

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2021.17

# 连续迭代投影多任务优先级方法

王妮芸, 唐先智, 江 沛, 王 彦, 李华强

(重庆大学 机械传动国家重点实验室, 重庆 400044)

**摘要:**针对任务优先级层次中进行任务插入和移除过程中引起的关节速度不连续现象,基于连续迭代投影原理,提出连续迭代投影多任务优先级方法。并基于李雅普诺夫稳定性理论,当迭代次数趋于无穷大时,证明了所提出方法的稳定性。以避障任务为首要任务,轨迹跟踪任务为次要任务,仿真分析了连续迭代投影多任务优先级方法的性能,并与传统增广投影多任务优先级方法进行对比。结果表明,在靠近障碍物时,避障任务插入优先级层次中,连续迭代投影多任务优先级方法能够保证关节速度的连续性,并在冗余度范围内尽可能地执行末端轨迹跟踪任务,保证跟踪误差的收敛性。

**关键词:**机器人运动学;冗余机器人;任务优先级;零空间投影

**中图分类号:**TP241

**文献标志码:**A

**文章编号:**1000-582X(2022)10-124-10

## Prioritized multi-task method of iteratively successive projection

WANG Chuoyun, TANG Xianzhi, JIANG Pei, WANG Yan, LI Huaqiang

(State Key Laboratory of Mechanical Transmissions, Chongqing University,  
Chongqing 400044, P. R. China)

**Abstract:** The insertion and removal of tasks in the task priority hierarchy always cause the problem of the joint velocity discontinuity. In this paper, an iteratively successive projection multi-task priority method is proposed based on the iteratively successive projection mechanism. Based on Lyapunov's stability theory, the stability of the proposed method is verified under the condition that iteration times tend to infinity. Taking the obstacle avoidance task as the primary task and the trajectory tracking task as the secondary task, the performance of the iteratively successive projection multi-task priority method is simulated and compared with the traditional augmented projection multi-task priority method. Simulation results show that obstacle avoidance tasks are inserted into the priority hierarchy when approaching obstacles, and the iteratively successive projection multi-task priority method can ensure the joint velocity continuity. In addition, within the ability of redundancy, the end trajectory tracking task is performed as much as possible, and the convergence of the tracking error is guaranteed.

**Keywords:** robot kinematics; redundant robot; task priority; null-space projection

**收稿日期:**2021-03-03 **网络出版日期:**2021-05-11

**基金项目:**国家自然科学基金资助项目(51705050)。

Supported by National Natural Science Foundation of China (51705050).

**作者简介:**王妮芸(1996—),女,重庆大学硕士研究生,主要从事机器人运动学研究。

**通信作者:**唐先智,男,重庆大学副教授,主要从事制造系统工程研究,(E-mail)cdtxz@21cn.com。

机器人的冗余度使机器人能够在非结构化的复杂环境中运行,能够同时完成多个任务。经典的利用冗余度的方法有梯度投影法<sup>[1-2]</sup>、增广雅克比方法<sup>[3-4]</sup>和加权最小范数法<sup>[5-9]</sup>。多任务优先级算法使低优先级任务在高优先级任务的零空间中运行,保证首先完成高优先级任务,利用冗余度完成低优先级任务。Nakamura 等<sup>[10]</sup>最先提出了任务优先级概念,采用零空间投影技术,实现了迭代梯度投影,保证低优先级任务在不影响高优先级任务的前提下执行,并成功用于避障<sup>[2]</sup>。在之前研究的基础上,Siciliano 等<sup>[11]</sup>给出了高冗余度系统多任务优先级通用算法,能够迭代求解关节速度。

复杂的非结构化环境中,在不同的时间和位置,机器人需要完成任务不同,需要进行任务的插入或删除,这会引入雅克比矩阵秩的变化,出现关节速度的不连续现象<sup>[12]</sup>。解决任务优先级方法中关节速度的不连续问题是非常关键的。Chiaverini<sup>[13]</sup>提出奇异鲁棒方法,通过引入阻尼因子,以跟踪误差为代价,解决雅克比矩阵秩的变化引起的奇异问题。在文献<sup>[14]</sup>中,提出了一种基于连续零空间投影算子的平滑控制方法,以较低的计算成本解决了任务状态切换时的不连续问题,但即使所有任务都处于激活状态或失活状态,该方法系统的稳定性仍然存在问题。Mansard 等<sup>[15]</sup>提出了一种连续逆,可以保证在任务切换过程中的关节速度连续性,并且当任务完全激活或失效时,其连续逆等于伪逆,之后应用于处理多个优先级任务<sup>[16]</sup>。但 Mansard 等提出的连续逆随着任务数量的增加,计算时间也呈指数增长。之后,Jiang 等<sup>[17]</sup>和黄水华<sup>[18]</sup>通过连续迭代投影每个任务的零空间构建了连续迭代投影算子,有限次迭代能够保证任务切换过程中的连续性,当迭代次数接近无限次时,连续迭代投影算子逐渐接近经典伪逆投影算子。和 Mansard 等提出的方法相比,此方法可以节省计算时间。

综上所述,需要针对任务优先级算法中任务插入与移除引起的关节速度不连续问题,进行深入研究和分析。笔者基于文献<sup>[17]</sup>的连续迭代投影原理,提出连续迭代投影多任务优先级方法,依据李雅普诺夫稳定性原理证明所提出方法的稳定性。通过仿真验证该方法的有效性和稳定性,并与增广投影多任务优先级方法进行对比。

## 1 机器人运动学控制

### 1.1 机器人运动学控制

冗余串联机器人系统的自由度大于其完成期望任务的自由度,即关节空间的维数  $n$  超过任务空间的维数  $m$ ,  $n$  与  $m$  的差值为冗余自由度。定义关节空间关节位置向量为  $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$ ,任务空间末端位置向量为  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ ,则机器人正向运动学方程为:

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{q}), \quad (1)$$

式中: $f$  为任务函数,为从关节空间向量到任务空间向量的映射。对式(1)求导可以得到关节速度和末端执行器速度的映射关系,如下:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}, \quad (2)$$

式中: $\mathbf{J} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  为雅克比矩阵。对于冗余机器人,式(2)的一般解可表示为:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{\dagger} \dot{\mathbf{x}}_u + \mathbf{P} \mathbf{z}, \quad (3)$$

