

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2021.257

# 含流体相应力杂交单元等效弹性模量的分析

邱莹宇, 郭 然

(昆明理工大学 建筑工程学院, 昆明 650504)

**摘要:**在页岩气开采的过程中,对含有大量微孔洞的页岩的真实模拟存在困难,因为往往涉及到带有流体孔洞问题,其中最主要的是拉格朗日网格与欧拉网格的过渡问题。针对这一问题,建立了一种带有流体的固体单元模型。在流固交界面引入面力平衡条件后,得到了它的修正余能泛函,并推导出一种新的带流体的应力杂交元。在与普通商业有限元软件 MARC 对比验证其有效性后,分别研究了在形状、体分比、空间分布位置、半径改变时模型等效弹性模量的变化。结果表明,不同形状对等效弹性模量影响不大;同体分比时,含流体孔半径增大,等效弹性模量也随之增大;体分比增大时,模型等效弹性模量逐渐下降;角度逐渐增大时,等效弹性模量逐渐减小,并且下降幅度逐渐减小。模型在流固交界面发生应力集中,且集中方向为孔的上下两侧。

**关键词:**流体-固体材料;应力杂交单元;页岩气开采;等效弹性常数;欧拉网格;拉格朗日网格  
**中图分类号:** O343.1      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1000-582X(2022)12-048-11

## Analysis of equivalent elastic modulus in stress hybrid element with fluid

QIU Yingyu, GUO Ran

(Architectural Engineering Institute, Kunming University of Science and Technology,  
Kunming 650504, P. R. China)

**Abstract:** In the process of shale gas exploitation, it is difficult to simulate the real shale with a large number of micro-cavities because fluid cavities are involved, and the most important problem is the transition at the interface of the Lagrangian grid and the Euler grid. In response to this problem, a solid element model with fluid was established. The surface force balance condition at the fluid-solid interface was introduced, its modified complementary energy functional was obtained, and a new stress hybrid element with fluid was derived. By comparison with the common commercial finite element software Marc, the effectiveness of the model was verified. The equivalent elastic modulus of the model was studied in the condition when the shape, the volume fraction, the spatial distribution position, and the average radius were changed separately. The results show that when the volume fraction remains unchanged, the equivalent elastic modulus increases as the radius of the fluid-containing hole increases, while different shapes have little effect on the equivalent elastic modulus. When the volume fraction rises, the equivalent

收稿日期:2021-03-10      网络出版日期:2021-05-17

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12072135)。

Supported by the National Natural Science Foundation of China (12072135).

作者简介:邱莹宇(1994—),男,硕士研究生,主要从事计算固体力学研究,(E-mail)842523485@qq.com。

通信作者:郭然,男,昆明理工大学教授,博士生导师,(E-mail)guor@kust.edu.cn。

elastic modulus of the model greatly decreases. When the angle increases, the equivalent elastic modulus gradually decreases, and the decreasing amplitude drops slightly. The model has stress concentration at the fluid-solid interface, and the concentration direction is on the upper and lower sides of the hole.

**Keywords:** fluid-solid material; stress hybrid element; shale gas exploitation; equivalent elastic modulus; Euler grid; Lagrangian grid

页岩是沉积岩中的一种,具有十分明显的层理构造<sup>[1]</sup>。页岩气是指以吸附或游离且有时还带有流体相的形态赋存于泥页岩中的非常规天然气<sup>[2]</sup>。页岩气在中国资源储量丰富,地域分布广泛。页岩气开采能缓解我国常规油气产量不足、煤化工燃料引起环境污染等问题,已成为中国绿色能源开发的重要领域<sup>[3]</sup>。中国页岩气埋藏深,赋存条件差,自然丰度低<sup>[2]</sup>,高效开发理论与产能评价处于起步阶段,因此,高效开采面临更多的困难和挑战<sup>[4]</sup>。而无论是在用水力压裂手段<sup>[1]</sup>开采页岩气时,还是处理页岩中含有流体的大量微小孔洞时,不可避免地会出现流固耦合的数值模拟问题。因此,带有流体的固体单元的研究具有重要意义。

