

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2021.09.012

# 基于超模博弈的认知无线 Ad hoc 网络分布式功率控制技术

李湘鲁<sup>1</sup>, 侯冬<sup>2</sup>, 田杰<sup>1</sup>

(1. 中国工程物理研究院 电子工程研究所, 四川 绵阳 621900;

2. 电子科技大学 自动化工程学院, 成都 611731)

**摘要:** 考虑一种交织(Interweave)模式下的单跳认知无线 Ad hoc 网络(CRAHN)应用场景, 针对次用户(SU)组成的 Ad hoc 网络提出一种分布式功率控制技术, 以最大化提高次网络容量。SU 网络通过频谱感知来探测主用户(PU)所在授权频段的使用情况。一旦授权频段空闲, 次网络中的 SU 将利用授权频谱进行并发通信, 目标是通过优化各 SU 的发射功率, 以达到次网络频谱效率最大化。首先根据应用场景给出了网络容量优化近似模型, 为了解决该非凸问题, 将网络容量优化模型建立为等效博弈模型, 并在不同的 SINR 条件下证明了 Nash 均衡的存在性和唯一性, 最终提出基于 Gradient Play 的分布式功率控制算法来实现资源最优分配。仿真结果表明, 该算法可在保证收敛性的同时, 支持一定的并发通信用户数、提高该网络系统的频谱效率。

**关键词:** 频谱效率; 认知无线 Ad hoc 网络; Gradient Play; 超模博弈

**中图分类号:** TP393

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-582X(2021)09-117-15

## Distributed power control technique of cognitive radio Ad hoc network based on supermodel game

LI Xianglu<sup>1</sup>, HOU Dong<sup>2</sup>, TIAN Jie<sup>1</sup>

(1. Institute of Electronic Engineering, China Academy of Engineering Physics, Mianyang, Sichuan 621900, P. R. China; 2. School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, P. R. China)

**Abstract:** In this paper, a distributed power control technique is proposed for Ad hoc network composed of secondary users (SU) within a single-hop cognitive radio Ad hoc network (CRAHN) application scenario in Interweave mode to maximize the capacity of the secondary network. Once authorized spectrum becomes idle, SUs in the secondary network will use authorized spectrum for concurrent communication, which aims at optimizing the transmission power of each SU so as to optimize the network spectrum efficiency. We first introduce the optimization approximation model of network capacity according to the given application scenario. In order

**收稿日期:** 2020-01-12

**基金项目:** 中国工程物理研究院基础研究基金(CX20200010); 国家自然科学基金资助项目(61771410, 61871084, 61601084)。

Supported by the Fundamental Research Foundation from Chinese Academy of Engineering Physics(CX20200010) and Supported by National Natural Science Foundation of China (61771410, 61871084, 61601084).

**作者简介:** 李湘鲁(1983—), 男, 博士, 副研究员, 主要从事数字信号处理、无线通信系统和无线网络优化等研究, (Tel) 0816-2484567, (E-mail) blue1xl@163.com。

**通讯作者:** 田杰(1982—), 男, 博士, 副研究员, 主要从事无线网络优化和高精度时频同步方向研究, (Tel) 0816-2487566, (E-mail) tianjie@caep.cn。

to solve the non-convex problem, we establish the equivalent game model based on the network capacity optimization problem. Then we prove the existence and uniqueness of Nash equilibrium under the condition of different SINR. Finally, we propose a distributed power control algorithm based on Gradient Play method to realize optimal resource allocation. Simulation results show that the proposed algorithm can support a certain number of concurrent communication users and improve the spectral efficiency of the network system to a certain degree.

**Keywords:** spectral efficiency; cognitive wireless Ad hoc network; Gradient Play; supermodel game

数十年来,无线网络技术得到了空前发展,通信终端规模和无线数据业务量也呈现井喷式增长,频谱资源日渐稀缺,频谱分配饱和与频谱利用率低下也亟待解决。认知无线网络(CRN, cognitive radio network)技术允许多个次用户(SU, secondary user)通过频谱感知来探测授权频谱上主用户(PU, primary user)的活动性,利用动态频谱接入(DSA, dynamic spectrum access)来提高频谱利用率,在保证 PU 通信的前提下增加 SU 网络传输的业务种类和质量<sup>[1-2]</sup>。其中,干扰管理的功率控制、吞吐量优化及能量优化问题得到广泛关注。

单跳认知无线 Ad hoc 网络(CRAHN, cognitive radio ad hoc network)并发通信场景由 PU 系统和 SU 系统组成。其中,PU 对授权频段具有绝对优先使用权,以一定概率随机使用授权频段信道;而各 SU 组成的分布式网络,缺乏中心设施的统一资源调度,各节点发射机的不同功率等级将对网络系统带来不同性能影响和网内干扰效果。因此,多个 SU 节点需通过分布式功率控制方法在最大化提高频谱效率(SE, spectrum efficiency)同时减轻网内干扰。CRAHN 中的 SU 主要采用交织(interweave)、覆盖(overlay)和重叠(underlay)模式来访问授权频谱<sup>[1]</sup>。在 Underlay 模式下,SU 可使用不超过干扰阈值的功率与 PU 进行数据并行传输<sup>[2]</sup>。在 Overlay 模式下假设 PU 与 SU 间存在良好合作关系,SU 需要进行频谱感知并同时服务自己与 PU 的通信业务<sup>[3-4]</sup>。在 Interweave 模式下,SU 同样使用频谱感知探测频谱空洞,但 SU 网络独立通信、不需要将额外能量消耗在协助 PU 上<sup>[4]</sup>。

CRAHN 中的 SU 系统一般包含多个 ST(second-user transmitter)到 SR(second-user receiver)的收发通信对,且 SU 系统将在不影响 PU 业务 QoS 前提下,对多种业务数据进行传输,这些 SU 数据业务和节点不区分优先级,得到各节点地位对等的 CRAHN 系统。由于可用频谱资源受到限制,所有节点需要共享频谱资源进行并发通信,授权频谱通过采用 Interweave 模式进行共享。因此,SU 系统所有节点需要先通过频谱感知技术判断 PU 是否占用频谱,若信道为占用状态,则次用户继续等待;反之,次用户对授权频谱进行利用。这种机制可确保 SU 系统在 PU 空闲时对授权频谱加以利用,满足 SU 系统数据传输的需求,也可避免对 PU 传输造成干扰影响;另一方面,在针对多目标的遥测网络数据传输中,SU 可根据信道中干扰强度变化,发现和规避干扰。

目前,有大量 CRN 频谱效率优化研究的文献<sup>[5-9]</sup>:1)一些方法针对 Underlay 频谱共享方式下的 CRN 系统<sup>[10-13]</sup>,该模式下 PU 和 SU 需要共存。针对 Interweave 模式的研究一部分聚焦于频谱感知<sup>[14-15]</sup>、PU 检测率和虚警率的改善<sup>[16]</sup>,但这类性能讨论并未与 SU 网络容量挂钩;另一部分基于感知-频谱共享研究 SU 网络遍历容量最大化<sup>[17-20]</sup>,但文献<sup>[17-20]</sup>等仅针对单个 SU 用户进行链路容量优化,而文献<sup>[19]</sup>需要 SU 基站进行协同感知的信息融合和判决。因此,需要对多个 CR 用户在 Interweave 模式下组成的次用户网络容量优化问题及其功率控制方法进行研究;2)在 Interweave 模式中,SU 网络可在 PU 空闲时占用授权频谱进行通信,且不用考虑对 PU 的干扰,在 PU 空闲时可将 SU 网络近似看做无线 Ad hoc 网路。目前已有一些基于博弈理论以网络容量最大化为目标提出相应功率控制算法的研究<sup>[21-26]</sup>。为简化分析难度,一些研究基于高 SINR 假设下将香农容量进行了近似<sup>[26]</sup>,或针对特殊的网络结构(如正交多址 NOMA 等)进行信道增益等参数的序列假设<sup>[21-22]</sup>,缺乏对一般 SINR 条件下博弈模型相关性质的深入分析。因此,需要考虑移动设备所受硬件水平和处理速度的限制,控制各用户间信息交互量并降低算法复杂度,对 CRAHN 的 SU 节点之间的干扰进行补偿、并达到 SU 网络容量最大化目的。

本研究有 3 个主要贡献:1)根据约束条件建立 CRAHN 容量模型并转化为等效博弈模型,利用 KKT 条件引入代表干扰代价的新变量;2)针对不同 SINR 和用户数条件下的等效博弈模型进行了等效博弈模型的超模性证明;3)提出该场景下基于 Gradient Play 方法的分布式资源分配算法,并在不同功率、干扰和 QoS 条件下进行仿真,该算法所需交换信息少,相比 Best Response 方法具有更稳健的收敛性保证。

### 1 系统模型

设想一个由单个 PU 和 SU 网络组成的通信应用场景。SU 网络包含  $L = \{1, \dots, L\}$  条收发通信链路,每条通信链路分别包含一个 SU 发射机  $ST_l$  和一个 SU 接收机  $SR_l$ ,SU 网络节点均采用 Interweave 方式与 PU 共享频谱,在不影响 PU 业务 QoS 的前提下,对多 SU 数据业务进行不区分优先级的单跳并发传输,构成由多个对等 SU 节点组成的单跳 CRAHN 系统,如图 1 所示。假设用户位置均匀分布在可互相影响的同区域内,网络中不存在中心设施,所有 SU 对一定带宽的授权频谱进行共享。PU 具有较高 QoS 要求,若主系统和次系统同时工作,则次系统将严重影响主系统传输性能,因此,主系统和次系统不能同时工作;另一方面,SU 网络中各用户间的并发传输会不可避免地产生用户间干扰(MUI, multi-user interference)。假设 SU 网络内各 SU 都可得到信道状态信息(CSI, channel state information)完全知识,以及所有信道遵循块衰落(block fading)方式,即在数据帧周期内信道增益(channel gain)为常数,但不同时隙之间的信道增益可能不同。