式中: $\mathbf{J}^{\dagger} = \mathbf{J}^{\top} (\mathbf{J} \mathbf{J}^{\top})^{-1}$  为雅克比矩阵  $\mathbf{J}$  的 Moore-Penrose 伪逆, $\dot{\mathbf{x}}_u$  为任务输入控制指令, $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$  为任意关节速度向量, $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为经典雅克比零空间投影算子。 $\mathbf{P}$  的表达式如下:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}_n - \mathbf{J}^{\dagger} \mathbf{J}, \quad (4)$$

式中 $\mathbf{I}_n$  为  $n$  维的单位方阵。

冗余机器人可以同时执行多个任务。如跟踪末端轨迹的同时,进行避障、保证关节限位等。但需要对多个任务的优先级进行排序,来保证首要任务在高优先级层次被执行,利用冗余的自由度来完成次要任务。为了简单起见,先考虑  $T_1$  和  $T_2$  两个任务,这两个任务定义为:

$$\mathbf{x}_1 = f_1(\mathbf{q}), \quad (5)$$

$$\mathbf{x}_2 = f_2(\mathbf{q}). \quad (6)$$

假设  $T_1$  是首要任务,任务  $T_2$  在任务  $T_1$  的零空间中执行。任务  $T_1$  和  $T_2$  对应的雅克比矩阵分别为  $\mathbf{J}_1$  和

$J_2$ 。根据式(3),则关节速度的解为:

$$\dot{q}_2 = J_1^\dagger \dot{x}_{1,u} + P_1 (J_2 P_1)^\dagger \dot{x}_{2,u} \quad (7)$$

式中: $\dot{x}_{1,u}$ 和 $\dot{x}_{2,u}$ 分别为任务 1 和任务 2 的输入指令, $P_1$ 为雅克比矩阵  $J_1$  的经典零空间, $P_1 = I_n - J_1^\dagger J_1$ 。当需要执行两个以上的任务时,可以将上式推广到任意的  $k$  个任务,对应的任务优先级解可表示为

$$\dot{q}_i = \dot{q}_{i-1} + P_{i-1} (J_i P_{i-1})^\dagger \dot{x}_{i,u}, i = 1, 2, \dots, k, \quad (8)$$

式中: $\dot{q}_0 = 0, P_0 = I_n, \dot{x}_{i,u}$ 为第  $i$  个任务的输入指令, $P_i$ 为增广雅克比  $J_i^A$  的零空间投影。 $J_i^A$ 为前  $i$  个任务的增广雅克比矩阵,表达式如下:

$$J_i^A = [J_1^T \quad J_2^T \quad \dots \quad J_i^T]^T, i = 1, 2, \dots, k. \quad (9)$$

低优先级任务的关节速度投影在高优先级任务的增广零空间中,这种方法为增广投影法。

在不同的时间点以及当机器人关节移动到不同位置时,需要进行任务的插入与移除。如:在进行末端期望轨迹跟踪的同时,当机器人靠近障碍物时,需要考虑避障任务,且需要将避障任务插入优先级层次中;当机器人远离障碍物时,则不需要考虑避障任务,可以将避障任务移除,将冗余度用于完成其他任务。

式(8)在任务插入与移除时,会出现关节速度不连续的问题,不能满足需求。因此,将根据连续迭代投影原理,构建一种新型连续迭代任务优先级的控制方法。

## 2 连续迭代投影任务优先级方程

### 2.1 连续迭代投影算子

引入激活因子,由激活因子构成的激活矩阵,来对任务的插入以及移除进行控制。激活矩阵定义如下:

$$H_k = \begin{bmatrix} h_1 I_{m1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 I_{m2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_k I_{mk} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

式中: $h_i \in [0, 1] (i = 1, 2, \dots, k)$ 是第  $i$  个任务的激活因子,用于表示第  $i$  个任务的激活状态。当  $h_i = 0$ ,第  $i$  个任务完全失活,被移除;当  $h_i = 1$ ,第  $i$  个任务完全激活,被执行;当  $h_i \in (0, 1)$ ,任务  $i$  被部分激活。

基于激活因子和激活矩阵,在文献[16]中,构建了连续迭代投影算子如下:

$$P_{NH}^k = \left( \prod_{i=1}^k (I_n - h_i J_i^\dagger J_i) \right)^N, \quad (11)$$

式中: $N$ 为迭代次数,右上角上标  $k$  表示  $P_{NH}^k$  为前  $k$  个任务的连续迭代投影算子。在下文,右上角没有小标则表示为所有任务的连续迭代投影算子。

连续迭代投影算子  $P_{NH}$  的连续性与激活因子  $h_i$  和迭代次数  $N$  有关。激活因子  $h_i$  在  $[0, 1]$  之间, $h_i$  平滑连续变化,直接影响连续迭代投影算子  $P_{NH}$  的连续性。此外,迭代次数  $N$  也会对连续迭代投影算子  $P_{NH}$  的连续性产生影响。 $P_{NH}$  可以写作关于  $h_i$  的多项式形式,对于有限的迭代次数  $N, P_{NH}$  相对于激活因子的连续性可以得到保证。当迭代次数趋于无穷时, $P_{NH}$  相对于激活因子是不连续的。

假设所有任务处于完全激活与失活状态,即  $h_i = 0$  或  $h_j = 1 (i, j = 1, 2, \dots, k)$ 。定义所有任务增广雅克比矩阵为  $J = [J_1^T \quad J_2^T \quad \dots \quad J_k^T]^T$ ,加入所有任务的激活矩阵  $H$ ,可以得到增广零空间  $(I_n - (HJ)^\dagger HJ)$ 。当所有任务处于失活状态,即  $h_i = 0 (i = 1, 2, \dots, k)$ ,则  $HJ = 0$ 。根据式(11),对于迭代次数  $N$  都有  $P_{NH} = (I_n - (HJ)^\dagger HJ)$ 。接下来对当部分或所有任务处于完全激活状态时连续迭代投影算子  $P_{NH}$  与增广零空间  $(I_n - (HJ)^\dagger HJ)$  的关系进行讨论。

增广雅克比矩阵的零空间为各个任务雅克比零空间的子空间,即  $N(HJ) \subseteq N(h_i J_i) (i = 1, 2, \dots, k)$ 。又因为, $J_i (I_n - J_i^\dagger J_i) = 0$ 。因此,对于雅克比矩阵  $J_i$  有  $h_i J_i^\dagger J_i (I_n - (HJ)^\dagger HJ) = 0$ 。将  $(I_n - (HJ)^\dagger HJ)$  相加在等式  $h_i J_i^\dagger J_i (I_n - (HJ)^\dagger HJ) = 0$  的两边可得, $(I_n - h_i J_i^\dagger J_i) (I_n - (HJ)^\dagger HJ) = (I_n - (HJ)^\dagger HJ)$ 。