卞学鑽<sup>[5]</sup>在 1964 年创建了假设应力有限元方法,即应力杂交元。最初的应力杂交元是通过修正余能泛函建立的,假定单元中存在满足平衡方程的应力场,单元边界满足力的平衡条件,并且通过对界面节点位移进行插值获得边界位移。1988 年下半年,Accorsi 根据最小势能原理推导了一个新单元<sup>[6-7]</sup>。2016 年,黄永霞等<sup>[8]</sup>进行了颗粒增强复合材料有效模量的 Voronoi 单元有限元法分析。2017 年,Zhang 等<sup>[9]</sup>使用 Voronoi 单元法提出了含孔洞单元的修正余能泛函形式,在少量单元的情况下,获得了在内部压力作用下的应力分布。2019 年,韩宁等<sup>[10]</sup>模拟了颗粒夹杂复合材料的力学性能,分析了网格划分对复合材料力学分析精度的影响。同年,Han 等<sup>[11]</sup>提出了一种新的单元,其裂纹从内孔的边缘开始,并且在单元内和单元间扩展。他们采用的 Voronoi 单元网格划分方法在处理形状简单和尺寸较小的微结构方面具有优势,但当孔体积分数相对较大或彼此之间的距离非常接近时(如图 1 所示),将很难进行网格化。

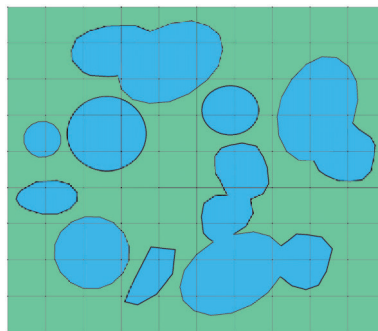


图 1 页岩中流体微结构的分布情况(蓝色代表流体,绿色代表页岩)

Fig. 1 Distribution of fluid microstructure in shale (blue represents fluid, and green represents shale)

针对大量含流体孔洞的页岩问题,笔者提出了一种采用均匀网格并满足流固界面压力平衡的新的流固耦合单元 fluid-structure coupling stress hybrid element(FCSHE)。该单元可以进一步推广,解决一般性的流固耦合问题。

通过对简单四单元模型 FCSHE 与 MARC 模型的应力分布情况以及等效弹性模量的对比验证,证明单元的有效性后,建立多个模型,分别通过改变形状、体分比、空间分布位置和半径,研究了等效弹性模量变化的影响因素<sup>[12-16]</sup>。

## 1 含流体相的应力杂交单元(FCSHE)

杂交元是基于最小余能原理的有限元模型,其中应力函数为场变量,余能泛函如式(1)所示<sup>[5]</sup>。

$$\Pi_c = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\partial\Omega_u} \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Omega, \quad (1)$$

式中:  $\boldsymbol{\sigma}$  是域  $\Omega$  中的平衡应力场,  $\mathbf{S}$  是柔度矩阵,  $\mathbf{T}$  是边界上的面力,  $\partial\Omega_u$  是给定的位移边界,  $\bar{\mathbf{u}}$  是边界上的给定位移。

为了满足表面力的边界条件

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{T}}, \quad (2)$$

式中:  $\bar{\mathbf{T}}$  是边界上的面力,  $\mathbf{n}$  是面力边界上的法线向量,  $\boldsymbol{\sigma}$  是面力边界上的应力, 并满足单元之间的平衡条件

$$\mathbf{n}^+ \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{n}^- \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{n}^+$  和  $\mathbf{n}^-$  分别是相邻单元边的法向向量, 使用拉格朗日乘子法引入 2 个约束, 以获得修正余能泛函<sup>[2]</sup>

$$\Pi_{mc} = \sum_e \left( \int_{V_e} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\partial V_e} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} dS + \int_{\partial\Omega_{te}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} dS \right). \quad (4)$$

式中:  $\partial V_e$  是所有单元的边界,  $\partial\Omega_{te}$  是给定面力的边界,  $\mathbf{u}$  是单元边上的位移。

如图 2 所示, 在流体和固体的界面处, 满足表面力的平衡条件

$$\mathbf{n}^{fs} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^s - \boldsymbol{\sigma}^f) = \mathbf{0}, \quad (5)$$

式中:  $\boldsymbol{\sigma}^s$  是固体侧应力,  $\boldsymbol{\sigma}^f$  是流体侧应力,  $\mathbf{n}^{fs}$  是流体侧指向固体侧的交界处的法向矢量。

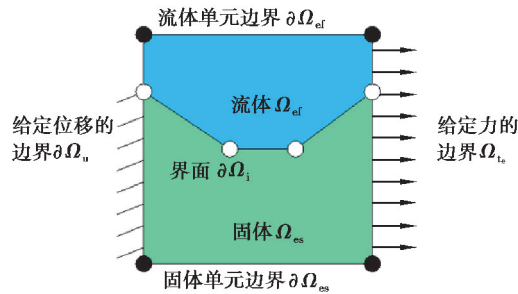


图 2 流固交界处的典型单元

Fig. 2 Typical element at fluid-solid junction

引入该约束条件得到修正余能泛函

$$\begin{aligned} \Pi_{sf} = \sum_e \left\{ \int_{\Omega_{es}} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega_{ef}} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\partial\Omega_{te}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} d\partial\Omega - \int_{\partial\Omega_{es}} \mathbf{n}^{es} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^{es} d\partial\Omega - \right. \\ \left. \int_{\partial\Omega_{ef}} \mathbf{n}^{ef} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^{ef} d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega_i} \mathbf{n}^{fs} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^s - \boldsymbol{\sigma}^f) \cdot \mathbf{u}^{fs} d\partial\Omega \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

