动效率并缩小了体积。Wang 等^[2]改进了 NSGA-II 算法,增强了种群的分布性,并用于摆线针轮减速器的优化。Jat 等^[3]使用 NSGA-II 对深沟球轴承的基本额定动载荷和弹流动态最小膜厚度进行了优化。

扭转刚度是 RV 减速器的关键性能指标之一^[4]。中外学者针对摆线及 RV 减速器刚度特性进行了深入研究^[4-7],但未见针对其刚度优化方法的报道。RV 减速器刚度分析通常采用数值方法或 ANSYS 有限元仿真^[4,6],前者难以精确反映减速器结构参数与扭转刚度间的非线性关系,后者的计算量难以满足优化算法的要求。为减少耗时的 CAE(computer aided engineering)模拟,需结合理论模型与 CAD(computer aided design)二次开发,建立部分扭转刚度的 Kriging 代理模型^[8]。

RV 减速器结构优化的关键是解决多目标混合整数非线性规划(MOMINLP, multi-objectives mixed integer non-linear programming)问题,求解小样本问题常用分支界定法、割平面法等精确算法。由于精确方法求解高维问题的时间复杂度极高,中外学者对进化算法加以改进^[9],部分研究基于实数编码的粒子群算法(PSO, particle swarm optimization)或差分进化算法(DE, differential evolution algorithm),利用三角函数、Sigmoid 函数等建立实数与整数的映射关系^[10-11]。

笔者以 BAJ-25E 为研究对象,建立 RV 减速器效率和体积的目标函数以及部分刚度的 Kriging 代理模型,提出一种能够同时处理离散种群、整数种群与实数种群的改进 NSGA-II 算法,并将其应用于 RV 减速器的结构参数优化。

1 结构优化的数学模型

RV 减速器的结构如图 1 所示,为保证与现有 RV 减速器的兼容性,基本参数由设计人员给出,包括输入功率 P (W)、输入转速 n (r/min)、行星轮个数 n_p 、输出扭矩 T_2 (mN·m),表示为

$$\mathbf{C} = \{P, n, n_p, T_2\}^T. \quad (1)$$

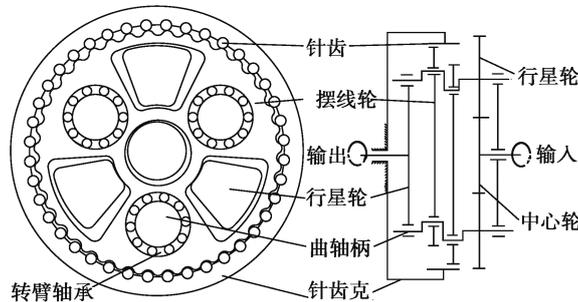


图 1 RV 减速器结构原理图

Fig. 1 Structure of the RV reducer

RV 减速器的中心轮齿数 z_1 、行星轮齿数 z_2 、摆线轮齿数 z_g 、针齿中心圆直径 D_z 、针齿直径 d_z 和短幅系数 K_1 直接影响机械效率, z_1 、 z_2 、 D_z 、 d_z 及行星轮齿宽 b 、渐开线齿轮模数 m 、摆线轮齿宽 B 及转臂轴承节圆直径 D_m 、转臂轴承圆柱滚子直径 D_r 、转臂轴承圆柱滚子数量 Z 、转臂轴承圆柱滚子有效长度 L 、支承轴承节圆直径 D'_m 、支承轴承圆柱滚子直径 D'_r 、支承轴承圆柱滚子数量 Z' 、支承轴承圆柱滚子有效长度 L' 直接影响减速器的体积和扭转刚度。设计变量表示为

$$\mathbf{X} = \{z_1, z_2, b, m, z_g, D_z, d_z, B, K_1, D_m, D_r, Z, L, D'_m, D'_r, Z', L'\}^T. \quad (2)$$

1.1 RV 减速器的性能指标

由于 RV 减速器的体积与扭转刚度的耦合关系较强,需同时考虑体积和扭转刚度目标,传动效率作为重要性能指标也应纳入优化目标。

1.1.1 体积

在满足 RV 减速器所需的输入功率和输出转矩的基础上,将减小外形尺寸作为设计目标。如图 2 所示,体积目标函数为

$$V = \frac{\pi}{4} \{ (d_3 + 2\tau_1)^2 (h_1 + h_2 + h_3) + [(d_1 + 2(\tau_1 + \tau_2))^2 - (d_3 + 2\tau_1)^2] h_2 + [(d_3 + 2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3))^2 - (d_3 + 2\tau_1)^2] h_3 \}, \quad (3)$$

式中: τ_1, τ_2, τ_3 表示针齿壳各部分的厚度; h_1, h_2, h_3 表示针齿壳各部分的长度, $h_3 = \delta_1 + b + \delta_2 + 2L' + 2B - h_1 - h_2$, $d_3 = d_1 + 2d_2$ 。 δ_1 和 δ_2 分别表示输出端盘端面到行星轮端面的距离, 以及行星轮端面到支承轴承端面的距离。

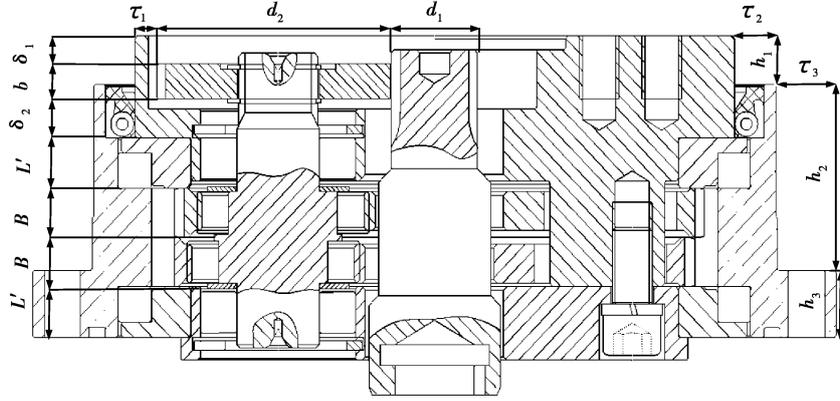


图 2 一体化 RV 减速器外形尺寸

Fig. 2 Dimensions of the integrated RV reducer

1.1.2 扭转刚度

影响 RV 减速器刚度的元件主要有输入轴、渐开线行星传动机构、转臂轴承、支承轴承、曲柄轴和摆线针轮传动机构。

1) 在输入扭矩 T_1 作用下, 输入轴的扭转角为

$$\theta_{si} = T_1 \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{GI_P},$$