由  $(I_n - (HJ)^\dagger HJ)$  矩阵的对称性质可知:

$$\begin{aligned} (I_n - (HJ)^\dagger HJ) &= (I_n - (HJ)^\dagger HJ)^\top = \\ &= ((I_n - h_i J_i^\dagger J_i) (I_n - (HJ)^\dagger HJ))^\top = \end{aligned} \quad (12)$$

$$(\mathbf{I}_n - (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ}) (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i)。$$

进而可以得到  $(\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{I}_n - (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ}) = (\mathbf{I}_n - (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ}) (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i)$ , 将等式的两边展开可以得到  $h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ} = h_i (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ} \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i$ , 将等式两边同时减去  $(\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ}$  可以得到:

$$(\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ} = (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ} (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i)。 \quad (13)$$

$\prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ}$  的二范数为  $\|\prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ}\|$ , 根据  $\|\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i\| = 1$  和  $\|(\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ}\| = 1$  可知,  $\|\prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ}\| \leq \prod_{i=1}^k \|(\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i)\| \|(\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ}\| = 1$ 。

采用反证法证明  $\|\prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ}\| \neq 1$ 。假设  $\|\prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ}\| = 1$  成立, 则对于任意非零向量  $\mathbf{z}$  有  $\|\prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ} \mathbf{z}\| = \|\mathbf{z}\|$  成立。

对于任意非零向量  $\mathbf{z}$ , 有  $\|\mathbf{z}\|^2 = \|(\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) \mathbf{z} + h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i \mathbf{z}\|^2$ , 又因为  $(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i = 0$ 。所以  $\|\mathbf{z}\|^2 = \|(\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) \mathbf{z}\|^2 + \|h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i \mathbf{z}\|^2$ 。当且仅当  $\mathbf{z} \in N(h_i \mathbf{J}_i)$  时, 有  $\|(\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) \mathbf{z}\| = \|\mathbf{z}\|$ 。当且仅当  $\mathbf{z} \in N(h_i \mathbf{J}_i)^\perp$  时, 有  $\|h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i \mathbf{z}\| = \|\mathbf{z}\|$ 。由于  $(\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ} = (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ} (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i)$ , 那么对于  $\|(\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ} \mathbf{z}\|$ , 当且仅当  $\mathbf{z} \in N(h_i \mathbf{J}_i) \cap N(\mathbf{HJ})^\perp$  时, 有  $\|(\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ} \mathbf{z}\| = \|\mathbf{z}\|$ 。同理, 当且仅当  $\mathbf{z} \in N(h_1 \mathbf{J}_1) \cap N(h_2 \mathbf{J}_2) \cap \cdots \cap N(h_k \mathbf{J}_k) \cap N(\mathbf{HJ})^\perp$  时, 有  $\|\prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ} \mathbf{z}\| = \|\mathbf{z}\|$ 。又由于,  $N(h_1 \mathbf{J}_1) \cap N(h_2 \mathbf{J}_2) \cap \cdots \cap N(h_k \mathbf{J}_k) = N(\mathbf{HJ})$ , 而  $N(\mathbf{HJ}) \cap N(\mathbf{HJ})^\perp = \emptyset$ 。因此, 不存在非零向量  $\mathbf{z}$  使  $\|\prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ} \mathbf{z}\| = \|\mathbf{z}\|$  成立。  $\prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ} = 1$  不成立, 假设为假。最终得到:

$$\|\prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ}\| < 1。 \quad (14)$$

根据式(12)可知  $(\mathbf{I}_n - (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ}) (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) = (\mathbf{I}_n - (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ})$  成立。  $\mathbf{P}_{\text{NH}}$  可以变换如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{NH}} &= \left( \prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) \right)^N = \\ &= (\mathbf{I}_n - (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ}) \left( \prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) \right)^N + (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ} \left( \prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) \right)^N = \\ &= (\mathbf{I}_n - (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ}) + (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ} \left( \prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) \right)^N。 \end{aligned} \quad (15)$$

根据式(13), 又由于  $(\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ} (\mathbf{HJ})^\dagger = (\mathbf{HJ})^\dagger$ , 可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{NH}} &= \left( \prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) \right)^N = \\ &= (\mathbf{I}_n - (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ}) + \left( \prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) \right)^N (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ} = \\ &= (\mathbf{I}_n - (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ}) + \left( \prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ} \right)^N。 \end{aligned} \quad (16)$$

根据  $\|\prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ}\| < 1$  可知, 当迭代次数逐渐增大时, 连续迭代投影算子  $\mathbf{P}_{\text{NH}}$  趋近于  $(\mathbf{I} - (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ})$ 。

综上所述, 连续迭代投影算子  $\mathbf{P}_{\text{NH}}$  的连续性和激活因子  $h_i$  和迭代次数  $N$  有关。迭代次数  $N$  可以保证连续迭代投影算子的连续性。然而, 当迭代次数趋于无穷大时, 逐渐接近  $(\mathbf{I} - (\mathbf{HJ})^\dagger \mathbf{HJ})$ , 连续迭代投影算子出现不连续现象。

## 2.2 多任务连续迭代投影优先级方程

基于连续迭代投影算子, 类似于式(8), 构建连续迭代投影多任务优先级方程如下:

$$\mathbf{P}_{\text{NH}}^0 = \mathbf{I}_n, \dot{\mathbf{q}}_0 = 0, \dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{q}}_{i-1} + \mathbf{P}_{\text{NH}}^{i-1} (\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{\text{NH}}^i) (\mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}}^{i-1})^\dagger \dot{\mathbf{x}}_{i,u}。 \quad (17)$$

为了说明该方法保证任务优先级层次有效性的条件, 需要对单个任务的雅克比矩阵  $\mathbf{J}_i$  与多任务优先级层次中连续迭代投影算子  $\mathbf{P}_{\text{NH}}$ , 以及单个任务的雅克比矩阵  $\mathbf{J}_i$  与前  $i$  层次任务连续迭代投影算子  $\mathbf{P}_{\text{NH}}^i$  的关系进行讨论。