式中:  $\mathbf{n}^{es}$  是元素的外部固体边界上的外部法线向量;  $\mathbf{n}^{ef}$  是流体边界上的是从流体侧指向固体侧的界面处的法线向量;  $\boldsymbol{\sigma}$  是在单元域中满足平衡的应力场;  $\mathbf{u}^{es}$  是在单元固体边界上的位移;  $\mathbf{u}^{ef}$  是在流体边界上的位移。

在固体部分  $\Omega_{es}$  中, 将自平衡应力场引入单元中<sup>[5]</sup>:

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \mathbf{P}^s \boldsymbol{\beta}^s. \quad (7)$$

式中:  $\mathbf{P}^s$  为固体部分的插值矩阵,  $\boldsymbol{\beta}^s$  为固体部分的待求系数列阵。

在流体部分  $\Omega_{ef}$  中, 考虑液体压强为一个常数, 此时,  $\sigma_x = \sigma_y, \tau_{xy} = 0$ , 所以

$$\boldsymbol{\sigma}^f = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_y \\ \sigma_y \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}^f \boldsymbol{\beta}^f. \quad (8)$$

式中:  $\mathbf{P}^f$  为流体部分的插值矩阵,  $\mathbf{P}^f = [1 \quad 1 \quad 0]^T$ ;  $\boldsymbol{\beta}^f$  为流体部分的待求系数列阵。若流体压强为一阶函数,

$$\boldsymbol{\sigma}^f = \mathbf{P}^f \boldsymbol{\beta}^f = \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

式中:  $x$  和  $y$  是构造出的应力函数的自变量; 若为二阶函数,

$$\boldsymbol{\sigma}^f = \mathbf{P}^f \boldsymbol{\beta}^f = \begin{bmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

注意,在静态分析中,页岩孔中流体的压力场通常是恒定的,因此以下所有模型均采用方程式(8)。

引入位移插值功能后,边界位移可以用节点位移表示:

单元固体侧的外部边界 $\partial\Omega_{es}$

$$\mathbf{u}^{es} = \mathbf{L} \mathbf{q}^{es}, \quad (11)$$

单元流体侧的外部边界 $\partial\Omega_{ef}$

$$\mathbf{u}^{ef} = \mathbf{L} \mathbf{q}^{ef}, \quad (12)$$

流固交界面 $\partial\Omega_i$

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{L} \mathbf{q}^i. \quad (13)$$

式中: $\mathbf{q}^{es}$ 是固体界面的节点位移; $\mathbf{q}^{ef}$ 是流体界面的节点位移; $\mathbf{q}^i$ 是流体和固体交界面的节点位移; $\mathbf{L}$ 是插值函数。

将方程(7)(8)和(11)~(13)代入方程(6),得到离散系统修正余能泛函的弱形式。根据修正余能泛函的平衡条件:

$$\frac{\partial \Pi_{sf}}{\partial \boldsymbol{\beta}^s} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Pi_{sf}}{\partial \boldsymbol{\beta}^f} = 0, \quad (15)$$

可以得到运动关系的弱表达形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^s & 0 \\ 0 & \mathbf{H}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^s \\ \boldsymbol{\beta}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{es} & 0 & \mathbf{G}_{is} \\ 0 & \mathbf{G}_{ef} & -\mathbf{G}_{if} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{es} \\ \mathbf{q}^{ef} \\ \mathbf{q}^i \end{bmatrix}. \quad (16)$$

其中,

$$\mathbf{H}^s = \int_{\Omega_s} \frac{1}{2} \mathbf{P}^{sT} \mathbf{S}_s \mathbf{P}^s d\Omega, \quad (17)$$

$$\mathbf{H}^f = \int_{\Omega_f} \frac{1}{2} \mathbf{P}^{fT} \mathbf{S}_f \mathbf{P}^f d\Omega, \quad (18)$$

$$\mathbf{G}_{es} = \int_{\partial\Omega_{es}} \mathbf{P}^{sT} \mathbf{n}^{esT} \mathbf{L} d\partial\Omega, \quad (19)$$

$$\mathbf{G}_{ef} = \int_{\partial\Omega_{ef}} \mathbf{P}^{fT} \mathbf{n}^{efT} \mathbf{L} d\partial\Omega, \quad (20)$$

$$\mathbf{G}_{is} = \int_{\partial\Omega_{is}} \mathbf{P}^{sT} \mathbf{n}^{isT} \mathbf{L}^{is} d\partial\Omega, \quad (21)$$

$$\mathbf{G}_{if} = \int_{\partial\Omega_{if}} \mathbf{P}^{fT} \mathbf{n}^{ifT} \mathbf{L}^{if} d\partial\Omega. \quad (22)$$