式中: l_i 是输入轴各部分的长度; G 为切变模量; $I_P = \pi d_v^4 / 32$, 其中 d_v 为等效直径:

$$d_v = \sqrt[4]{\sum_{i=1}^3 l_i / \sum_{i=1}^3 l_i / d_i^4}.$$

式中 d_i 为输入轴各部分的直径。

2) 通过数值弹性力学求解, 渐开线行星传动机构总啮合刚度为

$$c_r = (0.75\epsilon_a + 0.25) c', \quad (4)$$

式中: ϵ_a 为端面重合度; c' 为单对齿刚度。

3) 转臂轴承为一体化滚子轴承, 以圆柱滚子为滚动体, 曲柄轴为内滚道, 摆线轮坐标孔为外滚道, 材料为 GCr15。采用单列短圆柱滚子轴承刚度经验公式^[12] 计算转臂轴承的径向刚度为

$$K_r = 0.340 \times 10^4 (|R|^{0.1} Z^{0.9} L^{0.8} \cos^{1.9} \beta), \quad (5)$$

式中: 转臂轴承径向合力^[13] $|R| = |R_t| + \sqrt{|R_x|^2 + |R_y|^2}$, Meng^[6] 给出了计算转臂轴承切向受力 R_t 、 x 向受力 R_x 和 y 向受力 R_y 的方法; 一体化轴承滚动体接触角 $\beta = 0^\circ$ 。

4) 支承轴承同为一体化滚子轴承, 考虑变形协调条件, 输出端盘刚性较大, 视为刚体。 n_p 对支承轴承在输出端盘扭矩的作用下将产生相等的径向变形, 单个支撑轴承的径向力为

$$|R'| = \frac{T_2}{2n_p a_{sp}}, \quad (6)$$

式中 a_{sp} 为渐开线齿轮中心距。将 $|R'|$ 代入式(5), 可得支承轴承径向刚度 K'_r 。

5) 根据文献^[14], 曲柄轴的总变形为

$$\delta = \frac{|R| \cdot 2L_2^2 L_3^2}{6EI(L_2 + L_3)} - \frac{F_t \cdot L^2 L_2}{2EI}, \quad (7)$$

式中： L_i 为曲柄轴各段的长度； I 为惯性矩； E 为弹性模量； F_t 为切向分力。

6) 由文献[4]可知, 摆线针轮传动处于低速级, 对减速器扭转刚度的影响较大, 故采用 CAE 仿真计算摆线轮与针齿间啮合刚度 K'' , 以提高模型的精度。为提高 CAE 模型建模效率, 开发了参数化建模软件, 图 3 为典型零件图形化建模界面。

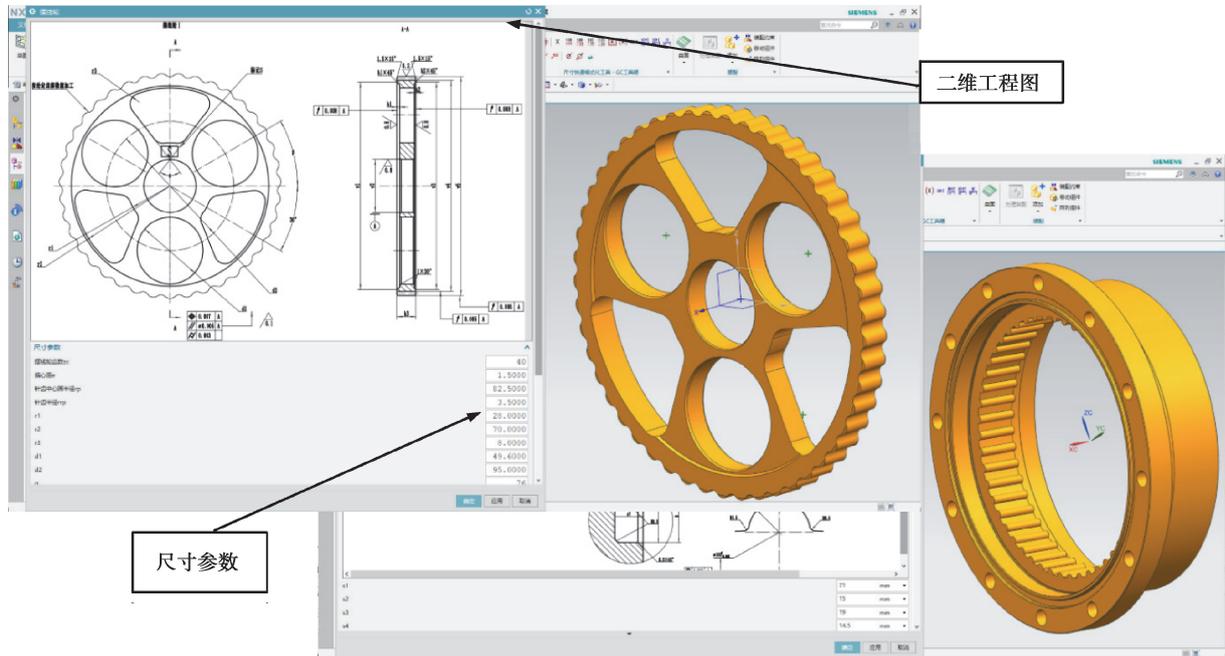


图 3 RV 减速器参数化建模软件

Fig. 3 Parametric modeling software of the RV reducer

用户界面采用三维建模软件 NX12 的 Block UI Styler 实现, 通过 C++ 完成用户界面编辑及尺寸参数定义, 采用 Visual Studio 对程序进行编译与链接。尺寸驱动的 RV 减速器模型将创建三维模型的过程分解, 分别对特征、对象、实体的操作进行函数化处理。在建模界面输入 Kriging 样本点对应的尺寸参数, 驱动软件生成三维零件图。