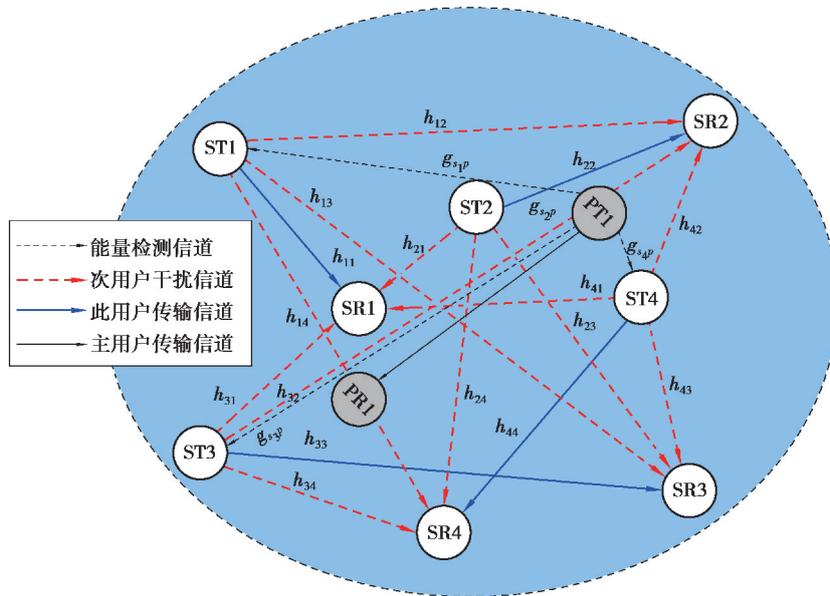


图 1 4 个用户组成的 CRAHN 网络架构

Fig. 1 CRAHN network architecture composed of 4 users

#### 1.1 频谱感知过程

根据 CR 技术的 Interweave 模式思想,每个数据帧(时隙)可分为 2 个阶段:1)各 SU 首先进行基于能量探测(energy detection)的频谱感知,判断频谱占用情况;2)若频谱被 PU 占用,则所有 SU 保持静默;反之,SU 网络中所有节点利用分布式功率控制算法最大程度降低网内干扰、提高 SU 网络容量。假设频谱空洞时间足够 SU 网络完成多个时隙的频谱感知和数据传输操作,则系统时隙的组成见图 2。



图 2 CRAHN 系统时隙结构图

Fig. 2 Time slot structure diagram of CRAHN system

其中,  $\tau$  为频谱感知时间,  $T - \tau$  为数据传输时间。可知每帧数据时隙包含: 1) 频谱感知时间为  $\tau$ , SU 需完成 PU 状态的确定; 2) 在  $T - \tau$  数据传输时间内, SU 基于频谱感知结果, 决定静默或进行基于功率控制的数据传输。由于 SU 硬件资源有限, 系统中各 SU 采用能量检测来进行频谱感知以降低运算复杂度。假设所有 SU 间实现了同步且与 PU 间距离相近, PT 发射功率足够强, 使得所有 SU 对频谱可用性判决一致,  $SU_l$  感知到授权频谱上 PU 存在性可由以下假设表示<sup>[23]</sup>

$$H_{l0}: r_l(i) = n_l(i), \quad (1)$$

$$H_{l1}: r_l(i) = s(i)g_{slp} + n_l(i), \quad (2)$$

式中: 对  $l = 1, 2, \dots, L$  和  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $L$  为次系统中 SU 的个数,  $N$  为采样数;  $H_{l0}$  表示  $SU_l$  关于 PU 信号不存在的假设,  $H_{l1}$  表示 PU 信号存在假设,  $s(i)$  和  $u_l(i)$  分别表示 PU 发射信号和  $SU_l$  接收机处噪声采样值, 均为独立同分布随机变量, 并遵循正态分布  $N(0, \sigma_s^2)$  和  $N(0, \sigma_n^2)$ ,  $g_{slp}$  为从 PU 发射机到  $ST_l$  发射机间的 AWGN 信道增益,  $r_l(i)$  为  $SR_l$  处接收信号。若 PU 占用授权频谱时  $SU_l$  感知结果为  $H_{l1}$ , 则认为  $SU_l$  做出正确判决, 其概率为相应的检测率  $P_d$ 。反之, PU 未占用频谱而 SU 的检测结果相反, 则该概率为虚警概率  $P_f$ 。因此, SU 系统仅在  $H_{l0}$  假设下感知到 PU 为空闲时, SU 才能进行数据传输并产生效用回报, 其概率为  $(1 - P_f)$ , 采用香农容量作为 SU 网络的效用尺度。

## 1.2 次用户传输容量模型

根据图 2 所示系统时隙结构, 系统以概率  $(1 - P_f)$  进行数据传输, 使用链路香农容量作为系统效用函数。在表示  $SU_l$  所在链路的香农容量时, 该函数是关于  $SU_l$  接收信干噪比 (SINR, signal to interference plus noise power ratio) 的函数, 即使  $SINR_l$  可表示为

$$\gamma_l(p) = \frac{p_l h_{ll}}{n_0 + \sum_{l \neq k} p_k h_{lk}} = \frac{p_l h_{ll}}{n_0 + I_l(p_{-l})}, \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_L)$  是所有 ST 的发射功率矢量;  $h_{ll}$  表示从  $ST_l$  到  $SR_l$  的信道增益;  $h_{lk}$  表示从  $ST_k$  到  $ST_l$  的信道增益;  $n_0$  为  $SR_l$  的背景噪声且其满足高斯分布  $n_0 \sim (0, \sigma^2)$ , 使用  $I_l(p_{-l})$  来表示  $SU_l$  所接收到的来自其他用户干扰 MUI 的总和。

从式(3)中可以看出, 由于次用户网络中自干扰的存在, 各次用户  $l$  的效用函数关于其他  $SU_k$  的发射功率变量  $p_k$  在分母具有强耦合性。因此, 当主用户为空闲且没有虚警发生时, 基于香农公式可得到次用户 Ad hoc 网络效用函数——对数效用函数 (logarithmic utility function), 每个  $SU_l$  所在链路的香农容量  $c_l(\gamma_l)$  可表示为

$$c_l(\gamma_l) = B \log(1 + \gamma_l(p)) = B \log \left( 1 + \frac{p_l h_{ll}}{n_0 + \sum_{l \neq k} p_k h_{lk}} \right), \quad (4)$$

其中,  $B$  为多个 SU 所占用的总带宽。在 SINR 远大于 1 的高 SINR 场景中, 对数效用函数  $u_l(\gamma_l)$  可根据  $1 + \gamma_l(\mathbf{p}) \approx \gamma_l(\mathbf{p})$  将香农容量近似为  $u_l(\gamma_l) = \theta_l \log(1 + \gamma_l) \approx \theta_l \log(\gamma_l)$ ,  $\theta_l$  为网络系统的服务优先级权重因子。换句话说, 香农容量可以近似用对数效用函数  $\log(\gamma_l)$  进行表示。而在低 SINR 场景, 用户数据率关于 SINR 呈近似线性的关系, 即用户效用函数与容量的对数值成比例变化。接着, 综合考虑次用户的虚警和 PU 的活跃概率等因素, 可以得到新的  $SU_l$  所在链路的容量公式<sup>[23]</sup>

$$u_l(\gamma_l) = C_1 \theta_1 P_d + C_0 \theta_1 (1 - P_d) + c_l(\gamma_l) \theta_0 (1 - P_f) + C_1 \theta_0 P_f \approx c_l(\gamma_l) \theta_0 (1 - P_f), \quad (5)$$

其中,  $\theta_1$  和  $\theta_0$  为常数, 分别为 PU 忙和空闲的概率。如前所述, 次用户系统当且仅当  $H_0$  假设下次用户  $l$  正确感知 PU 的空闲状态时才有链路容量回报。假设在本场景中, PU 的发射功率非常大, 且频谱感知时间足够长, 则虚警  $P_f$  可忽略且为常数, 假设在多个数据时隙内 PU 均未出现, 则  $\theta_1 = 0$ , 因此在后续的次用户网络容量最大化推导和分布式功率控制算法设计过程中, 均不专门对  $P_f$  和  $\theta_x$  进行讨论。SU 分配的共享带宽  $B_w$  也是常数。设  $\theta_x (1 - P_f) B_w = B$ , 即效用函数可转化为  $u_l(\gamma_l) = c_l(\gamma_l) = B \log(1 + \gamma_l(p))$ , 且频谱效率为

$$SE_l(\gamma_l) = \frac{c_l(\gamma_l)}{B_w} = \frac{B}{B_w} \log(1 + \gamma_l(\mathbf{p})) \approx \log(1 + \gamma_l(\mathbf{p})) (\text{bit/s}) / \text{Hz}, \quad (6)$$