式中: $\Omega_s$ 是固体区域, $\Omega_f$ 是流体区域, $\Omega_{is}$ 是流固交界面上固体部分的边界, $\Omega_{if}$ 是流固交界面上流体部分的边界, $\mathbf{n}^{is}$ 是流固交界面上固体部分的法向向量, $\mathbf{n}^{if}$ 是流固交界面上流体部分的法向向量, $\mathbf{L}^{is}$ 是流固交界面上固体部分的插值函数, $\mathbf{L}^{if}$ 是流固交界面上流体部分的插值函数。

从上面可以看出,应力参数在单元中的位移表达式为

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{Q}, \quad (23)$$

其中,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^s & 0 \\ 0 & \mathbf{H}^f \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{es} & 0 & \mathbf{G}_{is} \\ 0 & \mathbf{G}_{ef} & -\mathbf{G}_{if} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^s \\ \boldsymbol{\beta}^f \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{es} \\ \mathbf{q}^{ef} \\ \mathbf{q}^i \end{bmatrix}. \quad (27)$$

节点位移  $\mathbf{q}^{es}$ 、 $\mathbf{q}^{ef}$  和  $\mathbf{q}^i$  关于系统  $\Pi_{sf}$  的总能量的一阶偏导可以表示为

$$\frac{\partial \Pi_{sf}}{\partial \mathbf{q}^{es}} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial \Pi_{sf}}{\partial \mathbf{q}^{ef}} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \Pi_{sf}}{\partial \mathbf{q}^i} = 0. \quad (30)$$

随即可以得到每个单元中的运动关系弱表达形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{es} & 0 & \mathbf{G}_{is} \\ 0 & \mathbf{G}_{ef} & -\mathbf{G}_{if} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^s \\ \boldsymbol{\beta}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s^e \\ \mathbf{F}_f^e \\ \mathbf{F}^i \end{bmatrix}, \quad (31)$$

式中:  $\mathbf{F}_s^e$  为固体边界面力,  $\mathbf{F}_f^e$  为流体边界面力,  $\mathbf{F}^i$  为流固交界面力。上式可简写为

$$\mathbf{G}^T \boldsymbol{\beta} = \bar{\mathbf{F}}, \quad (32)$$

其中,

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s^e \\ \mathbf{F}_f^e \\ \mathbf{F}^i \end{bmatrix}. \quad (33)$$

将方程式(23)和(32)组合在一起,得到表达式(34)来求解广义位移:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{Q} = \bar{\mathbf{F}}, \quad (34)$$

得到求解广义位移的方程组

$$\mathbf{K} \mathbf{Q} = \bar{\mathbf{F}}, \quad (35)$$

其中,

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{es} & 0 & \mathbf{G}_{is} \\ 0 & \mathbf{G}_{ef} & -\mathbf{G}_{if} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{H}^s & 0 \\ 0 & \mathbf{H}^f \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{es} & 0 & \mathbf{G}_{is} \\ 0 & \mathbf{G}_{ef} & -\mathbf{G}_{if} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

方程(35)的刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}_e = \sum_e \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}. \quad (37)$$

式中:  $\mathbf{K}_e$  表示单元的刚度,  $e$  表示所在单元。

## 2 算例

### 2.1 验证模型

在此算例中,建立了一个带孔的正方形板模型,分析了其在平面应力状态下的线弹性静力学行为。正方形板边长为 0.40 mm,在中心有一个半径为 0.05 mm 的孔,并充满了水(不考虑流动)。由于 MARC 软件中没有液体单元,因此通过在孔中施加压力(从 FCSHE 获取)来表示含水孔。FCSHE 模型由 4 个单元组

成, MARC 模型由 11 482 个单元组成。边界条件如图 3(a)所示,水平位移为  $0.15 \mu\text{m}$ 。在模型仿真分析中使用的材料属性如下:

固体:弹性模量  $E^s = 72.0 \text{ GPa}$ ,泊松比  $\nu^s = 0.33$ 。

流体:弹性模量  $E^f = 2.18 \text{ GPa}$ ,泊松比  $\nu^f = 0.50$ 。

由于没有流固耦合材料的解析解,所以采用与 MARC 结果作对比的形式来验证有效性。图 3 中的 3 幅图分别是工况图(a)、由 FCSHE 和 MARC 得到的模型(b)和(c),图 4~6 为 FCSHE 和 MARC 分别得到的  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  和  $\tau_{xy}$  应力云图。一条线上的路径和结果显示在图 7 中。比较结果发现,尽管存在一些细微的差异,应力的总体分布、应力集中的位置以及应力场值的趋势都非常相似,而且应力集中出现在流固交界面的上下两侧,不同于固体材料的左右两侧。

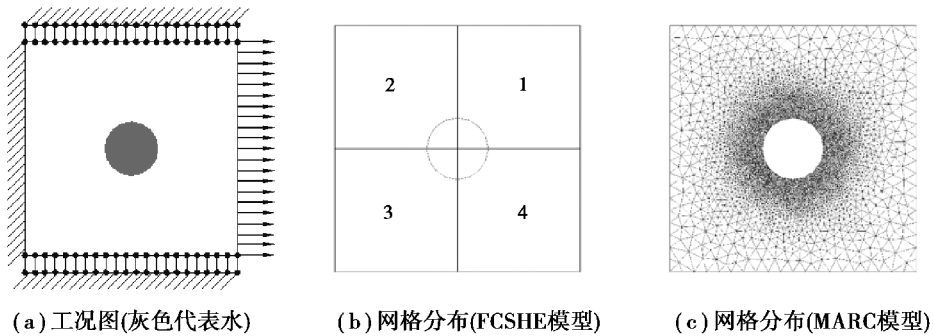


图 3 工况及网格划分图

Fig. 3 Boundary conditions and mesh diagram

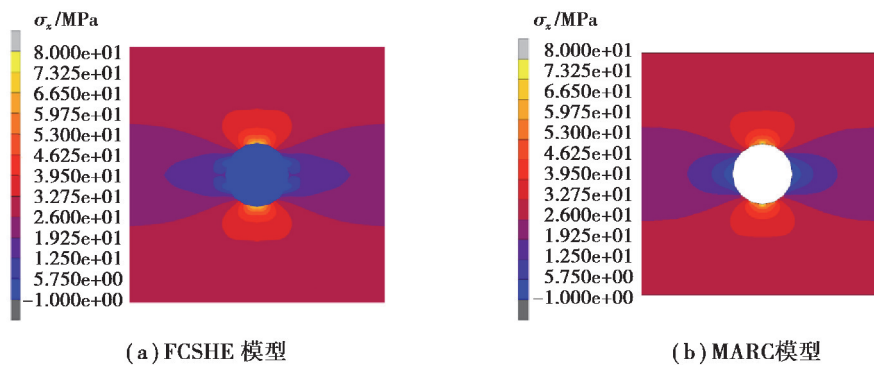


图 4 FCSHE(a)和 MARC(b)的应力在 x 方向上的应力分量云图

Fig. 4 Contour plots of stress x of FCSHE (a) and MARC (b)

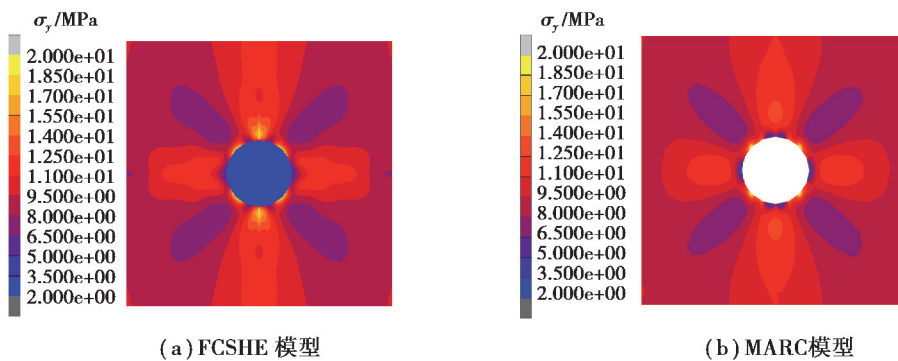


图 5 FCSHE(a)和 MARC(b)的应力在 y 方向上的应力分量云图

Fig. 5 Contour plots of stress y of FCSHE (a) and MARC (b)