将图 3 所示摆线针轮传动模型导入仿真软件中, 对针齿壳施加固定约束, 在摆线轮端面施加额定扭矩 T_g , 其中单个摆线轮传递的扭矩 $T_g = 0.55T_2$ 。对摆线轮和针齿壳进行自动网格划分, 对涉及接触作用的区域局部细分, 采用 Abaqus 二次开发实现上述流程的自动化, 如图 4 所示。通过脚本接口建立图形用户界面 GUI 与内核的通信, 提取摆线轮在扭矩 T_g 作用下当前角度的角位移 β_H 。

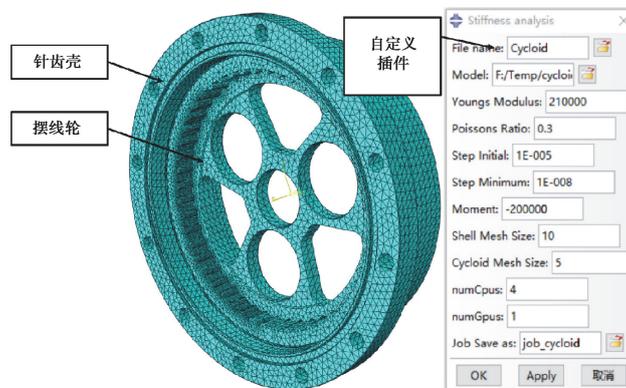


图 4 摆线针轮有限元分析程序

Fig. 4 FEM analysis program of the cycloid-pin

将输入轴与针齿壳固定,在输出轴上施加额定扭矩 T_2 ,各弹性元件将引起相应的弹性转角 θ_i 如表 1 所示,RV 减速器的总刚度 $K'^{[7]}$ 为

$$K' = \frac{T_2}{\sum_{i=1}^6 \theta_i} \quad (8)$$

表 1 各元件引起的弹性转角

Table 1 Elastic angle caused by each component

弹性元件	弹性转角	弹性元件	弹性转角
输入轴	$\theta_1 = \frac{\theta_{si}}{i_{16}^5}$	支承轴承	$\theta_4 = \frac{\delta_{sb}}{a_{sp}}$
渐开线行星传动	$\theta_2 = \frac{\theta_{sp}}{i_{16}^5}$	曲柄轴	$\theta_5 = \frac{\delta}{a_{sp}}$
转臂轴承	$\theta_3 = -\frac{z_g \delta_{cb} i_{65}^1}{z_b a_{sp}}$	摆线针轮传动	$\theta_6 = -\frac{i_{65}^1 z_b}{z_g} \beta_H$

表中渐开线传动机构的位移 $\delta_{sp} = \frac{F_t}{c_r \cos \alpha}$,为渐开线齿轮副的啮合角;转角 $\theta_{sp} = \frac{\delta_{sp} \cos \alpha}{r_s} = \frac{F_t}{c_r r_s}$, r_s 是节圆半径; z_b 为针齿数;转臂轴承的位移 $\delta_{cb} = |R|/K_r$;支承轴承的位移 $\delta_{sb} = |R'|/K'_r$; $i_{65}^1 = -i_{15}^6/i_{16}^5$, $i_{15}^6 = z_b z_2/z_1$; i_{16}^5 为当针齿固定时,输入轴相对于输出轴的转速比。

1.1.3 传动效率

RV 减速器的主要效率损失来自于齿轮啮合摩擦损失和轴承摩擦损失^[15],表示为

$$\eta = \eta_{16} \eta_B \quad (9)$$

式中: η_B 为轴承总效率, η_{16} 为封闭差动齿轮传动效率,

$$\eta_{16} = \frac{\left(\frac{z_b}{z_g} - 1\right) \left(\frac{z_b}{z_g} - \eta_{6,2}^{6,2} + \frac{z_2}{z_1} \frac{z_b}{z_g} \eta_1^6\right)}{\left(\frac{z_b}{z_g} - \eta_{6,2}^{6,2}\right) \left(\frac{z_b}{z_g} - 1 + \left(\frac{z_2 z_b}{z_1 z_g}\right)\right)}$$

式中: η_1^6 为渐开线齿轮啮合效率,

$$\eta_1^6 = 1 - \pi \mu' \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 1 - \epsilon_1 - \epsilon_2);$$

$\eta_{6,2}^{6,2}$ 为摆线针轮啮合效率,

$$\eta_{6,2}^{6,2} = 1 - \frac{fC}{K_1} \left(1 - \frac{d_z}{D_z}\right)$$

式中: f 为滑动摩擦因数;滑动特性系数 $C = \frac{4}{\pi} z_g$ 。

1.2 结构参数的约束条件

1)考虑相邻行星轮齿顶不干涉(g_4)、行星齿轮装配条件(h_1)、弯曲接触强度(g_5, g_6)等,如表 2 所示。

表 2 渐开线行星传动机构的约束条件

Table 2 Constraints of the involute planetary transmission

序号	约束条件	序号	约束条件
$g_1(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$m \geq 1$	$h_1(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$\begin{cases} (z_2 - z_1) \bmod 2 = 0 (n_p = 2) \\ (2z_1 - z_2) \bmod 6 = 0 (n_p = 3, z_2 \bmod 2 = 0) \\ (2z_1 - z_2) \bmod 6 = 3 (n_p = 3, z_2 \bmod 2 = 1) \end{cases}$
$g_2(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$z_1 \geq 17$		
$g_3(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$u > 1.5$		