### 1.3 系统问题建模

根据网络效用最大化(NUM, network utility maximization)的相关描述,系统需要在每个  $SU_l, l \in L$  满足发射功率约束条件的前提下,对  $SU$  发射功率矢量  $\mathbf{p}$  进行控制,以达到  $SU$  网络内所有  $SU$  效用值总和最大化的目的。需要对链路容量代表的网络效用总和进行优化

$$\begin{aligned} \text{OP}_1: \max & \sum_{l=1}^L u_l(\gamma_l(\mathbf{p})) \\ \text{s.t.} & p_l \in P_l, \quad \forall l \end{aligned} \quad (7)$$

其中,每个  $SU_l$  的策略空间  $P_l$  是一个紧致的、具有最大值和最小值的闭合凸区间  $p_l \in P_l = [P_l^{\min}, P_l^{\max}]$ 。此外,当  $P_l^{\min} = P_l = 0$  时表示  $SU_l$  选择不进行数据传输和信号发射的特例。

从式(4)和式(7)可知,虽然  $\text{OP}_1$  的约束条件是紧致凸集,但  $\text{OP}_1$  的目标函数由于多用户决策  $\mathbf{p}_l$  之间的耦合性,造成函数  $u_l$  关于变量  $\mathbf{p}$  的非凸特性,则  $\text{OP}_1$  是一个非凸优化问题(non-convex problem)。对于该问题一般没有显示解,且其复杂度为 NP-Hard<sup>[24]</sup>。为求解  $\text{OP}_1$ ,可定义一种等效的功率控制博弈模型<sup>[25]</sup>。

## 2 等效博弈模型及超模性分析

### 2.1 等效博弈模型及代价因子

假设用户从不交换任何信息且仅选择发射功率来满足自身效用最大化目标的情况,可以得到一个非合作功率控制博弈(NPG, noncooperative power control game)模型,有如下定义

定义 1: 一个 NPG 模型可被定义为一个三元组

$$G = [L, \{P_l\}_{l \in L}, \{u_l\}_{l \in L}], \quad (8)$$

其中: 玩家集合  $L$  可对应网络  $SU_l$  集合;  $P_l = [P_l, \bar{P}_l]$  为用户策略集;  $u_l(\gamma_l)$  为支付函数(payload function)。在博弈中,每个玩家(网络用户)从策略集  $P_l$  中挑选发射功率策略,并得到收益值  $u_l(\gamma_l)$ 。 $\mathbf{p}$  表示所有用户决策组成的功率矢量,而  $SU_l$  竞争对手( $SU_k, k \neq l$ )的功率分量可被定义为  $p_{-l} = (p_1, \dots, p_{l-1}, p_{l+1}, \dots, p_M)$ 。因此  $\mathbf{p}$  又可以表示为  $\mathbf{p} = (p_l; p_{-l})$ 。支付函数  $u_l(p_l, p_{-l})$  是连续的,且在紧致集  $P_l$  上的最大化函数集被称作最优响应对应关系(best response correspondence)并可表示为  $r_l: P_{-l} \rightarrow P_l$  的映射关系。若  $p^*$  为 NCP 模型的纳什均衡(NE, nash equilibrium),当且仅当  $p^*$  是最优响应函数的不动点,即

定义 2: 当满足以下条件

$$r_l(p_{-l}^*) = \{u_l(p_l^*; p_{-l}^*) \geq u_l(p_l', p_{-l}^*) \forall p_l' \in P_l, l \in L\}, \quad (9)$$

其中,功率策略  $p^* = (p_l^*, p_{-l}^*)$  是 NCP 模型  $G$  的 NE。在达到 NE 后,由于系统效用不会进一步提高,因此各玩家不会擅自对自身策略进行重新选择。文献[25]等已经验证了由于  $SU_l$  的自私性,博弈  $G$  的唯一 NE 点将是  $p_G^* = (\bar{P}_l)_{l \in L}$ ,即每个  $ST_l$  会选择最大发射功率进行数据传输,这将极大影响系统性能,甚至造成数据传输中断。因此, $SU_l$  应为策略(功率值)的选取付出相应费用,策略与费用间形成一定对应关系的代价函数,显然该函数应为  $SU_l$  发射功率  $p_l$  的递增函数,以对策略的选取发挥有效约束作用。

利用 KKT 条件求得了代价函数表达式为<sup>[26]</sup>

$$\pi_j(p_j, p_{-j}) = - \frac{\partial u_j(\gamma_j(p_j, p_{-j}))}{\partial \gamma_j(p_j, p_{-j})} \frac{\partial \gamma_j(p_j, p_{-j})}{\partial I_j(p_{-j})} = - \frac{\partial u_j(\gamma_j(p_j, p_{-j}))}{\partial I_j(p_{-j})}, \quad (10)$$

其中,代价因子  $\pi_j(p_j, p_{-j})$  为  $ST_l$  向对其产生干扰的  $SU_j (j \neq l)$  收取的价格,因此其值为负。为了精确表示代价函数,类似文献[27],使用对数  $y_l = \log p_l$  对用户决策变量进行代换,用  $y_l$  表示分贝(decibel, 单位 dB),则可得到  $p_l = e^{y_l}$ 。这种变换是合理的,因为在无线通信系统中一般使用分贝数来描述发射功率的相对强度。因此,代换得到的变量矢量  $\mathbf{y}$  与原变量  $\mathbf{p}$  是一一对应的。经过对变量  $\mathbf{y}$  的变换,式(3)所表示的 SINR 表达式可重新写为

$$\gamma_j(p) = \frac{p_j h_{jj}}{n_0 + \sum_{k \neq j} p_k h_{jk}} \stackrel{p_j = e^{y_j}}{=} \frac{e^{y_j} h_{jj}}{n_0 + \sum_{k \neq j} e^{y_k} h_{jk}} = \frac{e^{y_j} h_{jj}}{n_0 + I_j(p_{-j})}, \quad (11)$$

从式(10)和式(11)可得到代价因子  $\pi_j(p_j, p_{-j})$  的全新表达式为

$$\pi_j(p_j, p_{-j}) = -\frac{\partial u_j(\gamma_j(p_j, p_{-j}))}{\partial \gamma_j(p_j, p_{-j})} \frac{\partial \gamma_j(p_j, p_{-j})}{\partial I_j(p_{-j})} = -u'_j \frac{\partial}{\partial I_j} \left( \frac{e^{y_j} h_{jj}}{1 + I_j(p_{-j})} \right) = u'_j \gamma_j^2 \frac{1}{e^{y_j} h_{jj}}, \quad (12)$$

其中,  $\pi_j$  完全由用户决策变量所确定。然后, 可以得到新的收益函数为

$$U_l(p_l; p_{-l}, \pi_{-l}) = u_l(p_l, p_{-l}) - p_l \sum_{j \neq l} \pi_j h_{jl}, \quad (13)$$

将式(12)的结果代入式(13)中, 可消除代价因子  $\pi$  继续化简得到

$$U_l(y_l; y_{-l}) = u_l(\gamma_l(y_l, y_{-l})) - e^{y_l} \sum_{j \neq l} u'_j \gamma_j^2 \frac{1}{e^{y_j} h_{jj}} h_{jl} = u_l(\gamma_l(y_l, y_{-l})) - \sum_{j \neq l} u'_j \gamma_j^2 A_{lj}, \quad (14)$$

其中, 设  $A_{lj} = (\exp(y_l) h_{jl}) / (\exp(y_j) h_{jj})$ 。从式(14)可知,  $SU_l$  需要最大限度提高其效用函数和代价函数间的差值, 权重在数值上等于  $ST_l$  到  $SR_k$  间信道增益。因此式(8)可变为  $G = [L, \{P_l\}_{l \in L}, \{U_l\}_{l \in L}]$ , 并对此等效博弈模型的超模性、纳什均衡、解的唯一性和相应迭代算法的设计以及收敛性进行分析和讨论。

## 2.2 博弈模型超模性和纳什均衡

在等效博弈模型  $G$  中, 每个  $ST_l$  被当作博弈中的玩家制定各自功率策略, 每个  $ST_l$  所付代价看作功率的函数。为了进行分布式资源分配算法的设计, 需要讨论博弈  $G$  的 NE 存在性和解的唯一性的条件, 并对算法收敛性进行证明。由于超模博弈在对 NE 解收敛性等方面有很多有用性质, 因此首先得到如下定理。

定理 1: 若其他用户策略  $y_{-l}$  固定, 则支付函数  $U_l$  是 1 个凹函数。

证明: 可将  $U_l$  看作效用函数  $u_l(y_l, y_{-l})$  和代价函数  $-\sum_{j \neq l} u'_j \gamma_j^2 A_{lj}$  的和值。其中, 效用函数  $u_l(y_l, y_{-l})$  为对数函数, 且在同一时隙内其他用户策略  $y_{-l}$  是固定的, 则该对数函数显然为凹函数; 此外, 代价函数也为凹函数。根据凹函数线性组合性质<sup>[28]</sup>, 定理得证。