当任务  $i$  的激活因子  $h_i = 1$  时, 根据式(16)可知:

$$\mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}} = \mathbf{J}_i \left( (\mathbf{I}_n - (\mathbf{H}\mathbf{J})^\dagger \mathbf{H}\mathbf{J}) + \left( \prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{H}\mathbf{J})^\dagger \mathbf{H}\mathbf{J} \right)^N \right). \quad (18)$$

对于雅克比矩阵  $\mathbf{J}_i$  有  $\mathbf{J}_i (\mathbf{I}_n - (\mathbf{H}\mathbf{J})^\dagger \mathbf{H}\mathbf{J}) = 0$ , 式(18)可以变换为:

$$\mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}} = \mathbf{J}_i \left( \prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{H}\mathbf{J})^\dagger \mathbf{H}\mathbf{J} \right)^N. \quad (19)$$

因此,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}}\| &= \|\mathbf{J}_i \left( \prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{H}\mathbf{J})^\dagger \mathbf{H}\mathbf{J} \right)^N\| \leq \\ &\|\mathbf{J}_i\| \cdot \left\| \left( \prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{H}\mathbf{J})^\dagger \mathbf{H}\mathbf{J} \right)^N \right\| = \\ &\|\mathbf{J}_i\| \cdot \left\| \left( \prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{H}\mathbf{J})^\dagger \mathbf{H}\mathbf{J} \right) \right\|^N. \end{aligned} \quad (20)$$

根据  $\left\| \left( \prod_{i=1}^k (\mathbf{I}_n - h_i \mathbf{J}_i^\dagger \mathbf{J}_i) (\mathbf{H}\mathbf{J})^\dagger \mathbf{H}\mathbf{J} \right) \right\| < 1$ . 所以有  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}} = 0$ .

可以得到,对于任务  $i$ ,如果  $h_i = 1$ ,当  $N \rightarrow \infty$ ,有  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}} = 0$ . 同样地,对于任务  $i \leq j$ ,如果  $h_i = 1$ ,当  $N \rightarrow \infty$ ,有  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}} = 0$ .

当  $N \rightarrow \infty$ 时,有  $\mathbf{P}_{\text{NH}}^i = (\mathbf{I}_n - (\mathbf{H}_i \mathbf{J}_i^\dagger)^\dagger \mathbf{H}_i \mathbf{J}_i^\dagger)$ ,从而  $\mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}}^{i-1} \mathbf{P}_{\text{NH}}^i = 0$ ,  $\mathbf{P}_{\text{NH}}^i$  是任务  $\mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}}^{i-1}$  的连续零空间投影算子. 当  $N \rightarrow \infty$ 时,

$$\mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}}^{i-1} (\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{\text{NH}}^i) (\mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}}^{i-1})^\dagger = \mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}}^{i-1} (\mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}}^{i-1})^\dagger - \mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}}^{i-1} \mathbf{P}_{\text{NH}}^i (\mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}}^{i-1})^\dagger = \mathbf{I}_n. \quad (21)$$

当式(17)中  $\dot{\mathbf{x}}_{i,u} = \dot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{J}_i \dot{\mathbf{q}}_{i-1}$ , 迭代次数  $N$  趋于无穷时,根据  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}}^i = 0$  和  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}}^{i-1} (\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{\text{NH}}^i) (\mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}}^{i-1})^\dagger = \mathbf{I}_n$ , 对于处于完全激活状态的任务  $i-1$  和任务  $i$  分别有:

$$\mathbf{J}_{i-1} \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{J}_{i-1} \dot{\mathbf{q}}_{i-1} + \mathbf{J}_{i-1} \mathbf{P}_{\text{NH}}^{i-1} (\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{\text{NH}}^i) (\mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}}^{i-1})^\dagger (\dot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{J}_i \dot{\mathbf{q}}_{i-1}) = \dot{\mathbf{x}}_{i-1}, \quad (22)$$

$$\mathbf{J}_i \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{J}_i \dot{\mathbf{q}}_{i-1} + \mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}}^{i-1} (\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{\text{NH}}^i) (\mathbf{J}_i \mathbf{P}_{\text{NH}}^{i-1})^\dagger (\dot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{J}_i \dot{\mathbf{q}}_{i-1}) = \dot{\mathbf{x}}_i. \quad (23)$$

由式(22)(23)可得,对于处于完全激活状态的任务,即  $h_i = 1 (i = 1, 2, \dots, k)$ , 迭代次数  $N$  趋于无穷时,任务优先级层次有效.

### 3 李雅普诺夫稳定性分析

基于李雅普诺夫方法,对连续迭代投影算法的稳定性进行分析.为了简单起见,先考虑  $T_1$  和  $T_2$  两个任务,且选择  $\dot{\mathbf{x}}_{1,u}$  为简单的比例控制器如下:

$$\dot{\mathbf{x}}_{1,u} = \mathbf{K}_1 (\mathbf{x}_{1,d} - \mathbf{x}_1) = \mathbf{K}_1 \mathbf{e}_1, \quad (24)$$

式中:  $\mathbf{x}_{1,d}$  是期望的末端轨迹,  $\mathbf{K}_1$  是  $m_1 \times m_1$  的对角正定矩阵,  $\mathbf{e}_1$  是末端位置误差. 假设期望的末端执行器速度是零,即  $\dot{\mathbf{x}}_{1,d} = 0$ , 则有:

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = -\dot{\mathbf{x}}_1 = -\mathbf{J}_1 \dot{\mathbf{q}}_2. \quad (25)$$

同样对于任务  $T_2$  有:

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = -\dot{\mathbf{x}}_2 = -\mathbf{J}_2 \dot{\mathbf{q}}_2. \quad (26)$$

对于任务误差

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

可以得到:

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1 \\ \dot{\mathbf{e}}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_2. \quad (28)$$

根据李雅普诺夫稳定性定理,定义一个关于任务误差  $\mathbf{e}$  的严格正定连续可微李雅普诺夫函数  $V(\mathbf{e})$ , 当其时间导数  $\dot{V}(\mathbf{e})$  是负定时,任务误差  $\mathbf{e}$  逐渐收敛到零. 在此,李雅普诺夫函数  $V(\mathbf{e})$  定义如下:

$$V(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^\top \mathbf{e}. \quad (29)$$

$V(\mathbf{e})$  对时间求导可得:

$$\dot{V} = e^T \dot{e} = -e^T \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2. \quad (30)$$