续表 2

序号	约束条件	序号	约束条件
$g_4(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$(mz_1 + mz_2) \sin\left(\frac{\pi}{n_p}\right) > mz_2 + 2h_a^* m$	$g_6(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$\sigma_H = \sqrt{\frac{KF_1 u + 1}{bmz_1}} Z_H Z_E \leq [\sigma_H]$
$g_5(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$\sigma_F = \frac{KF_1 Y_{Fa} Y_{Sa}}{bm} \leq [\sigma_F]$		

表中齿数比 $u = z_2/z_1$; 齿顶高系数 $h_a^* = 1$; K 为载荷系数; σ_F 为齿根弯曲应力; $[\sigma_F]$ 为许用齿根弯曲应力; σ_H 为齿面接触应力; $[\sigma_H]$ 为许用齿面接触应力。齿廓系数 Y_{Fa} 、应力修正系数 Y_{Sa} 、节点区域系数 Z_H 、弹性系数 Z_E 通过调用齿轮校核子程序计算。

2) 考虑圆柱滚子安全接触应力 (g_8)^[3]、转臂轴承几何约束 (g_{10})、轴承寿命 (g_{11}) 等, 如表 3 所示。

表 3 转臂轴承的约束条件

Table 3 Constraints of turning arm bearing

序号	约束条件	序号	约束条件
$g_7(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$D_r \leq L < B$	$g_{10}(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$\frac{\left[2\pi - 2Z \arcsin\left(\frac{D_r}{D_m}\right)\right]}{z} \geq \frac{2\pi}{360}$
$g_8(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$\frac{268.71 \sqrt{Q_{\max}}}{D_r} \leq \frac{[\sigma_c]}{s}$	$g_{11}(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$L_{10h} = \frac{10^6}{60n_b} \left(\frac{C_d}{p}\right)^\epsilon > 10\ 000\ h$
$g_9(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$D_m - D_r > D_o + 2e$		

表中的 $Q_{\max} = 4.08 \times 10^{-3} |R|/Z$; s 为安全系数; $[\sigma_c]$ 为许用压应力; D_o 为行星轮传动轴直径; e 为偏心距; n_b 为转臂轴承内外圈相对转速; 寿命指数 $\epsilon = 10/3$; p 为平均当量动载荷; 基本额定动载荷 C_d 为

$$C_d = f_c L^{\frac{7}{9}} Z^{\frac{3}{4}} D^{\frac{29}{27}}$$

平均当量动载荷 p 为

$$p = |R| \left[(\sqrt{|R_x|^p} + |R_y|^p} / |R| - 0.5)^2 + 0.75 \right]$$

支承轴承的约束条件相似, 故不再赘述。

3) 考虑针齿分布圆直径 (g_{12})、摆线轮不根切条件 (g_{16})、摆线针轮接触强度 (g_{17}) 等, 如表 4 所示。

表 4 摆线针轮传动机构的约束条件

Table 4 Constraints of the cycloidal pin transmission

序号	约束条件	序号	约束条件
$g_{12}(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$2.1 \sqrt[3]{T_2} < D_z < 2.6 \sqrt[3]{T_2}$	$g_{16}(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$\frac{d_z}{D_z} < \frac{[27z_g(1-K_1^2)]^{\frac{1}{2}}}{(z_g+2)^{\frac{3}{2}}}$
$g_{13}(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$0.05D_z < B < 0.1D_z$	$h_2(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$z_g \bmod 2 = 1$
$g_{14}(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$0.5 < K_1 < 0.8$	$g_{17}(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$\sigma = 759 \sqrt{\frac{T_g Y_{1\max}}{BD_z^2}} < [\sigma'_H]$
$g_{15}(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$1.15 < K_2 < 2$		

表中 $K_2 = D_z \sin\left(\frac{\pi}{z_g}\right)/d_z$; $Y_{1\max}$ 是关于 K_1 、 K_2 和 z_g 的系数; K_2 为针径系数。

4)考虑两级传动的尺寸均衡(g_{18}),并保证最大输出转矩(g_{19}),如表 5 所示。

表 5 整体约束条件
Table 5 Overall constraints

序号	约束条件
$g_{18}(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$0.9(mz_1 + 2mz_2) < D_z + d_z < mz_1 + 2mz_2$
$g_{19}(\mathbf{X}, \mathbf{C})$	$T_2 \leq i_{16}^5 \times \left(\frac{9550P}{n}\right) \eta \leq 1.2T_2$

2 多目标优化的理论基础

2.1 MP-NSGA-II 算法

ridPSO 和 ridDE^[10-11]是适用于单目标 MINLP 问题的主流算法,不具备多目标寻优能力。笔者结合多目标进化算法 NSGA-II 提出 MP-NSGA-II。该算法继承了 NSGA-II 解集分布性良好、时间复杂度低、收敛速度快等优点,并且扩展了处理实数、整数及离散变量的能力。

求解优化问题的初始步骤是根据自变量范围矩阵随机生成编码种群,设计变量中 $\{b, D_z, d_z, B, K_1, D_m, D'_m, D_r, D'_r, L, L'\}^T$ 为连续变量, $\{z_1, z_2, Z, Z'\}^T$ 为整数变量, $\{z_g, m\}^T$ 为离散变量。在进化算法库 Geatpy 的基础上改进,如图 5 所示。

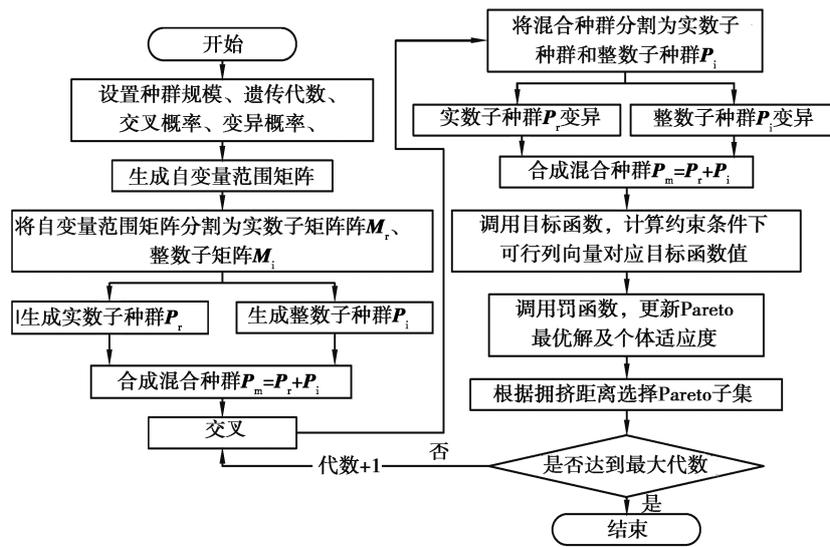


图 5 MP-NSGA-II 算法流程图

Fig. 5 MP-NSGA-II algorithm flow chart

处理混合种群的具体步骤为:

1)产生初始种群:利用设计变量的取值范围生成自变量范围矩阵,根据前 m_1 个连续变量和后 m_2 个离散变量在矩阵中的位置将其分割为 2 个子矩阵 M_r 和 M_i 。针对子矩阵 M_r ,使用 rand 函数生成一个实数值的初始种群 P_r 。针对子矩阵 M_i ,使用 rand 函数和四舍五入法生成一个十进制整数的初始种群 P_i 。

2)混合种群交叉:种群 P_r 和 P_i 均是行数为种群规模,列数为设计变量数的矩阵,将 P_i 转化为浮点数矩阵,两矩阵水平合并,生成混合种群 P_m ,采用两点交叉实现个体间染色体的重组。

3)子种群变异:将混合种群分割为子种群 P_r 和 P_i , P_i 转化为整数矩阵。采用实数值高斯变异算子对 P_r 进行变异,整数值变异算子实现矩阵 P_i 中个体突变,并将两矩阵合成混合种群 P_m 。

由于截断法^[9]只能处理连续的整数变量,为处理 MIP(mixed integer programming)问题中的离散变量,

提出一种基于数组索引的离散变量通用编码方案如图 6。将离散变量 Z_d 的 n_d 个可取值设为数组 Z_{arr} , 数组索引编码为取值 $(0, 1, \dots, n_d - 1)$ 的整数子种群 Z_{num} 。在评估函数值和限制条件的阶段, 根据数组 Z_{arr} 和数组索引种群 Z_{num} 解码出离散子种群 Z_{dis} 。

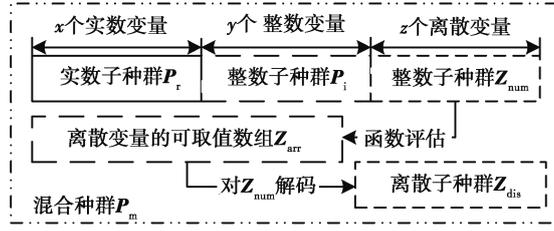


图 6 离散变量通用编码方案

Fig. 6 Discrete variable universal coding scheme

为增强种群的分布性并降低计算代价, 引入考虑拥挤距离的非支配排序。由于计算欧氏距离的效率较低, 采用差分计算目标值的偏移量占比代表拥挤距离。根据混合种群个体目标值由小到大排序, 两相邻个体 x_i 和 x_j 间的拥挤距离定义为

$$d_c = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{f(x)_{\max} - f(x)_{\min}} \quad (10)$$

式中: $f(x)$ 是个体 x 的目标值, $f(x)_{\max}$ 和 $f(x)_{\min}$ 分别是混合种群中最大和最小的目标值。根据拥挤距离更新个体的适应度 V_{fit} , 用于选择下一代个体。

2.2 双加点准则 Kriging 代理

利用拉丁超立方试验设计在设计变量空间内采样, 得到 Kriging 代理模型的初始样本点, 样本点满足使下式取得最小值:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{\|x_i - x_j\|^2}, \quad (11)$$

式中: $\|x_i - x_j\|$ 为两样本点间距离, N 为样本点的数量。

Kriging 代理模型定义了设计变量 x 与预测值 y 的关系, 表达式^[8]为

$$y(x) = F(\beta, x) + z(x), \quad (12)$$

式中: $F(\beta, x)$ 为设计变量空间的全局模型, $z(x)$ 为按 $N(0, \sigma_z^2)$ 随机分布的局部偏差, $z(x)$ 的统计特征为

$$\begin{cases} E[z(x)] = 0, \\ \text{Var}[z(x)] = \sigma_z^2, \\ \text{cov}(z(x_i), z(x_j)) = \sigma_z^2 R(x_i, x_j). \end{cases} \quad (13)$$

$R(x_i, x_j)$ 是用于刻画样本点 x_i 和 x_j 间关联程度的相关模型, 通常采用高斯相关模型

$$R(x_i, x_j) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n_v} \theta_k |x_i^k - x_j^k|^2\right), \quad (14)$$

式中: n_v 是设计变量的维数; θ 是待定的相关参数向量; x_i^k 、 x_j^k 和 θ_k 分别是 x_i 、 x_j 和 θ 的第 k 个分量。

利用线性加权插值方法得到 Kriging 模型在预测点 x 处的响应值和预测方差:

$$\hat{y}(x) = F(\beta, x) + r^T(x) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{g} - \hat{\beta} F), \quad (15)$$

$$\hat{e}^2(x) = \sigma^2 \left[1 - r^T \mathbf{R} r + \left[\frac{(1 - \mathbf{q}^T \mathbf{R}^{-1} r)^2}{\mathbf{q}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{q}} \right] \right], \quad (16)$$

式中: \mathbf{R} 是相关模型矩阵; $r(x)$ 是 x 点与样本点间的相关模型向量; \mathbf{g} 是样本点响应的向量; \mathbf{q} 是元素均为 1 且个数为 n_v 的单位列向量。

在优化过程中添加样本点可有效提高代理模型的精度, 通常选择在期望提高 (EI) 或均方误差 (MSE) 较大处加点。为有效利用进化算法优化过程中的信息, 将 Pareto 最优集引入加点准则。在迭代过程中根据 Pareto 集的拥挤距离选择分散样本点更新 Kriging 模型。单次迭代中均方误差较大处加点数 S_E 和 Pareto