定理 2: 等效非合作功率控制博弈  $G$  中存在至少 1 个纳什均衡。证明: 根据文献[29]所述。若要博弈模型  $G = [L, \{P_l\}_{l \in L}, \{U_l\}_{l \in L}]$  中存在纳什均衡, 则当对任何  $i = 1, \dots, N$  可满足:  $P_l$  为某欧几里得空间  $R^N$  的非空、凸和紧致子集;  $u_l(p)$  在  $p$  上为连续的, 且在  $p_l$  为拟凹的 (Quasi-concave)<sup>[30]</sup>。则博弈模型  $G = [L, \{P_l\}_{l \in L}, \{U_l\}_{l \in L}]$  中存在至少一个纳什均衡。由于优化问题  $OP_l$  的原约束变量空间  $p_l \in P_l = [P_l, \bar{P}_l]$  和变换后的新策略空间  $Y = \prod_{l \in L} [\log P_l, \log \bar{P}_l]$  均为紧凸集, 且根据定理 1, 收益函数  $U_l$  是关于  $y_l$  的连续凹函数, 则根据相关描述, 等效非合作功率控制纯策略博弈  $G$  中必然存在至少一个纳什均衡。因此定理 2 得证。

定义 3: 假设  $X \subseteq \mathbb{R}$  且  $T$  为某偏(有)序集, 若函数  $f$  在  $(x, t)$  上满足  $f: X \times T \rightarrow \mathbb{R}$  对任意  $x' \geq x$  及  $t' \geq t$  可满足  $f(x', t') - f(x, t') \geq f(x', t) - f(x, t)$ , 则称函数  $f$  具有差值递增性 (Increasing Differences), 即超模性。超模函数具有以下性质:

- 当  $t$  增加时, 选择更高  $x$  的增量增益将更大。
- 差值递增性具有对称性, 即若  $t' \geq t$ , 则  $f(x, t') - f(x, t)$  关于  $x$  为非递减函数。
- 若函数  $f$  为二阶连续可导, 则当且仅当对所有  $x, t' \geq t$  时有  $f(x, t') - f(x, t)$ , 或对所有  $x$  和  $t$ , 有  $f_{xt}(x, t) \geq 0$ , 则称函数  $f$  具有差值递增性。

定义 4: 若能满足以下条件, 则博弈模型  $G = [L, \{P_l\}_{l \in L}, \{u_l\}_{l \in L}]$  可被称为超模博弈。

- 对任意给定  $p_{-l}$ , 策略空间  $P_l$  为某欧氏空间  $R^N$  中的非空、凸的且紧致子格;
- $u_l$  关于  $(p_l, p_{-l})$  具有上半连续性 (upper semicontinuous);
- 效用函数  $u_l$  具有差值递增性, 即对用户策略  $p_l$  二阶可导且满足

$$\frac{\partial^2 U_l(p_l, p_{-l})}{\partial p_l \partial p'_l} \geq 0,$$

其中,  $p'_l$  为除玩家  $l$  外的任何其他用户的发射功率策略。由于超模博弈具有如下重要性质<sup>[26]</sup>, 说明一旦确定了博弈  $G$  的超模性, 则其最优响应收敛性可得到保证。

定理 3:若博弈模型  $G=[L, \{P_l\}_{l \in L}, \{U_l\}_{l \in L}]$  为超模博弈,则满足下列性质:

- a) NE 集合始终存在,且为非空和紧致子格(Sublattice),可逐个搜索最小和最大的 NE 值;
- b) 若  $SU_l$  从策略空间中最小(或最大)决策值更新策略,则策略值单调收敛到最小(或最大)NE;
- c)  $SU_l$  策略将位于有界区间内。若  $G$  存在唯一 NE,则策略更新可从初始值全局收敛到唯一 NE。

性质 a) 遵从文献[31]中引理;b) 遵从文献[32]中定理;c) 的证明详见文献[33]。针对不同 SINR 情况下不同用户数的认知无线网络需要满足超模性的基本条件进行分析。证明以下定理。

定理 4:当网络用户数  $L=2$  时,若存在  $p_l$  可满足条件使  $c \leq \sqrt{\frac{d^2 A_{12}(2dA_{12}-1)}{A_{21}}}$ , 则博弈模型  $G=[L, \{P_l\}_{l \in L}, \{u_l\}_{l \in L}]$  为超模博弈。其中,  $p_l = e^{y_l}$ ,  $c = \frac{\gamma_1}{(1+\gamma_1)}$ , 以及  $d = \frac{\gamma_2}{(1+\gamma_2)}$ 。

证明:每个  $SU_l$  策略空间非空,且策略空间为  $R^N$  空间的子集,所以必为 Sublattice 子格,因此,必满足定义 3 条件 a)。  $U_l$  的函数形式显然连续且二阶可微。当网络用户数  $L=2$  时,  $SU_l$  效用函数为

$$U_1(y_1, y_2) = u_1(\gamma_1(y_1, y_2)) - u_1' \gamma_2^2 A_{12}; U_2(y_2, y_1) = u_2(\gamma_2(y_2, y_1)) - u_1' \gamma_1^2 A_{21}, \quad (15)$$

式(15)中 2 个效用函数式具有对称性,分别对两式计算对策略  $y_1$  和  $y_2$  的交叉偏微分,省略计算过程可得

$$\frac{\partial U_1(y_1; y_2, \pi_2)}{\partial y_1} = u_1' \gamma_1 - \left( \frac{\partial u_1'}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial y_1} \gamma_2^2 A_{12} + 2u_1' \gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial y_1} A_{12} + u_1' \gamma_2^2 \frac{\partial A_{12}}{\partial y_1} \right), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y_1 \partial y_2} = & -\gamma_1^2 A_{21} (u_1'' \gamma_1 + u_1') + u_1''' \gamma_2^5 A_{12}^2 + 2u_1'' \gamma_2^4 A_{12}^2 + \\ & 2(u_1'' \gamma_2^4 A_{12}^2 + u_1' \gamma_2^3 A_{12}^2) - (u_1'' \gamma_2^3 A_{12} + u_1' \gamma_2^2 A_{12}), \end{aligned} \quad (17)$$

其中,式(17)即为  $L=2$  时,  $SU_2$  收益函数  $U_2$  二阶交叉偏导。为区别以往研究仅针对高 SNR 场景的情况,对一般 SNR 场景确定了满足超模性的条件。

a) 高 SINR 情况。在高 SINR 下,效用函数可近似为  $u_l(\gamma_l) = \log \gamma_l$ , 则其关于变量  $\gamma_l$  的一阶、二阶和三阶导数分别为  $u_l'(\gamma_l) = 1/\gamma_l$ ,  $u_l''(\gamma_l) = -1/\gamma_l^2$  和  $u_l'''(\gamma_l) = 2/\gamma_l^3$ 。代入公式(17),可得  $\frac{\partial^2 U_1}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial y_2 \partial y_1} = 0$ 。同时根据对称性可得  $\frac{\partial^2 U_2}{\partial y_2 \partial y_1} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial y_1 \partial y_2} = 0$ 。满足了定义 3 中的条件 b), 说明在该场景下  $G$  为超模博弈;

b) 一般 SINR 情况。在一般 SINR 下,效用函数为  $u_l(\gamma_l) = \log(1+\gamma_l)$ , 其关于变量  $\gamma_l$  的一阶、二阶和三阶导数分别为  $u_l'(\gamma_l) = 1/(1+\gamma_l)$ ,  $u_l''(\gamma_l) = -1/(1+\gamma_l)^2$  和  $u_l'''(\gamma_l) = 2/(1+\gamma_l)^3$ 。代入式(17),可得

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial y_1 \partial y_2} = -\frac{\gamma_1^2}{(1+\gamma_1)^2} A_{21} - \frac{\gamma_2^2}{(1+\gamma_2)^2} A_{12} + \frac{2\gamma_2^3}{(1+\gamma_2)^3} A_{12}^2, \quad (18)$$

根据式(18),只要满足  $\frac{\partial^2 U_1}{\partial y_1 \partial y_2} = -\frac{\gamma_1^2}{(1+\gamma_1)^2} A_{21} - \frac{\gamma_2^2}{(1+\gamma_2)^2} A_{12} + \frac{2\gamma_2^3}{(1+\gamma_2)^3} A_{12}^2 \geq 0$ , 即可满足定义 3 条件 b)。

因此,这里令  $\frac{\gamma_1}{(1+\gamma_1)} = c$ , 以及  $\frac{\gamma_2}{(1+\gamma_2)} = d$ , 则可将式(18)改写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y_1 \partial y_2} = & 2d^3 A_{12}^2 - d^2 A_{12} - c^2 A_{21} \geq 0 \rightarrow d^2 A_{12}(2dA_{12} - 1) \geq c^2 A_{21} \\ & \sqrt{\frac{d^2 A_{12}(2dA_{12} - 1)}{A_{21}}} \geq c \end{aligned}, \quad (19)$$

则从式(19)可以看出,只要  $SU_1$  的 SINR  $\gamma_1$  满足条件  $c \leq \sqrt{\frac{d^2 A_{12}(2dA_{12} - 1)}{A_{21}}}$ , 则可满足定义 3 中条件 b)。通过对称性可知对于  $SU_2$  同样适用。则在一般 SNR 场景下  $G$  为超模博弈。定理得证。

定理 5:使用对数效用函数  $u_l(\gamma_l) = \theta_l \log(\gamma_l)$ , 当网络用户数  $L > 2$  时,若存在  $p_l = e^{y_l}$  可满足条件使当  $0 < \gamma_j A_{lj} \leq \frac{1}{2}$ , 则  $G=[L, \{P_l\}_{l \in L}, \{u_l\}_{l \in L}]$  为超模博弈,且其支付函数为凹函数。