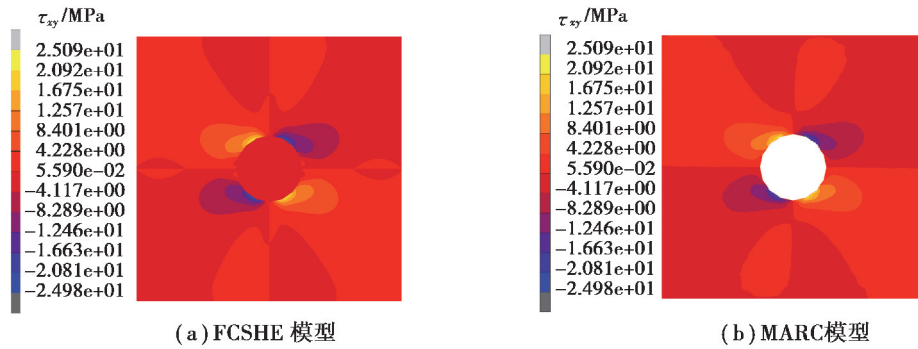


图 6 FCSHE(a)和 MARC(b)的切应力的应力云图

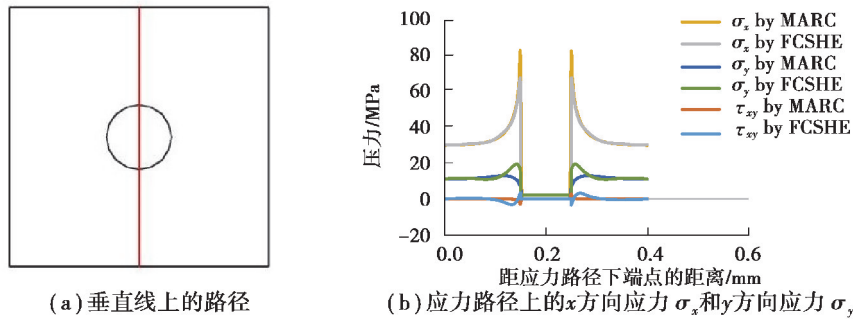
Fig. 6 Contour plots of shear stress  $\tau_{xy}$  of FCSHE (a) and MARC (b)

图 7 应力路径图

Fig. 7 Diagram of stress on the path

在 FCSHE 方法中,流体与固体之间的界面上节点很少,并且每 2 个节点之间的位移采用线性插值法,因此界面上的位移场相对简单。在 MARC 中,界面处节点很多,因此应力场会更加丰富。这是两个模型的计算结果不同的主要原因。

经计算可知,FCSHE 法得出的等效弹性模量为 62.84 GPa, MARC 中算出的等效弹性模量为 62.60 GPa,两者相对误差为 0.385%,证明了 FCSHE 法的有效性。

## 2.2 等效弹性模量的影响因素

### 2.2.1 体分比对等效弹性模量的影响

在  $8\text{ mm} \times 12\text{ mm}$  的长方形上建立模型,其上分布有 10 个含水孔。边界条件为:上下两侧约束  $y$  方向位移,左侧约束  $x$  方向位移,右侧给定一个  $0.3\ \mu\text{m}$  的方向向右的位移。模型一共 100 个单元,外边界含 121 个节点,流固交界面的边界包含 4 个节点。含水孔体分比  $w$  分别为 4%、8%、12%。在模拟分析中所用材料的弹性模量和泊松比与模型验证中所用材料相同。

图 8 为不同体分比的单元模型示意图,图 9 为等效弹性模量随体分比的变化情况。很容易看出,材料的等效弹性模量随孔的体分比增大而减小,且基本呈线性变化。通过对体分比的研究得知,可以通过减小含流体孔洞材料的体分比提高材料的等效弹性模量。

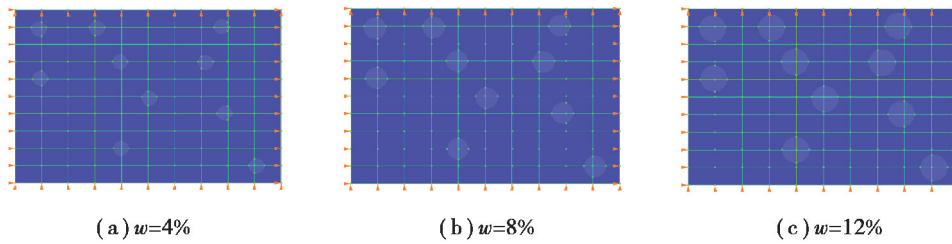


图 8 不同体分比单元模型

Fig. 8 Element model with different volume fractions

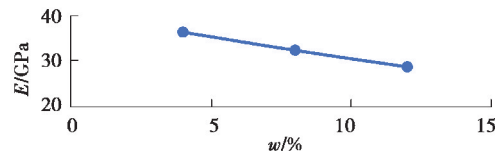


图 9 等效弹性模量随体分比变化

Fig. 9 The variation of equivalent elastic modulus with volume fraction

### 2.2.2 半径对等效弹性模量的影响

8 mm×12 mm 的长方形上分布有若干圆形含水孔。边界条件为:上下两侧约束  $y$  方向位移,左侧约束  $x$  方向位移,右侧给定一个  $0.3 \mu\text{m}$  的方向向右的位移。单元模型一共 64 个单元,外边界含 81 个节点,流固交界面上有 4 个节点。单元最大边数为 6,最大内边数为 7。保持孔体分比都为 7%,孔的半径  $r$  为 0.4,0.5,0.6 mm(单元模型如图 10 所示)。