最优解处加点数 S_P 分别为

$$S_E = \left[\frac{g - g_c}{g} \cdot C_{E1} + C_{T1} \right], S_P = \left[\frac{g_c}{g} \cdot C_{E2} + C_{T2} \right], \quad (17)$$

式中: g 是迭代总次数; g_c 是当前迭代数; C_E 和 C_T 分别是调整系数和最小加点数。

2.3 熵权法 Pareto 选优

熵权法是一种客观赋权方法,利用决策指标的熵计算熵权值,在 i 个性能指标 X_1, X_2, \dots, X_i, j 个 Pareto 最优解的评价问题中,第 p 个性能指标 $X_p = \{x_1, x_2, \dots, x_j\}$, X_p 的熵 H_p 定义为

$$H_p = -k_j \sum_{q=1}^j f_{pq} \ln f_{pq} \quad (p = 1, 2, \dots, i), \quad (18)$$

式中: $f_{pq} = \frac{r_{pq}}{\sum_{q=1}^j r_{pq}}, k_j = \frac{1}{\ln j}$ 。

归一化后的指标 $r_{pq} = \frac{X_{pq} - \min(X_p)}{\max(X_p) - \min(X_p)}$ 。指标的熵越大,熵权值越小,熵权值 w_p 定义为

$$w_p = \frac{1 - H_p}{i - \sum_{p=1}^i H_p}. \quad (19)$$

3 优化方法的验证及实现

3.1 MP-NSGA-II 评估

为评估 MP-NSGA-II 算法的有效性,对文献[11]中的 14 个 MINLP 问题进行仿真,已知最优源自 MDE、MDELS、MDEIHS、ridPSO 和 ridDE。

表 6 均为最小化目标问题,MP-NSGA-II 的种群规模为 1 000。为体现算法的收敛特性,进化代数设为 10 000。MP-NSGA-II 单次运行最优解与已知最优差距小于 0.1%,并改进了 3 个已知最优解: $P_5 (x = 1.374\ 823\ 1, y = 1), P_9 (x = [27, 27, 27], y = [88, 44]), P_{12} (x = [0.902\ 19, 0.887\ 75, 0.949\ 18, 0.848\ 72], y = [5, 5, 4, 6])$ 。由于 P_7 中已知最优的自变量 $x_2 = 0$ 时目标函数分母为 0,原解不成立。

表 6 MINLP 基准问题仿真
Table 6 MINLP benchmark simulation

序号	已知最优	MP-NSGA-II	最优代数	序号	已知最优	MP-NSGA-II	最优代数
P_1	85.500 000	85.500 020	3 417	P_8	3.557 464	3.558 061	89
P_2	7.666 566	7.667 180	1	P_9	-32 217.427	-35 270.129	8
P_3	4.579 582	4.579 589	2 034	P_{10}	-0.793 323	-0.793 323	50
P_4	2.000 000	2.000 001	2 699	P_{11}	-0.974 565	-0.974 565	1
P_5	2.124 470	2.124 468	6 444	P_{12}	-0.999 949	-0.999 954	153
P_6	1.076 555	1.076 625	9 994	P_{13}	5 850.383 76	5 850.500 79	1 625
P_7	99.239 635			P_{14}	-75.134 168	-75.133 805	3 864

3.2 Kriging 近似模型

选择影响摆线针轮间刚度 K'' 的 $\{z_g, D_z, d_z, K_1, B\}^T$ 为设计变量,利用拉丁超立方试验设计(LHS)在 5 个设计变量的取值范围内随机选取 32 个样本点。利用 Abaqus 计算各样本点对应的仿真值,采用 pyKriging 模块中的 train() 和 predict() 函数构建变量与预测值间的 Kriging 代理模型。图 7 是以 K_1 和 z_g 为自变量的 Kriging 可视化模型,可见 Kriging 响应面提供了梯度信息,降低了目标函数的非线性,避免了陷入局部最优。

采用复相关系数 R^2 检验拟合模型的精度为

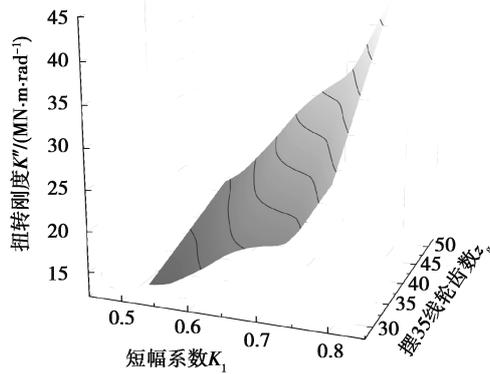


图 7 Kriging 可视化模型

Fig. 7 Kriging visual model

$$R^2 = \frac{\sum_{u=1}^v (\hat{y}_u - \bar{y})^2}{\sum_{u=1}^v (y_u - \bar{y})^2}, \quad (20)$$

式中： v 是检验模型的样本点数量； \hat{y}_u 和 y_u 分别是第 u 个样本点的预测值与仿真值； \bar{y} 是仿真值的平均值。

复相关系数越接近 1，近似模型的精度越高。选择 16 个样本点检验 Kriging 模型的精度，如图 8 所示。检验得复相关系数 R^2 为 0.920 8，说明该代理模型的精度能够满足结构优化的需要。

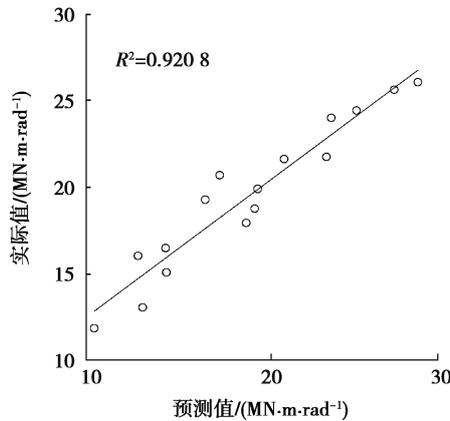


图 8 Kriging 模型精度检验

Fig. 8 Precision validation of the Kriging model

3.3 结构优化子程序

RV 减速器的优化目标为 $\{\eta, V, K'\}^T$ ，约束函数为几何及应力约束，优化模型为

$$\begin{cases} \min [-\eta(\mathbf{X}, \mathbf{C}), V(\mathbf{X}, \mathbf{C}), -K'(\mathbf{X}, \mathbf{C})], \\ \text{s.t. } g(\mathbf{X}, \mathbf{C}) \leq 0, \\ h(\mathbf{X}, \mathbf{C}) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