证明:首先证明博弈  $G$  的超模性,然后证明收益函数的凹凸性。已知多用户的收益函数如式(14),分别

计算关于  $y_l$  的二阶偏导(目标函数 Hessian 矩阵的对角线项)和关于  $y_l$  与  $y_i$  的交叉偏导(非对角线项)如下(相关计算步骤从略)

$$\frac{\partial^2 U_l}{\partial y_l^2} = \gamma_l (u_l'' \gamma_l + u_l') - \sum_{j \neq l} (u_j^{(3)} \gamma_j^6 A_{lj}^3 + 6u_j'' \gamma_j^5 A_{lj}^3 - 3u_j' \gamma_j^4 A_{lj}^2 + 6u_j' \gamma_j^4 A_{lj}^3 - 6u_j' \gamma_j^3 A_{lj}^2 + u_j' \gamma_j^2 A_{lj}), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_l}{\partial y_l \partial y_i} = & -\gamma_l^2 A_{il} (u_l'' \gamma_l + u_l') - \gamma_i^2 A_{li} (u_i'' \gamma_i + u_i') + \gamma_i^3 A_{li}^2 (u_i^{(3)} \gamma_i^2 + 4u_i'' \gamma_i + 2u_i') - \\ & \sum_{j \neq i, l} \gamma_j^3 A_{lj} A_{ij} (u_j^{(3)} \gamma_j^3 A_{lj} + u_j'' \gamma_j (6\gamma_j A_{lj} - 1) + 2u_j' (3\gamma_j A_{lj} - 1)) = \frac{\partial^2 U_l}{\partial y_i \partial y_l} \end{aligned}, \quad (21)$$

其中,根据式(21),由于  $\frac{\partial^2 U_l}{\partial y_l \partial y_i} = \frac{\partial^2 U_l}{\partial y_i \partial y_l}$ ,可知收益函数的 Hessian 矩阵具有对称性。由于效用函数中权重  $\theta_l$  为常数,不失一般地设为  $\theta_l = 1$ ,表示每个用户具有相同业务优先级。

a) 证明收益函数凹凸性。

不失一般性,在高 SINR 下若  $SU_l$  使用对数效用函数  $u_l$ ,对  $\forall l$  有  $u_l'' \gamma_l + u_l' = 0$  以及  $u_l'' \gamma_l + 2u_l' > 0$ 。对于收益函数 Hessian 矩阵对角线项式(20),有  $\gamma_l (u_l'' \gamma_l + u_l') = 0$ ,可确定对角线元素为负的条件。式(20)将变为

$$\frac{\partial^2 U_l}{\partial y_l^2} = - \sum_{j \neq l} (u_j^{(3)} \gamma_j^6 A_{lj}^3 + 3u_j'' \gamma_j^4 A_{lj}^2 (2\gamma_j A_{lj} - 1) + u_j' \gamma_j^2 A_{lj} (6\gamma_j^2 A_{lj}^2 - 6\gamma_j A_{lj} + 1)), \quad (22)$$

使式(22)为负的计算较为复杂,对数函数  $u_l$ ,其三阶导数应大于零,则可得  $u_j^{(3)} \gamma_j^6 A_{lj}^3 \geq 0$ 、 $u_j'' = -\frac{\theta_j}{\gamma_j^2} \leq 0$ 。相似地,可得  $u_j' \gamma_j^2 A_{lj} \geq 0$ 。通过求解以下条件,可得到式(20)和式(22)所代表的对数效用函数 Hessian 矩阵中对角元素小于零的条件子集

$$\begin{cases} 2\gamma_j A_{lj} - 1 \leq 0, \\ 6\gamma_j^2 A_{lj}^2 - 6\gamma_j A_{lj} + 1 \geq 0. \end{cases} \quad (23)$$

从  $2\gamma_j A_{lj} - 1 \leq 0 \Rightarrow \gamma_j A_{lj} \leq \frac{1}{2}$ ,则有

$$\begin{aligned} 2\gamma_j A_{lj} - 1 &= 2 \frac{e^{y_j} h_{jj}}{1 + \sum_{k \neq j} e^{y_k} h_{jk}} \frac{e^{y_l} h_{jl}}{e^{y_j} h_{jj}} - 1 \\ &\Rightarrow e^{y_l} h_{jl} \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \sum_{k \neq j} e^{y_k} h_{jk} \right) \end{aligned}, \quad (24)$$

这表示若  $SU_j$  的 SINR 中由  $SU_l$  带来的干扰功率小于等于  $SR_j$  所接收干扰加噪声功率的一半,则  $2\gamma_j A_{lj} - 1 \leq 0$ 。此外对于条件  $6\gamma_j^2 A_{lj}^2 - 6\gamma_j A_{lj} + 1 \geq 0$ ,可根据二次函数求根公式进行求解为

$$\gamma_j A_{lj} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{12} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}, \quad (25)$$

则  $\gamma_j A_{lj}$  取值范围为  $\gamma_j A_{lj} \geq \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$  或  $0 < \gamma_j A_{lj} \leq \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$ ,结合式(20)可知,当  $\gamma_j A_{lj}$  满足  $\gamma_j A_{lj} \in \left( 0, \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \right]$  时,  $H_u(y) < 0$ ,则收益函数为凹函数。又比如,使  $\gamma_j A_{lj} = B_j$  并将对数效用函数  $u_l$  代入式(22),可等效表示为

$$\begin{aligned} 2\theta_j B_j^3 - 6\theta_j B_j^3 + 3\theta_j B_j^2 + 6\theta_j B_j^3 - 6\theta_j B_j^2 + \theta_j B_j = \\ 2\theta_j B_j^3 + 3\theta_j B_j^2 + \theta_j B_j = \\ \theta_j B_j (2B_j^2 - 3B_j + 1) \geq 0, \end{aligned} \quad (26)$$

其中,  $\theta_j$  为每个  $SU_j$  为常数的优先级权重,且  $\gamma_j A_{lj} = B_j > 0$ ,由此可解得当满足  $B_j \in (0, 1/2] \cup [1, +\infty)$  时,  $H_u(y) < 0$ ,则支付函数为严格凹函数。

b) 证明博弈模型超模性。

要证明  $G = [N, \{P_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$  具有超模性, 只需使收益函数 Hessian 矩阵的非对角项为非负。不失一般性, 在高 SINR 下当使用对数效用函数  $\theta_l \log(\gamma_l)$  时, 式(21)中有  $-\gamma_j^2 A_{ij} (u_l'' \gamma_l + u_l') - \gamma_i^2 A_{li} (u_l'' \gamma_l + u_l') = 0$ , 以及  $\gamma_i^3 A_{li}^2 (u_i^{(3)} \gamma_i^2 + 4u_i'' \gamma_i + 2u_i') = 0$ 。则可将式(21)计算为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_l}{\partial y_l \partial y_i} = & -\gamma_i^2 A_{li} (u_l'' \gamma_l + u_l') - \gamma_j^2 A_{ij} (u_l'' \gamma_l + u_l') + \gamma_i^3 A_{li}^2 (u_i^{(3)} \gamma_i^2 + 4u_i'' \gamma_i + 2u_i') - \\ & \sum_{j \neq i, l} \gamma_j^3 A_{lj} A_{ij} (u_j^{(3)} \gamma_j^2 A_{lj} + u_j'' \gamma_j (6\gamma_j A_{lj} - 1) + 2u_j' (3\gamma_j A_{lj} - 1)) = \\ & - \sum_{j \neq i, l} (2\gamma_j^3 A_{lj}^2 A_{ij} - \gamma_j^2 A_{lj} A_{ij}) \geq 0 \Rightarrow \sum_{j \neq i, l} \gamma_j^2 A_{lj} A_{ij} (2\gamma_j A_{lj} - 1) \leq 0 \Rightarrow 0 < \gamma_j A_{lj} \leq \frac{1}{2}, \quad (27) \end{aligned}$$

可得, 当  $0 < \gamma_j A_{lj} \leq \frac{1}{2}$  时, 使得  $G$  中支付函数关于  $y_l$  和  $y_i$  交叉偏导数非负。因此, 当满足该条件时, 博弈  $G$  为超模博弈, 且支付函数为严格凹函数。至此, 定理 5 得证, 另外, 由于与文献[26]应用场景相似, 因此关于  $OP_1$  解的唯一性(NE 的全局收敛性)分析可直接参考文献[26]。

### 3 基于 Gradient Play 的分布式容量优化算法设计

在本博弈模型  $G$  中考虑一种系统状态更新机制, 使玩家  $SU_l$  通过观察其他  $SU_k$  所制定策略造成结果(对其他用户产生干扰所支付代价), 使其能重复调整发射功率以及时调整所得收益, 最终达到 NE。最简单的策略更新机制是最优响应, 如  $r_l(p_{-l}) = \arg \max_{p_l \in P_l} U_l(\gamma_l(p_l, p_{-l}))$ : 若系统工作在时隙模式下, 每个时隙, 各  $SU_l$  基于上个时隙所获反馈信息选择下个时隙的最优决策。即在  $t+1$  时隙,  $SU_l$  通过以下机制选择策略

$$p_l(t+1) = r_l(p_{-l}(t)) = \arg \max_{p_l(t) \in P_l} U_l(\gamma_l(p_l(t), p_{-l}(t))), \quad (28)$$