将式(17)带入式(30)可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} ((I_n - P_{NH}^1) (J_1)^\dagger \dot{x}_{1,u} + P_{NH}^1 (I_n - P_{NH}^2) (J_2 P_{NH}^1)^\dagger \dot{x}_{2,u}) = \\ & -e^T \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} ((I_n - P_{NH}^1) (J_1)^\dagger K_1 e_1 + P_{NH}^1 (I_n - P_{NH}^2) (J_2 P_{NH}^1)^\dagger K_2 e_2). \end{aligned} \quad (31)$$

可以整合为:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T \begin{bmatrix} J_1 (I_n - P_{NH}^1) (J_1)^\dagger K_1 & J_1 P_{NH}^1 (I_n - P_{NH}^2) (J_2 P_{NH}^1)^\dagger K_2 \\ J_2 (I_n - P_{NH}^1) (J_1)^\dagger K_1 & J_2 P_{NH}^1 (I_n - P_{NH}^2) (J_2 P_{NH}^1)^\dagger K_2 \end{bmatrix} e = \\ & -e^T M e = \\ & -e^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} e. \end{aligned} \quad (32)$$

对于  $M$  的子矩阵  $M_{11}$  有:

$$M_{11} = J_1 (I_n - P_{NH}^1) (J_1)^\dagger K_1 = J_1 (J_1)^\dagger K_1 - J_1 P_{NH}^1 (J_1)^\dagger K_1. \quad (33)$$

根据  $i \leq j$  时,有  $\lim_{N \rightarrow \infty} J_i P_{NH}^i = 0$ . 可得当连续迭代次数  $N$  趋于无穷时,有  $J_1 P_{NH}^1 = 0$ ,进一步可得:

$$M_{11} = J_1 (J_1)^\dagger K_1 = K_1. \quad (34)$$

$K_1$  是对角正定矩阵,因此,子矩阵  $M_{11}$  也是正定的。当连续迭代次数  $N$  趋于无穷时,对于子矩阵  $M_{12}$  有:

$$M_{12} = J_1 P_{NH}^1 (I_n - P_{NH}^2) (J_2 P_{NH}^1)^\dagger K_2 = 0. \quad (35)$$

对于子矩阵  $M_{22}$  有:

$$\begin{aligned} M_{22} = & J_2 P_{NH}^1 (I_n - P_{NH}^2) (J_2 P_{NH}^1)^\dagger K_2 = \\ & J_2 P_{NH}^1 (J_2 P_{NH}^1)^\dagger K_2 - J_2 P_{NH}^1 P_{NH}^2 (J_2 P_{NH}^1)^\dagger K_2. \end{aligned} \quad (36)$$

当连续迭代次数  $N$  趋于无穷时,有  $J_2 P_{NH}^1 P_{NH}^2 = 0$ ,因此可得:

$$M_{22} = J_2 P_{NH}^1 (J_2 P_{NH}^1)^\dagger K_2 = K_2, \quad (37)$$

$K_2$  是对角正定矩阵,因此,子矩阵  $M_{22}$  也是正定的。

综上所述,只考虑任务  $T_1$  和  $T_2$ ,当连续迭代次数  $N$  趋于无穷时, $M$  为下上三角矩阵,且主对角上矩阵为正定矩阵。因此, $M$  为正定矩阵,李雅普诺夫函数对时间的求导  $\dot{V}(e)$  是严格负定的,任务误差逐渐趋近于零,保证了系统的稳定性。扩展到  $k$  个任务,可以得到同样类似的结论。

## 4 仿真分析

### 4.1 仿真案例

通过对六自由度平面机械臂进行 MATLAB 仿真,完成有障碍物的轨迹跟踪任务,从而验证上一节提出的控制方法的有效性。在仿真过程中,设置目标点和障碍物,通过高次多项式对连杆末端轨迹进行规划,并完成对轨迹的跟踪,当连杆靠近障碍物时,激活避障任务。通过仿真,来验证所提出的控制算法的优点及有效性。

六自由度平面机械臂的每个杆长都为 10 cm,连杆初始角度设置为  $q_0 = [0^\circ \ 20^\circ \ 30^\circ \ 30^\circ \ 30^\circ \ 30^\circ]^T$ 。连杆末端终点在笛卡尔空间的坐标为  $x_f = [3.5 \ 2.0]^T$  cm。柱形障碍物的中心点  $O$  的坐标为 (10,10) cm,半径为  $r_o = 6.5$  cm。在连杆末端对轨迹跟踪的过程中,所有连杆都有与障碍物碰撞的危险,第  $i$  个连杆与障碍物的最近距离为:

$$d_i = \sqrt{(C_{ix} - O_x)^2 + (C_{iy} - O_y)^2} - r_o, \quad (38)$$

式中: $C_{ix}$  和  $C_{iy}$  为连杆  $i$  上距离障碍物最近点  $C_i$  的坐标, $O_x$  和  $O_y$  为障碍物中心点  $O$  的坐标。为了保证连杆  $i$  与障碍物不发生碰撞,则连杆  $i$  与障碍物的距离  $d_i$  大于 0。为了避免碰撞,连杆  $i$  的避障任务可用公式表示为:

$$\mathbf{J}_o^i \dot{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{D}_i^T}{\|\mathbf{D}_i\|} \cdot \mathbf{J}_{ci} \dot{\mathbf{q}} = v_i, \quad (39)$$

式中:  $i=1,2,\dots,6$ ,  $\mathbf{J}_o^i$  为连杆  $i$  的避障任务雅可比矩阵,  $\mathbf{J}_{ci}$  为连杆  $i$  上最靠近障碍物物点  $C_i$  的雅可比矩阵,  $\mathbf{D}_i$  为障碍物中心点  $O$  到点  $C_i$  的向量。避障任务当连杆远离障碍物时不激活,当连杆靠近障碍物时激活,激活因子设定如下:

$$h_i = \begin{cases} 0 & d_i > \tilde{d}, \\ f\left(\frac{d_i}{\tilde{d}}\right) & 0 \leq d_i \leq \tilde{d}, \\ 1 & d_i < 0. \end{cases} \quad (40)$$