式中： $g(\mathbf{X}, \mathbf{C})$ 为不等式约束； $h(\mathbf{X}, \mathbf{C})$ 为等式约束。

由上述的优化模型及算法原理，以 PySide2 为开发框架，编写一体化结构 RV 减速器设计软件。其优化子程序如图 9 所示，由基本参数及设计变量设置、优化算法参数设置及优化结果输出组成。

根据 RV 减速器的实际工况给出 RV 减速器的动力学及结构基本参数，如图 9 左上。根据 RV 减速器的设计要求及 BAJ-25E 减速器的设计参数，初算设计变量范围，如图 9 左下。

设置 MP-NSGA-II 算法的种群规模为 3 000，遗传代数为 1 000，代沟为 0.5，交叉概率为 90%，变异概率

为 10%。选择方式为轮盘赌选择,重组方式为两点交叉。Pareto 前沿如图 10 所示,可知优化目标间相互制约,需从解集中优选理想解。



图 9 一体化结构 RV 减速器设计软件界面

Fig. 9 Integrated RV reducer design software interface

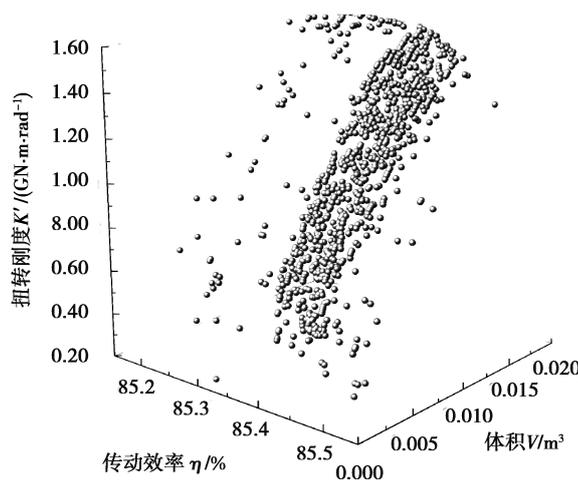


图 10 Pareto 前沿

Fig. 10 Pareto frontier

生成 RV 减速器的结构及性能参数表如图 9 右下所示。设定传动效率及扭转刚度下限和体积上限,以缩减 Pareto 最优解集的规模。

4 结果与分析

各优化目标通过结构参数相互耦合,利用两目标的 Pareto 前沿分析优化目标间的耦合关系,为后续的 Pareto 选优提供依据,如图 11 所示。

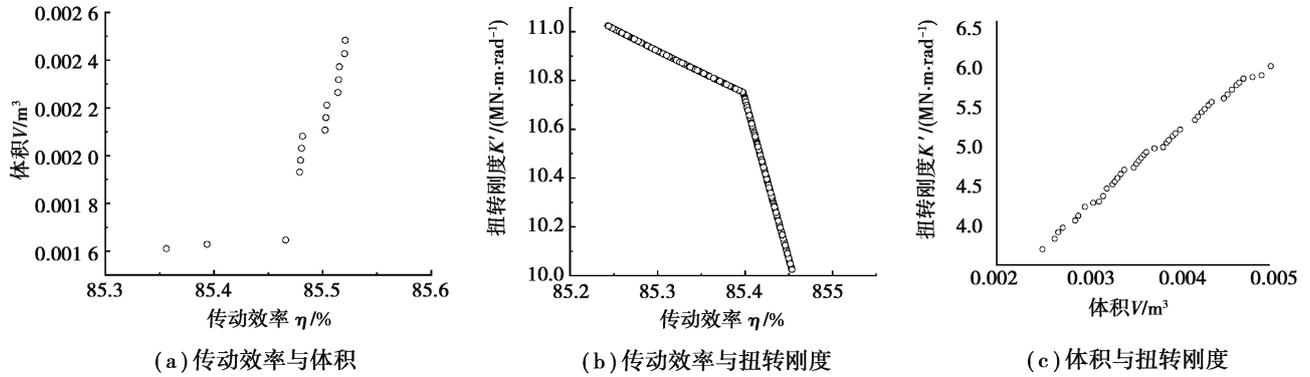


图 11 各优化目标间的耦合关系

Fig. 11 Coupling relationships between optimization objectives

从图 11(a)和(b)可看出扭转刚度和体积变化时,传动效率维持在 85.2%~85.6%,与其余优化目标的耦合关系不显著。11(c)表明体积与扭转刚度成显著正相关。因此,主要考虑体积和扭转刚度的设计要求,初步筛选 5 个设计方案如表 7 所示。

表 7 初选设计方案

Table 7 Preliminary design selection

方案	$\eta/\%$	V/m^3	$K'/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$
1	85.432	0.002 227 830	3 093 751.546
2	85.417	0.002 128 625	3 110 297.437
3	85.417	0.002 072 459	2 985 562.116
4	85.181	0.002 236 448	3 385 894.979
5	85.284	0.002 250 689	3 248 866.264

采用熵权法,将性能指标决策矩阵归一化,求解各指标的信息熵 H_p ,并计算各目标熵权值:

$$\omega_p = [0.293\ 2, 0.318\ 6, 0.388\ 2], p = 1, 2, 3.$$

由熵权值 ω_p 及归一化指标 r_{pq} 对各方案评分,为

$$Z_q = r_{1q}\omega_1 - r_{2q}\omega_2 + r_{3q}\omega_3 \quad (q = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (22)$$