当所表示的上述动态模型达到稳定状态, 则该状态一定是均衡点。然而, 对一般形式的博弈模型, 其收敛性能并不令人满意。因此考虑另一种替代机制 Gradient Play<sup>[34]</sup>。相比在前述每一步致力于寻找使性能最优的“最优响应”机制, Gradient Play 可看成一种“更优响应”的机制。在这种机制中, 每个玩家基于对其他玩家所做决策的结果观察, 以梯度方向迭代地调整当前决策。则每个  $SU_l$  可根据下式更新其策略

$$p_l(t+1) = [p_l(t) + f_l(p_l(t))(U_l'(p_l(t), p_{-l}(t)))]P_l, \quad (29)$$

其中:  $f_l(p_l(t)) > 0$  代表每次迭代的步长, 可以是关于玩家  $l$  在当前时隙  $t$  下决策的函数;  $P_l$  表示向  $SU_l$  策略空间的映射。若将代价因子  $\pi_j$  解释为  $SU$  间竞争的价格, 则 Gradient Play 为系统提供了合理的经济学解释: 如果边际效用  $\frac{du_l(p_l)}{dp_l}$  (Marginal Utility) 比竞争成本高, 则可提高发射功率, 反之则不提高甚至降低发射功率(在经济学领域, 边际效用是指某种物品的消费量每增加一单位所增加的满足程度。每增加一个单位的功率, 增加的效用递减; 最后一个消耗单位的效用最小; 而决定价值的, 不是它的最大效用, 也不是它的平均效用, 而是它的最小效用, 即“边际效用”)。

$$y_l(t+1) = [y_l(t) + f_l(y_l(t))(U_l'(y_l(t), y_{-l}(t)))]Y_l, \quad (30)$$

系统工作在时隙模式下, 每个  $SU_l$  在第  $t$  个时隙向其他用户声明各自的功率值  $p_l(t)$ ,  $SU_l$  接收到其他  $SU_k$  提供信息后, 基于所得发射功率  $p_j(t)$ ,  $j \neq l$  首先通过  $y_l(t) = \log p_l(t)$  进行变量代换, 接着利用式(12)对向所有其他用户  $j$  进行代价因子(收取干扰产生费用)的计算, 然后通过式(30)计算  $t+1$  时隙使用的发射功率  $y_l(t+1)$ , 最后通过  $p_l(t+1) = e^{y_l(t+1)}$  对发射功率进行还原。这里为了保证算法的收敛性, 使用 Gradient 算法进行状态的更新。这里假设所有用户都知道所有链路和交叉链路信道增益的完全知识(由其他用户的广播所得)。此外, 基于对数效用函数的式(14)可化为  $U_l(y_l; y_{-l}) = u_l(\gamma_l(y_l, y_{-l})) - \sum_{j \neq l} \frac{1}{1 + \gamma_j} \gamma_j^2 A_{lj}$  或  $U_l(y_l; y_{-l}) = u_l(\gamma_l(y_l, y_{-l})) - \sum_{j \neq l} \gamma_j A_{lj}$  的形式。步长  $f_l(p_l(t)) > 0$  采用固定步长  $f_l > 0$  且尽量小(如选取 0.000 1 和 0.001 作为步长值), 另一方面可参考文献中使用的 Diminishing 步长<sup>[35-38]</sup>, 已

有相关收敛性结论可供参考。相应解法所概括的算法 1 伪代码如表 1 所示。

表 1 基于 Gradient Play 方法的分布式容量优化算法  
Table 1 The Gradient-Play based distributed capacity optimization algorithm

步骤	算法流程
1	参数初始化: 每个用户 $l \in L$ 选择发射功率 $p_l(0) \in P_l$ 、SINR $\gamma_l(0)$ 和步长 $f_l$ 等参数初值;
2	重复
3	SU $_l$ 通过 $y_l(t) = \log p_l(t)$ 进行 $p_l(t)$ 到 $y_l(t)$ 的变量代换;
4	根据式(12)计算用户 $l$ 的 SINR 干扰 $\gamma_l(t)$ ;
5	根据式(14)计算其他用户 $j$ 对用户 $l$ 造成的干扰 $\pi_j, j \neq l$ ;
6	根据式(30)计算 $y_l(t+1)$ ;
7	通过 $p_l(t+1) = e^{y_l(t+1)}$ 进行 $y_l(t+1)$ 到 $p_l(t+1)$ 的变量代换;
8	直到 $ U_l(p_l(t+1), p_{-l}(t+1)) - U_l(p_l(t), p_{-l}(t))  \leq \epsilon$ ;
9	得到最优发射功率 $p^*$ .

针对表 1, 可看到为了实现系统策略状态更新, 在每个时隙  $t$ , 每个用户需要获取的信息有: 1) 其他用户的功率值  $p_l(t)$  (每个用户的发射机进行周期性广播); 2) 当前信道增益  $h_{ll}$  (接收机处测量并反馈到发射机) 和临近信道增益  $h_{jl}$  (每个用户的接收机进行周期的信标广播); 3) 接收 SINR 值  $\gamma_l(t), l \in L$  (每个用户的接收机周期广播)。每个用户基于以上信息, 计算其他用户的代价值并用于后续计算中。从定理 3 描述的超模博弈的性质出发, 只要博弈模型满足超模性且存在 NE, 即使是非增量式的最优响应算法也可以得到平衡, 因此增量式的 Gradient Play 算法也可以收敛到 NE。

定理 6: 等效超模博弈  $G = [L, \{P_l\}_{l \in L}, \{U_l\}_{l \in L}]$  可从任意初始值收敛到其 NE 点。

证明: 通过相关定义, 非合作博弈的纳什均衡 (NE) 点必须满足最优响应函数  $BR_l(y_{-l}) = (y_l^*) = \arg \max_{y_l \in Y_l} U_l(y_l, y_{-l})$ 。为了证明该等效超模博弈收敛到其 NE 点, 必须证明用户  $l$  的最优响应策略函数是标准函数 (Standard Function)<sup>[25]</sup>。若要函数具有 Standard 属性, 对所有  $x \geq 0$  必须满足以下条件:

- 1) 函数值为正 (Positivity):  $f(x) > 0$ ;
- 2) 单调性 (Monotonicity): 若  $x \geq x'$ , 则  $f(x) \geq f(x')$ ;
- 3) 可伸缩性 (Scalability): 对所有  $a > 1$ , 均有  $af(x) \geq f(ax)$ 。

其中,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  为 NE 点。对于所定义的等效超模博弈模型, 根据文献 [25], 能容易证明最优响应函数  $BR_l(y)$  满足上述条件。相似地, 对于 Gradient Play 更新函数, 对  $\forall y_l \in Y_l$  也可证明如下:

- 1)  $y_l(t) > 0$ , 显然  $U'_l(y_l(t), y_{-l}(t)) > 0$ , 且  $y_l(t+1) = y_l(t) + f_l \cdot U'_l(y_l(t), y_{-l}(t)) > 0$ ;
- 2) 若  $y_l(t) > y'_l(t)$ , 可知支付函数一阶导  $U'_l(y_l(t), y_{-l}(t)) > 0$ , 因此得  $y_l(t) + f_l \cdot U'_l(y_l(t), y_{-l}(t)) > y'_l(t) + f_l \cdot U'_l(y'_l(t), y_{-l}(t))$ , 满足单调性 ( $u_l$  采用对数效用函数);
- 3) 对所有  $a > 1$ , 由于  $y_l + f_l \cdot U'_l(y_l, y_{-l})$  为关于  $y_l$  的严格递增函数, 则有  $a(y_l(t) + f_l \cdot U'_l(y_l(t), y_{-l}(t))) \geq ay_l(t) + f_l \cdot U'_l(ay_l(t), ay_{-l}(t))$ 。

因此, 等效超模博弈始终会向 NE 点收敛, 定理得证, 在仿真实验中选取 0.001 和 0.01 步长分别在 2 用户和 30 用户上进行了收敛性数值仿真验证。

## 4 仿真实验及性能对比

在仿真实验中, 假设多个 SU 已经检测到了频谱空洞, 基于 Gradient Play 的分布式容量优化资源分配算

法分析 SU 网络的性能,并假设算法运行过程中 PU 不出现,基于此假设进行仿真实验并对结果进行分析。首先设置仿真场景,相关参数如下:

- 1)模拟一个在 50 m×50 m 方形区域内随机生成的分布式网络,生成 1~30 对网络用户通信对,每个用户节点的相应收发端随机分布在 15 m×15 m 的方形区域内;
- 2)所有网络用户共享相同频谱资源,信道带宽  $B=64$ ;
- 3)信道增益遵循的衰落公式为  $h_{jl}=d_{jl}^{-4}$ ,其中  $d$  为用户  $j$  发射机到用户  $l$  接收机的欧式距离;
- 4)每个用户功率范围  $p_l=[0, 1]W, P_l^{max}/n_0=40$  dB;
- 5)每个用户选择固定步长为  $f_l=0.01$ ,且假设  $\theta_0=1$  和  $P_f$  虚警概率为 0,将 CRAHN 近似为 Ad hoc;
- 6)产生 1 到 30 个用户传输对,同时对用户之间的距离单位和信号衰减因子等参数进行设置。

如图 3 所示显示了 30 个网络用户的链路分布情况,其中蓝色圆圈为发射机,红色方块为相应的接收机,针对不同用户数的每个场景,均通过均匀分布随机生成 20 组拓扑结构进行比较。