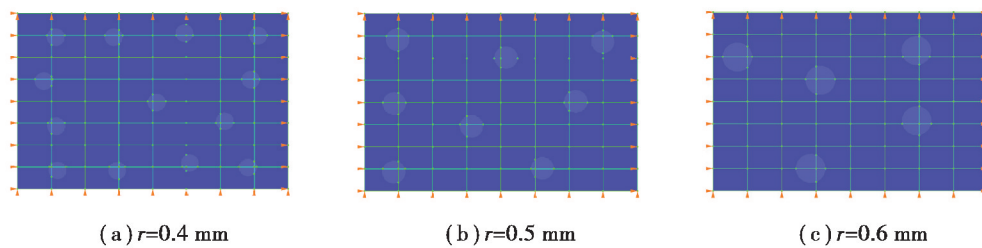


图 10 不同半径单元模型

Fig. 10 Element model with a different radius

在孔的体分比不变的情况下,半径与孔的数量成反比。图 11 显示的是等效弹性模量随半径的变化情况,由图可知,半径增大时,等效弹性模量也逐渐增大,不呈线性。

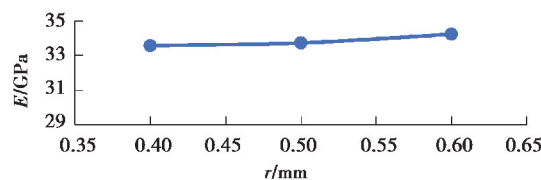


图 11 等效弹性模量随半径变化

Fig. 11 The variation of equivalent elastic modulus with radius

### 2.2.3 形状对等效弹性模量的影响

8 mm×12 mm 的长方形上分布有 10 个含水孔。边界条件为:上下两侧约束  $y$  方向位移,左侧约束  $x$



方向位移,右侧给定一个  $0.3 \mu\text{m}$  的方向向右的位移。单元模型一共 64 个单元,外边界含 81 个节点,流固交界面上有 4 个节点。单元最大边数为 6,最大内边数为 6。形状改变方差控制了孔的长短轴,长短轴的取值符合正态分布式(38)。当  $S_{\text{var}}$  为 0 时,孔的长短轴相等,孔呈圆形。当  $S_{\text{var}}$  值增大时,保持其他控制参数不变,形状改变方差  $S_{\text{var}}$  分别为 0.00、0.10、0.15 和 0.20。形状改变方差越大,孔越扁平,当它为 0 时,孔为圆形。

$$f(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (38)$$

式中: $\mu$  为平均数; $\sigma$  为标准差,即  $S_{\text{var}}$  的算术平方根; $a$ 、 $f(a)$  为孔的长短轴。

图 12 为不同方差单元模型图,图 13 为方差在 0.00~0.20 区间时等效弹性模量的变化情况。由图 13 可知,在 0.00~0.10 区间时,等效弹性模量随方差增大而增大。在 0.10~0.20 区间时,等效弹性模量随方差增大而减小,且减小的幅度较大。如要得到符合正态分布的规律曲线,需要大量的样本。