其中,  $f(d_i/\tilde{d}) = 3(d_i/\tilde{d})^2 - 2(d_i/\tilde{d})^3$ , 当连杆与障碍物的距离小于  $\tilde{d}$  时, 避障任务被逐渐激活。避障速度  $v_i$  为:

$$v_i = h_i v_o. \quad (41)$$

在仿真过程中,  $\tilde{d} = 1.5 \text{ cm}$ ,  $v_o = 9$ 。

仿真过程中, 采用连续迭代投影多任务优先级方法式(17), 以避障任务为首要任务, 末端轨迹跟踪任务在避障任务的零空间中运行, 可以表示为:

$$\dot{\mathbf{q}}_{\text{IS}} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{\text{NH}}^1) (\mathbf{J}_o)^{\dagger} \mathbf{v} + \mathbf{P}_{\text{NH}}^1 (\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{\text{NH}}^2) (\mathbf{J}_e \mathbf{P}_{\text{NH}}^1)^{\dagger} \dot{\mathbf{x}}_e, \quad (42)$$

式中六个连杆的避障任务的雅可比  $\mathbf{J}_o$  为:

$$\mathbf{J}_o = [(\mathbf{J}_o^1)^T \quad (\mathbf{J}_o^2)^T \quad (\mathbf{J}_o^3)^T \quad (\mathbf{J}_o^4)^T \quad (\mathbf{J}_o^5)^T \quad (\mathbf{J}_o^6)^T]^T. \quad (43)$$

避障任务的激活矩阵为  $\mathbf{H}_o = \text{diag}\{h_1, \dots, h_6\}$ ,  $\mathbf{P}_{\text{NH}}^1 = \left(\prod_{i=1}^6 (\mathbf{I}_n - h_i (\mathbf{J}_o^i)^{\dagger} \mathbf{J}_o^i)\right)^N$ , 六个连杆的避障速度为  $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_6]^T$ 。末端轨迹的跟踪任务为:

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{e} = \mathbf{K}_e (\mathbf{x}_d - \mathbf{x}). \quad (44)$$

末端轨迹跟踪任务的激活矩阵为  $\mathbf{H}_e = \text{diag}\{1, 1\}$ , 末端轨迹的跟踪任务始终激活, 在避障任务的零空间中运行,  $\mathbf{J}_e \mathbf{P}_{\text{NH}}^1$  的连续迭代零空间为:

$$\mathbf{P}_{\text{NH}}^2 = \left(\prod_{i=1}^6 (\mathbf{I}_n - h_i (\mathbf{J}_o^i)^{\dagger} \mathbf{J}_o^i)\right) \prod_{i=1}^2 (\mathbf{I}_n - (\mathbf{J}_e^i)^{\dagger} \mathbf{J}_e^i)^N. \quad (45)$$

避障任务为首要任务, 末端轨迹跟踪任务为次要任务, 引入激活矩阵, 根据式(8)采用增广雅可比零空间投影多任务优先级方法可以表示为:

$$\dot{\mathbf{q}}_{\text{AP}} = (\mathbf{H}_o \mathbf{J}_o)^{\dagger} \mathbf{H}_o \mathbf{v} + \mathbf{P}_1 (\mathbf{H}_e \mathbf{J}_e \mathbf{P}_1)^{\dagger} \mathbf{H}_e \dot{\mathbf{x}}_e, \quad (46)$$

式中: 六个连杆避障任务的增广零空间  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I}_n - (\mathbf{H}_o \mathbf{J}_o)^{\dagger} \mathbf{H}_o \mathbf{J}_o$ 。

对于仿真中可能出现的奇异问题, 引入了阻尼因子来避免奇异带来的关节速度不连续。对于矩阵  $\mathbf{A}$ , 引入阻尼因子  $\lambda$  时, 其伪逆的形式如下:

$$\mathbf{A}_D^{\dagger} = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T + \lambda^2 \mathbf{I}_n)^{-1}. \quad (47)$$

式中阻尼因子  $\lambda$  的设置如下:

$$\lambda^2 = \begin{cases} 0 & \sigma_{\min} \geq \epsilon, \\ \left(1 - \left(\frac{\sigma_{\min}}{\epsilon}\right)^2\right) \lambda_{\max}^2 & \text{其他}. \end{cases} \quad (48)$$

式中,  $\epsilon$  为避开奇异区域的宽度,  $\lambda_{\max}$  为允许的最大阻尼因子,  $\sigma_{\min}$  表示为矩阵  $\mathbf{A}$  的最小非零奇异值。式(42)中, 对雅可比矩阵  $\mathbf{J}_o$  和矩阵  $\mathbf{J}_e \mathbf{P}_{\text{NH}}^1$ , 取其对应的加入阻尼因子的伪逆。式(46)中, 对雅可比矩阵  $\mathbf{H}_o \mathbf{J}_o$  和矩阵  $\mathbf{H}_e \mathbf{J}_e \mathbf{P}_1$ , 取其对应的加入阻尼因子的伪逆。在仿真中, 取  $\lambda_{\max}^2 = 5 \times 10^{-4}$ ,  $\epsilon = \sqrt{3} \lambda_{\max}^2$ 。

在仿真过程中, 迭代次数  $N=10$ , 末端跟踪反馈增益矩阵为  $\mathbf{K}_e = 10 \mathbf{I}_n$ , 控制周期  $T=5 \text{ ms}$ 。

## 4.2 仿真结果

连续迭代投影多任务优先级方法仿真结果如图1所示。图1为连续迭代投影多任务优先级方法式(42)仿真结果。图1(a)展示了连续迭代投影任务优先级算法仿真的运动过程。在初始运动阶段  $t=[0, 2.9) \text{ s}$  时, 所有连杆远离柱形障碍物, 避障任务的激活因子都为零, 自由度用于执行轨迹跟踪任务, 连杆末端以直线

形式朝着目标点靠近。之后连杆靠近障碍物,连杆 6、5、3 的避障任务依次激活,激活因子从零连续平滑增大,避障任务具有较高的优先级,得到保证,关节速度的变化也为连续的。由于末端轨迹任务处于次优先级,跟踪任务出现了误差,跟踪任务的误差在运动结束时收敛到了零。