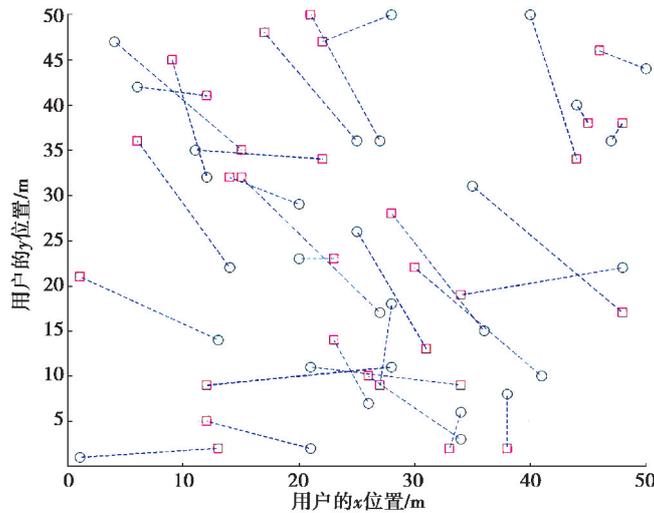


图 3 1~30 个用户通信收发对的网络模型

Fig. 3 The CRAHN model with randomized 1~30 users

图 4~图 6 显示了用户收发对分别为 2 和 30 个的时候,网络系统中各用户发射功率分配和对其他用户干扰代价的典型收敛情况(每条线均代表一个用户的发射功率值或干扰代价值的变化情况),所有场景均基于随机的参数初始化。其中,用户数不多时(图 4 的 2 用户网络)将发射功率和干扰代价在一张图上显示,当用户收发对增加到 30 个,即通过图 5 和图 6 分别将发射功率值和干扰代价值的收敛情况进行分开显示。

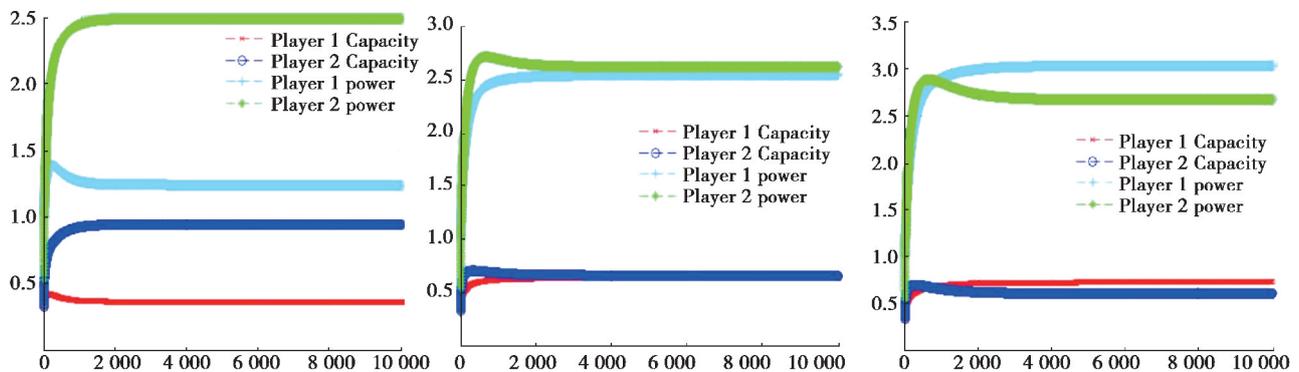


图 4 2 用户无线网络 Gradient Play 算法的收敛效果仿真

Fig. 4 The convergence effects of Gradient-play based algorithm for CRAHN with 2 users

图 4 显示了 2 用户网络中各用户发射功率和系统容量变化的对应关系,由于网络节点的 SNR 较高 ( $P_i^{\max}/n_0=40$  dB),因此用户效用函数可以用香农公式的近似对数形式表示,可以看到在迭代过程中,随着功率的变化,各用户所在的链路容量是呈明显的正比关系的。由于信道增益随着图 4 的网络传输对之间的随机距离所得,因此算法从初始化到收敛的迭代次数不定;另一方面迭代次数与步长大小和收敛精度等参数的设置有关。但从图可见经过 1 000 次以内的迭代,算法均能收敛。说明增量式算法能保证收敛性。

图 5 和图 6 分别显示了 30 用户的网络中各用户发射功率和干扰代价值变化的过程。各用户随着分布式算法迭代次数的增加,根据其他用户的策略状态导致的反馈结果,以增量方式对各自的发射功率进行调节。除了个别用户达到了发射功率最大值 1 以外,其他大多数用户都在  $p_i=[0, 1]W$  范围内取得了发射功率值。该场景下,算法的收敛迭代次数在 600 次以内。

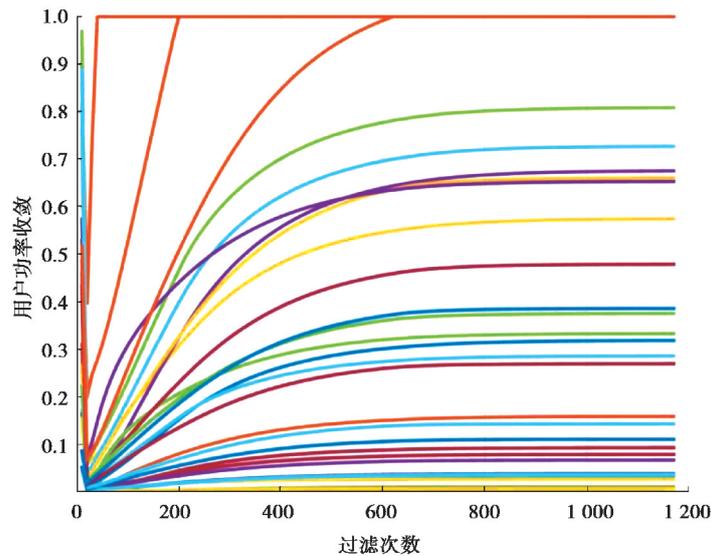


图 5 30 个用户无线网络中 Gradient Play 算法对用户功率分配的收敛效果

Fig. 5 The power allocation convergence of Gradient-play based algorithm for CRAHN with 30 users

此外,图 6 显示了各用户因发射功率更新所得对其他用户相应的干扰代价值的变化趋势。从图中前 40 次左右的迭代中,几乎所有用户由于其自私性,都在尽力提高当前链路上的发射功率,因此相应地增大了

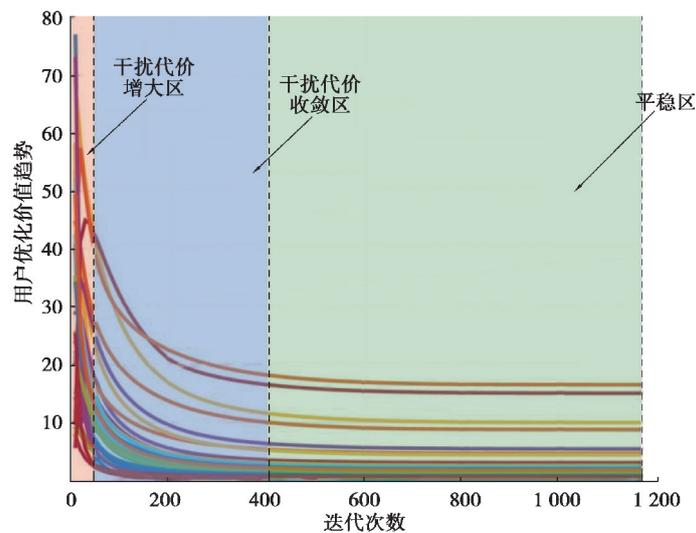


图 6 30 个用户无线网络 Gradient Play 算法对干扰代价值的收敛效果

Fig. 6 The interference price convergence of Gradient-play based algorithm for CRAHN with 30 users

各自的干扰代价。随着分布式算法迭代次数的增加,根据其他用户的策略状态导致的反馈结果,以增量方式对各自的发射功率进行调节,干扰代价又降低了下来,最终达到均衡点下的稳定状态。该场景下,算法的收敛迭代次数在 600 次以内。

最后,图 7 展示了在 CRAHN 中的不同信噪比条件下,用户收发对从 1 个提高到 30 个所带来的网络容量性能变化趋势。从图上可以看出:1)用户数从 1 个到 15 个的增加过程中,3 种信噪比场景下,网络的总容量都基本处于提高阶段,说明在分布式算法的发射功率控制优化是有效的,能使网络总容量得到提升。其中  $\text{SNR}=30\text{ dB}$  和  $\text{SNR}=40\text{ dB}$  的情况比较类似,而  $\text{SNR}=20\text{ dB}$  场景下的信噪比相比之下网络总容量差别较大,说明分布式算法在这个 SNR 条件下,针对基于香农容量对数近似公式的网络容量的优化效果并不明显;2)用户数从 15 个~25 个左右时,3 种 SNR 场景的网络总容量呈现一种保持中略有下降的趋势,直到用户数从 25 个到 30 个变化过程中,3 个 SNR 条件场景中的网络总容量出现较明显的下降。这是因为随着网络中用户数的增多,网内干扰的比重大大增加,且随着用户数增多造成了用户策略的耦合性增强,用户依靠分布式算法进行的功率调整不容量对网络总容量有太多的贡献;3)在  $\text{SNR}=20\text{ dB}$  的场景中的网络总容量相比较强 SNR 条件下的网络性能来说,更容易收到用户数增加的影响,因为各用户的最大发射功率不变,而网络 SNR 偏低,则网内干扰更容易收到各用户发射功率的影响,用户数的增多使得网络内的资源优化共享更加难以协调。因此 SNR 越低的场景下,网络总容量更容易受到用户数的影响。