根据 Z_q 排序,选择理想方案 2。BAJ-25E 的结构参数与优化后的 RV 减速器参数如表 8 所示。

表 8 优化参数对比及敏感性分析

Table 8 Comparison of optimized parameters and sensitivity analysis

变量	结构参数		K' 敏感性/%	
	初始值	优化值	-1%	+1%
z_1	19	22		
z_2	57	59		

续表 8

变量	结构参数		K' 敏感性/%	
	初始值	优化值	-1%	+1%
b/mm	10	8	-0.004	0.004
m	1.25	1.25		
z_g	39	41		
D_z/mm	165	163.06	-0.373	0.366
d_z/mm	7	10	0.040	-0.040
B/mm	14	12.62	-0.042	0.041
K_1	0.727 3	0.800 0	-0.549	0.541
D_m/mm	41.2	47.04	0	0
D'_m/mm	36	41.95	-0.064	0.061
D_r/mm	8	6.80	0	0
D'_r/mm	11	8.12	0.006	-0.006
Z	15	20		
Z'	9	15		
L/mm	12	12.06	-0.442	0.438
L'/mm	13.5	11.53	-0.271	0.267
$\eta/\%$	84.37	85.42		
V/m^3	0.002 165 225	0.002 128 625		
$K'/(N \cdot m \cdot \text{rad}^{-1})$	2 021 947.04	3 110 304.312 5		
i_{16}^5	121	113.64		

由表 8 知,经 MP-NSGA-II 算法优化可直接获得符合约束条件的优化值,无需圆整处理。与初始值相比,优化解的传动效率提升了 1.24%,体积减小了 1.69%,扭转刚度增大了 53.83%。

在制造过程中,尺寸参数可能出现 1%左右的偏差^[3],对性能指标的敏感性分析有助于指导实际生产中的误差控制。研究连续变量变化±1%对优化后的减速器扭转刚度的影响,如表 8。可见 D_z 、 K_1 、 L 和 L' 对扭转刚度的影响均超过 0.5%,其它参数波动的影响较小,均低于 0.2%。

5 结 论

1)分析了影响 RV 减速器性能的结构参数,综合 17 个设计变量,3 个目标函数和 21 个约束条件建立了结构优化的数学模型。

2)提出 MP-NSGA-II 算法,利用 MINLP 基准问题测试了改进算法的性能,并改进了 3 个已知最优解,证明了该算法的有效性。

3)结合 Kriging 与 MP-NSGA-II 得到 Pareto 前沿,利用熵权法完成 Pareto 选优,有效提高了 RV 减速器的综合性能。

参考文献:

- [1] Wang J, Luo S M, Su D Y. Multi-objective optimal design of cycloid speed reducer based on genetic algorithm[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 102: 135-148.
- [2] Wang Y L, Qian Q J, Chen G D, et al. Multi-objective optimization design of cycloid pin gear planetary reducer[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2017, 9(9): 1-10.
- [3] Jat A, Tiwari R. Multi-objective optimization of spherical roller bearings based on fatigue and wear using evolutionary algorithm[J]. Journal of King Saud University - Engineering Sciences, 2020, 32(1): 58-68.
- [4] 杨玉虎, 朱临宇, 陈振宇, 等. RV 减速器扭转刚度特性分析[J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版), 2015, 48(2): 111-118.
Yang Y H, Zhu L Y, Chen Z Y, et al. Analysis of the characteristics of torsional stiffness of RV reducer[J]. Journal of Tianjin University (Science and Technology), 2015, 48(2): 111-118.(in Chinese)
- [5] Liu J Y, Matsumura S, Chen B K, et al. Torsional stiffness calculation of double-enveloping cycloid drive[J]. Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing, 2012, 6(1): 2-14.
- [6] Meng Y H, Wu C L, Ling L P. Mathematical modeling of the transmission performance of 2K-H pin cycloid planetary mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(7): 776-790.
- [7] 徐永贤, 何卫东, 王洪, 等. RV 传动刚度计算方法[J]. 大连铁道学院学报, 1999, 20(2): 18-23.
Xu Y X, He W D, Wang H, et al. A method for calculating the rigidity of RV device[J]. Journal of Dalian Railway Institute, 1999, 20(2): 18-23.(in Chinese)
- [8] Kaymaz I. Application of kriging method to structural reliability problems[J]. Structural Safety, 2005, 27(2): 133-151.
- [9] Deep K, Singh K P, Kansal M L, et al. A real coded genetic algorithm for solving integer and mixed integer optimization problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 212(2): 505-518.
- [10] Datta D, Figueira J R. A real-integer-discrete-coded particle swarm optimization for design problems[J]. Applied Soft Computing, 2011, 11(4): 3625-3633.
- [11] Datta D, Figueira J R. A real-integer-discrete-coded differential evolution[J]. Applied Soft Computing, 2013, 13(9): 3884-3893.
- [12] 戴曙. 机床滚动轴承应用手册[M]. 北京:机械工业出版社, 1993.
Dai S. Machine tool rolling bearing application manual[M]. Beijing: China Machine Press, 1993. (in Chinese)
- [13] 董向阳, 邓建一, 陈建平. RV 传动机构的受力分析[J]. 上海交通大学学报, 1996, 30(5): 65-70, 84.
Dong X Y, Deng J Y, Chen J P. Force analysis of RV transmission mechanism[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 1996, 30(5): 65-70, 84.(in Chinese)
- [14] 陈川. RV 减速器静力学与动力学研究[D]. 天津:天津大学, 2017.
Chen C. Research on statics and dynamics of RV reducer[D]. Tianjin: Tianjin University, 2017.(in Chinese)
- [15] 何卫东, 李力行, 徐永贤, 等. 高精度 RV 传动的受力分析及传动效率[J]. 机械工程学报, 1996, 32(4): 104-110.
He W D, Li L X, Xu Y X, et al. Analysis on the forces and efficiency of RV transmission for high precision[J]. Journal of Mechanical Engineering, 1996, 32(4): 104-110.(in Chinese).

(编辑 罗敏)