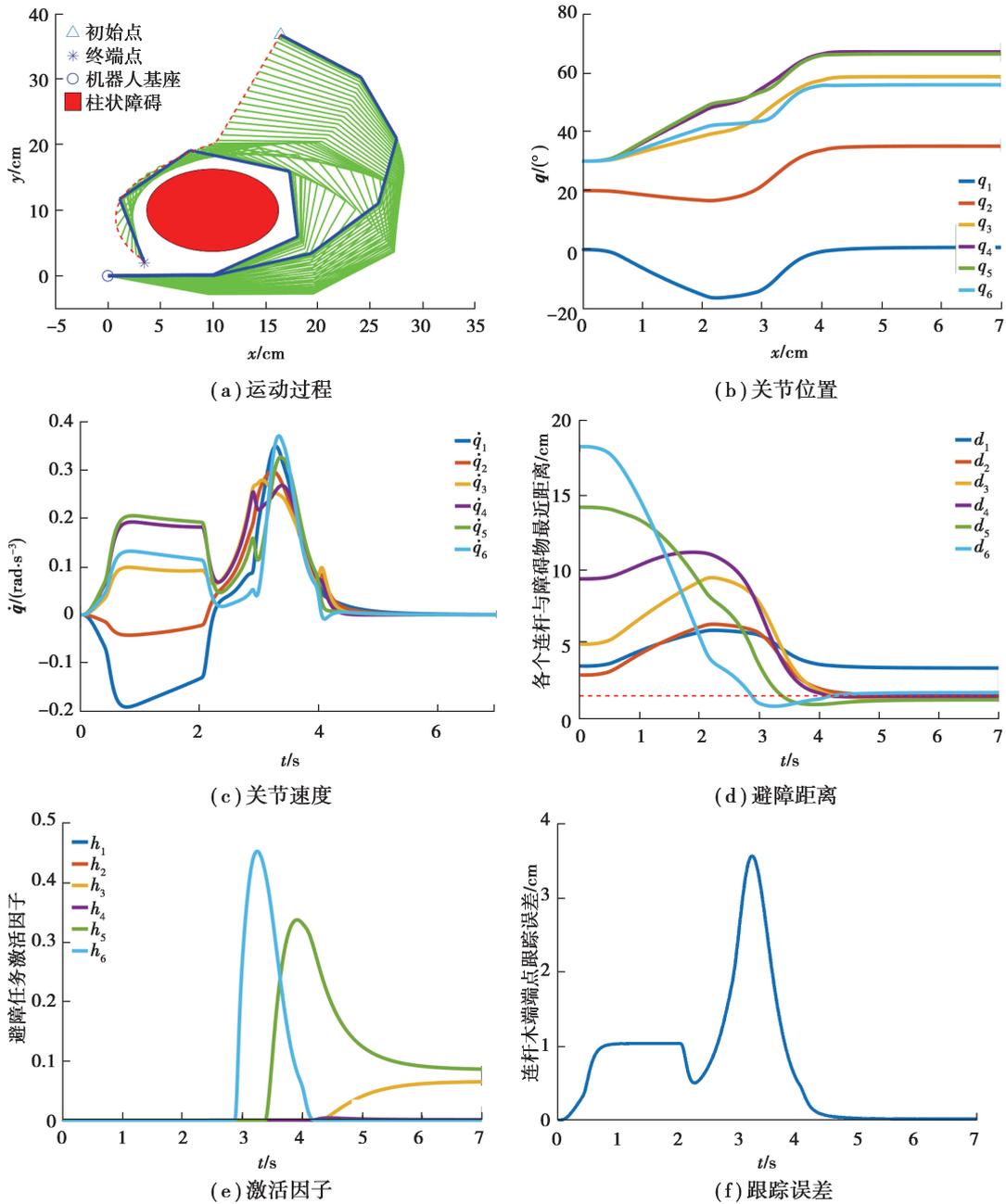


图 1 连续迭代投影多任务优先级方法仿真结果

Fig. 1 The simulation results of iteratively successive projection multi-task priority method

图 2 为增广投影多任务优先级方法式(46)的仿真结果。在  $t=2.9$  s 之前,连杆末端以直线形式朝着目标点前进,逐渐靠近圆柱形障碍物。在  $t=2.9$  s 之后,避障任务逐渐激活,关节速度发生突变震荡,由于阻尼因子的作用,关节速度没有出现不连续。由于避障任务处于较高优先级,在运行过程中避障任务始终得到了保证。但需要注意的是,增广投影多任务优先级方法采用阻尼因子来保证关节速度和投影算子的连续性,在任务结束时,避障任务不需要执行之后,高优先级的自由度没有得到释放,跟踪任务处于次优先级,跟踪任务误差没有收敛到零。