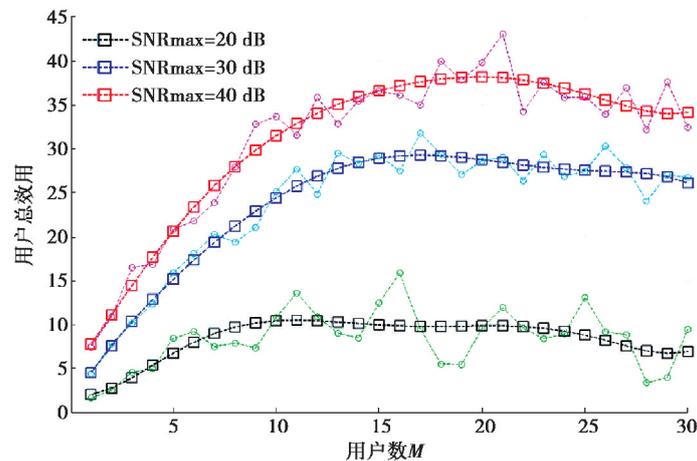


图 7 认知无线网络中用户数和信噪比变化对网络总容量的影响关系

Fig. 7 The influence of user number and SINR on the total capacity of CRAHN

## 5 结 论

基于超模博弈理论针对 CRAHN 网络系统容量最大化问题进行了研究,解决了同频点无线 Ad hoc 网络容量和模型中用户间策略的耦合性问题。首先,根据相关约束条件对无线 Ad hoc 网络吞吐量之和模型进行了建立,转化为等效博弈模型,并利用 KKT 条件引入代表干扰代价的新变量,且写出代价关于策略的精确表达式;然后,针对不同 SINR 条件下的等效博弈模型进行了系统容量模型的超模性证明,后分别基于 Best Response 和 Gradient 方法得到分布式资源分配算法。仿真结果表明,在不同的功率、干扰和 QoS 需求条件下,该方法相比其他同类算法所需要的信息交换更少,相比 Best Response 算法具有更稳健的收敛性保证。主要贡献在于:首先,根据相关约束条件对无线 Ad hoc 网络容量和模型进行了建立,然后转化为等效博弈模型,利用 KKT 条件引入代表干扰代价的新变量;然后,针对不同 SINR 和用户数条件下的等效博弈模型进行了系统容量模型的超模性证明,后基于梯度法得到分布式资源分配算法。仿真结果表明,在不同的功率、干扰和 QoS 需求条件下,该方法相比其他同类算法所需要的信息交换更少,相比最优响应方法具有更稳健的收敛性保证。

## 参考文献:

- [1] Xu C, Zheng M, Liang W, et al. End-to-end throughput maximization for underlay multi-hop cognitive radio networks with RF energy harvesting[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2017, 16(6): 3561-3572.
- [2] Rakovic V, Denkovski D, Hadzi-Velkov Z, et al. Optimal time sharing in underlay cognitive radio systems with RF energy harvesting[EB/OL]. 2015; arXiv: 1507.00071[cs.IT]. <https://arxiv.org/abs/1507.00071>
- [3] Hoang D T, Niyato D, Wang P, et al. Opportunistic channel access and RF energy harvesting in cognitive radio networks[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2014, 32(11): 2039-2052.
- [4] Wang Z H, Chen Z Y, Xia B, et al. Cognitive relay networks with energy harvesting and information transfer: design, analysis, and optimization[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2016, 15(4): 2562-2576.
- [5] Shen K M, Yu W. Fractional programming for communication systems—part I: power control and beamforming[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(10): 2616-2630.
- [6] Alpcan T, Nekouei E, Nair G N, et al. An information analysis of iterative algorithms for network utility maximization and strategic games[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2019, 6(1): 151-162.
- [7] Shi Q J, Razaviyayn M, Luo Z Q, et al. An iteratively weighted MMSE approach to distributed sum-utility maximization for a MIMO interfering broadcast channel[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(9): 4331-4340.
- [8] Chiang M, Hande P, Lan T, et al. Power control in wireless cellular networks[J]. *Foundations and Trends © in Networking*, 2007, 2(4): 381-533.
- [9] Zhang H H, Venturino L, Prasad N, et al. Weighted sum-rate maximization in multi-cell networks via coordinated scheduling and discrete power control[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2011, 29(6): 1214-1224.
- [10] El Tanab M, Hamouda W. Resource allocation for underlay cognitive radio networks: a survey[J]. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2017, 19(2): 1249-1276.
- [11] Lee H W, Chang W, Jung B C. Optimal power allocation and allowable interference shaping in cognitive radio networks[J]. *Computers & Electrical Engineering*, 2018, 71: 265-272.
- [12] Tang N K, Mao S W, Kompella S. Power control in full duplex underlay cognitive radio networks; a control theoretic approach[C]//2014 IEEE Military Communications Conference, October 6-8, 2014, Baltimore, MD, USA. IEEE, 2014: 949-954.
- [13] Wang H C, Chen J, Ding G R, et al. D2D communications underlying UAV-assisted access networks[J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 46244-46255.
- [14] Luo L, Roy S. A two-stage sensing technique for dynamic spectrum access[J]. *2008 IEEE International Conference on Communications*, 2008: 4181-4185.
- [15] Luo L, Ghosh C, Roy S. Joint optimization of spectrum sensing for cognitive radio networks[C]//2010 IEEE Global Telecommunications Conference GLOBECOM 2010. December 6-10, 2010, Miami, FL, USA: IEEE, 2010: 1-5.
- [16] Qian X M, Hao L. Spectrum sensing with energy detection in cognitive Vehicular Ad hoc Networks[C]//2014 IEEE 6th International Symposium on Wireless Vehicular Communications (WiVeC 2014). September 14-15, 2014, Vancouver, BC, Canada: IEEE, 2014: 1-5.
- [17] Verma G, Sahu O P. Throughput maximization of cognitive radio under the optimization of sensing duration[J]. *Wireless Personal Communications*, 2017, 97(1): 1251-1266.
- [18] Kang X, Liang Y C, Garg H K, et al. Sensing-based spectrum sharing in cognitive radio networks[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2009, 58(8): 4649-4654.
- [19] Nguyen V D, Shin O S. Cooperative prediction-and-sensing-based spectrum sharing in cognitive radio networks[J]. *IEEE Transactions on Cognitive Communications and Networking*, 2018, 4(1): 108-120.
- [20] Choi S, Park H, Hwang T. Optimal beamforming and power allocation for sensing-based spectrum sharing in cognitive radio networks[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2014, 63(1): 412-417.
- [21] Wang R S, Liu G L, Zhang H J, et al. Resource allocation for energy-efficient NOMA network based on super-modular game[C]//2018 IEEE International Conference on Communications Workshops (ICC Workshops). May 20-24, 2018, Kansas City, MO, USA: IEEE, 2018: 1-6.
- [22] Liu G L, Wang R S, Zhang H J, et al. Super-modular game-based user scheduling and power allocation for energy-efficient NOMA network[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2018, 17(6): 3877-3888.

- [23] Pei Y Y, Liang Y C, Teh K C, et al. Sensing-throughput tradeoff for cognitive radio networks: a multiple-channel scenario[C] // 2009 IEEE 20th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications. September 13-16, 2009, Tokyo, Japan: IEEE, 2009: 1257-1261.
- [24] Luo Z Q, Zhang S Z. Dynamic spectrum management: complexity and duality[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2008, 2(1): 57-73.
- [25] Saraydar C U, Mandayam N B, Goodman D J. Efficient power control via pricing in wireless data networks[J]. IEEE Transactions on Communications, 2002, 50(2): 291-303.
- [26] Huang J W, Berry R A, Honig M L. Distributed interference compensation for wireless networks[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2006, 24(5): 1074-1084.
- [27] Chiang M. Balancing transport and physical Layers in wireless multihop networks: jointly optimal congestion control and power control[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2005, 23(1): 104-116.
- [28] Boyd S, Vandenberghe L. Convex optimization[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [29] Glicksberg I L. A further generalization of the kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1952, 3(1): 170.
- [30] Roberts A W, Varberg D E. Convex functions[M]. New York: Academic Press, 1973.
- [31] Topkis D M. Supermodularity and complementarity[EB/OL]. 1998
- [32] Altman E, Altman Z. S-modular games and power control in wireless networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(5): 839-842.
- [33] Milgrom P, Roberts J. Rationalizability, learning, and equilibrium in games with strategic complementarities [J]. Econometrica, 1990, 58(6): 1255.
- [34] Taylor P, Day T. Evolutionary stability under the replicator and the gradient dynamics[J]. Evolutionary Ecology, 1997, 11(5): 579-590.
- [35] Zhou X Y, Dall'Anese E, Chen L J. Online stochastic optimization of networked distributed energy resources[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(6): 2387-2401.
- [36] Zhou X. Distributed real-time voltage regulation in distribution networks[D]. US: University of Colorado at Boulder, 2018.
- [37] Zhou X Y, Liu Z Y, Dall'Anese E, et al. Stochastic dual algorithm for voltage regulation in distribution networks with discrete loads[C]//2017 IEEE International Conference on Smart Grid Communications (SmartGridComm). October 23-27, 2017, Dresden, Germany: IEEE, 2017: 405-410.
- [38] Scutari G, Palomar D P. MIMO cognitive radio: a game theoretical approach[J]. IEEE transactions on signal processing, 2010, 58(2):761-780. doi: 10.1109/TSP.2009.2032039.