对比两种方法的仿真结果,可知相比于增广投影多任务优先级方法,连续迭代投影多任务优先级方法能

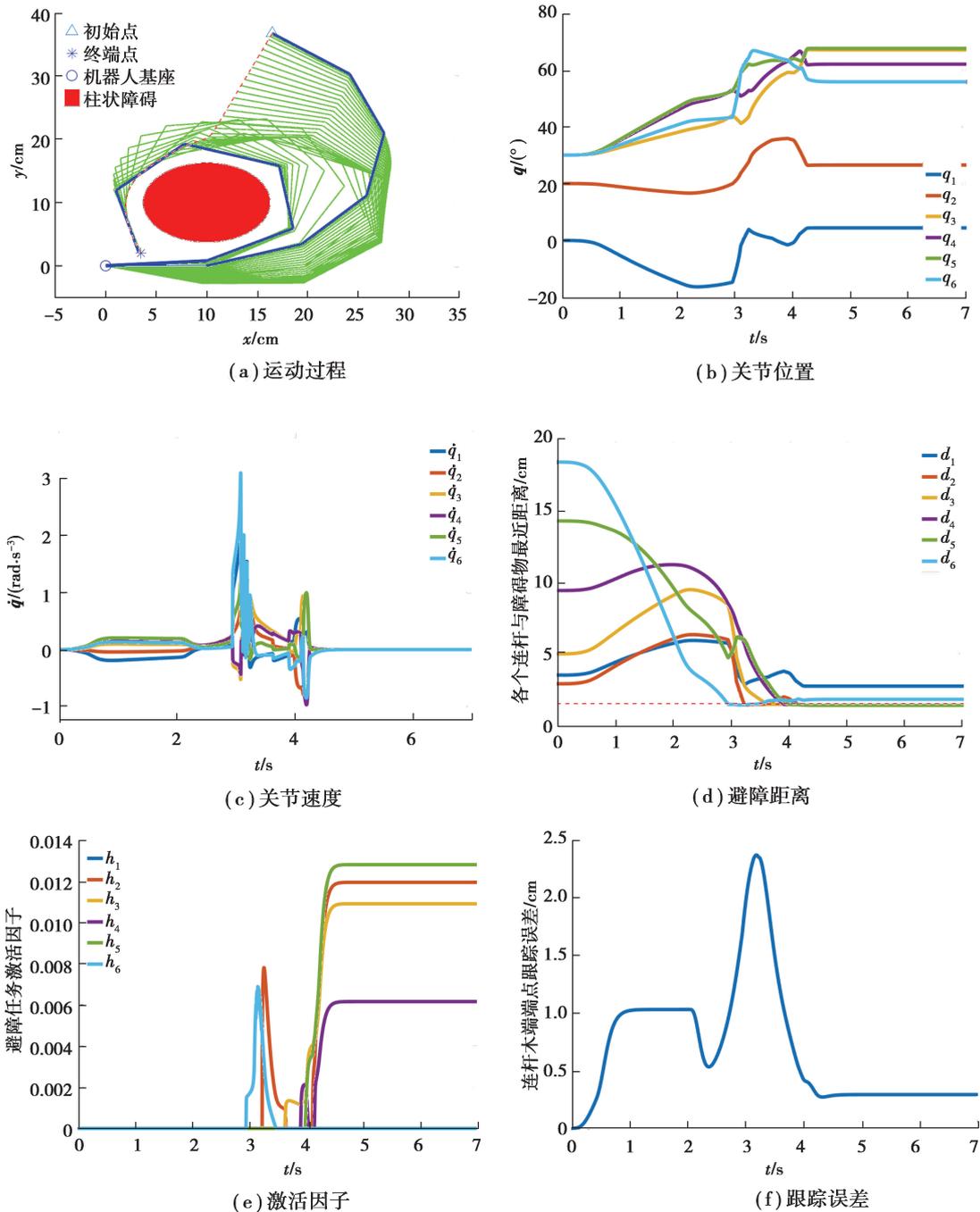


图 2 增广投影多任务优先级方法仿真结果

Fig. 2 The simulation results of augmented projection multi-task priority method

够很好地保证关节速度的连续性。且可以在任务移除后,释放自由度,在冗余度的范围内尽可能地保证低优先级任务。

## 5 结 语

1) 基于连续迭代投影原理,提出了连续迭代投影多任务优先级方法。当任务处于完全激活状态,迭代次数趋于无穷大时,可以保证任务优先级层次的有效性。

2) 根据李雅普诺夫稳定性理论,当连续迭代投影算子的迭代次数趋于无穷大时,证明了所提出的连续迭代投影多任务优先级方法的稳定性。

3) 设置柱形避障碍物,以避障任务为首要任务,末端轨迹跟踪任务为次要任务。对比增广投影多任务优先

级方法,在六连杆的平面机械臂上仿真验证了所提出方法的有效性和稳定性。在仿真过程中,当避障任务不需要考虑时,自由度用于完成末端轨迹跟踪任务;当连杆靠近障碍物时,避障任务分别被激活,避障任务得到保证;在运动结束时,末端轨迹跟踪任务的误差收敛到了零。

4)在推导过程中多以连续迭代投影算子的迭代次数趋于无穷大为条件。然而,迭代次数较小时,可以保证关节速度的连续性;迭代次数增大时,连续迭代投影多任务优先级方法闭环系统的稳定性更好,关节速度的连续性难以得到保证。迭代次数的折中选取仍是需要深入探讨的问题。

#### 参考文献:

- [ 1 ] Automatic supervisory control of the configuration and behavior of multibody mechanisms[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1977, 7(12): 868-871.
- [ 2 ] Maciejewski A A, Klein C A. Obstacle avoidance for kinematically redundant manipulators in dynamically varying environments[J]. The International Journal of Robotics Research, 1985, 4(3): 109-117.
- [ 3 ] Egeland O. Task-space tracking with redundant manipulators[J]. IEEE Journal on Robotics and Automation, 1987, 3(5): 471-475.
- [ 4 ] Chiacchio P, Chiaverini S, Sciavicco L, et al. Closed-loop inverse kinematics schemes for constrained redundant manipulators with task space augmentation and task priority strategy[J]. The International Journal of Robotics Research, 1991, 10(4): 410-425.
- [ 5 ] Xiang J, Zhong C W, Wei W. General-weighted least-norm control for redundant manipulators[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2010, 26(4): 660-669.
- [ 6 ] Chan T F, Dubey R V. A weighted least-norm solution based scheme for avoiding joint limits for redundant joint manipulators[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1995, 11(2): 286-292.
- [ 7 ] Jiang P, Xiang J, Wei W, et al. General-weighted least-norm control for redundant manipulators under time-dependent constraint[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2015, 12(5): 53.
- [ 8 ] Huang S H, Xiang J, Wei W, et al. On the virtual joints for kinematic control of redundant manipulators with multiple constraints[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2018, 26(1): 65-76.
- [ 9 ] Jiang P, Huang S H, Xiang J, et al. A unified approach for second-order control of the manipulator with joint physical constraints[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2017, 9(4): 041009.
- [10] Nakamura Y, Hanafusa H, Yoshikawa T. Task-priority based redundancy control of robot manipulators[J]. The International Journal of Robotics Research, 1987, 6(2): 3-15.
- [11] Siciliano B, Slotine J J E. A general framework for managing multiple tasks in highly redundant robotic systems[C]//Fifth International Conference on Advanced Robotics' Robots in Unstructured Environments. Pisa, Italy. IEEE: 1211-1216.
- [12] Mansard N, Remazeilles A, Chaumette F. Continuity of varying-feature-set control laws[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(11): 2493-2505.
- [13] Chiaverini S. Singularity-robust task-priority redundancy resolution for real-time kinematic control of robot manipulators[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1997, 13(3): 398-410.
- [14] Petrič T, Žlajpah L. Smooth continuous transition between tasks on a kinematic control level: obstacle avoidance as a control problem[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2013, 61(9): 948-959.
- [15] Mansard N, Khatib O, Kheddar A. A unified approach to integrate unilateral constraints in the stack of tasks[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2009, 25(3): 670-685.
- [16] Lee J, Mansard N, Park J. Intermediate desired value approach for task transition of robots in kinematic control[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2012, 28(6): 1260-1277.
- [17] Jiang P, Huang S H, Xiang J, et al. Iteratively successive projection: a novel continuous approach for the task-based control of redundant robots[J]. IEEE Access, 2019, 7: 25347-25358.
- [18] 黄水华. 多约束下的机械臂运动控制算法研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2016.  
Huang S H. Research on kinematic control of manipulator with multiple constraints[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2016. (in Chinese)