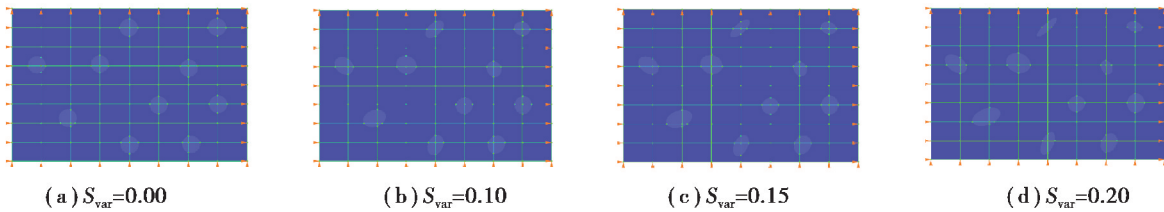


图 12 不同方差单元模型

Fig. 12 Element model with different variances

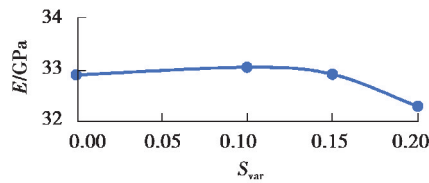


图 13 等效弹性模量随方差变化

Fig. 13 The variation of equivalent elastic modulus with variance

#### 2.2.4 空间分布对等效弹性模量的影响

在  $8 \text{ mm} \times 12 \text{ mm}$  的长方形上分布有 3 个圆形含水孔,孔半径为  $0.5 \text{ mm}$ 。边界条件为:上下两侧约束  $y$  方向位移,左侧约束  $x$  方向位移,右侧给定一个  $0.3 \mu\text{m}$  的方向向右的位移。单元模型— 36 个单元,外边界含 49 个节点,流固交界面上有 4 个节点。单元最大边数为 6,最大内边数为 3。保持其他控制参数不变,改变孔的空间分布位置,以 3 个孔的中心点连线与水平线的夹角为角度  $S_a$ ,研究  $S_a$  分别为  $0^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$  时(如图 14 所示)等效弹性模量的变化情况。由图 15 可知,在  $0^\circ$  到  $60^\circ$  区间内,等效弹性模量随角度  $S_a$  增大而减小,并且几乎呈线性变化。

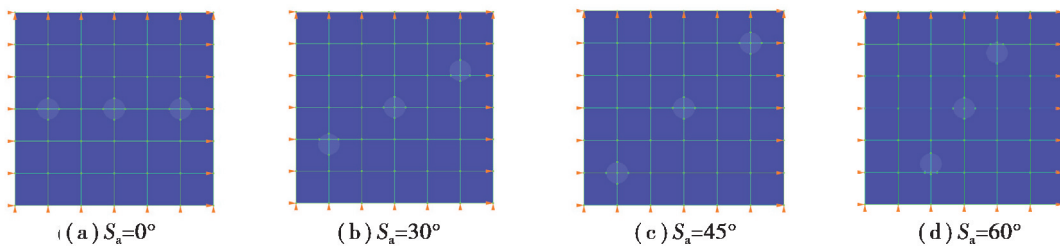


图 14 不同角度单元模型

Fig. 14 Element model with different angles

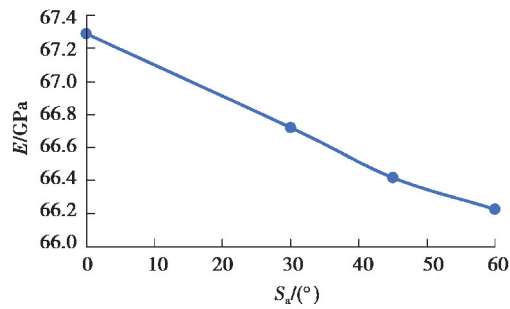


图 15 等效弹性模量随角度变化

Fig. 15 The variation of equivalent elastic modulus with angle

### 3 结 论

基于普通应力杂交元原理,推导了一种带有新的流体相的固体单元(FCSHE),在处理页岩中大量孔的问题时,该单元可以大大减少计算量。它既包含流体又包含固体,适合作为流固耦合界面上的单元,可以很好地解决流固网格的过渡问题。建立了典型的四单元模型与普通商业有限元计算软件 MARC 作对比,两者之间应力分布基本一致,等效弹性模量相对误差在 0.4% 以内,证明了其有效性。进一步分别研究了形状、体分比、空间分布位置和半径变化时模型等效弹性模量的变化。结果显示,不同形状对等效弹性模量影响不大;同体分比时,随含流体孔半径增大,等效弹性模量随之非线性增大;体分比增大时,等效弹性模量呈线性下降;当角度逐渐增大时,等效弹性模量逐渐减小,并且下降幅度逐渐减小。

#### 参考文献:

- [1] 李晓,赫建明,尹超,等.页岩结构面特征及其对水力压裂的控制作用[J].石油与天然气地质,2019,40(3):653-660.  
Li X, He J M, Yin C, et al. Characteristics of the shale bedding planes and their control on hydraulic fracturing[J]. Oil & Gas Geology, 2019, 40(3): 653-660. (in Chinese)
- [2] 柳占立,庄苗,孟庆国,等.页岩气高效开采的力学问题与挑战[J].力学学报,2017,49(3):507-516.  
Liu Z L, Zhuang Z, Meng Q G, et al. Problems and challenges of mechanics in shale gas efficient exploitation[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2017, 49(3): 507-516.(in Chinese)
- [3] 庄苗,柳占立,王涛,等.页岩水力压裂的关键力学问题[J].科学通报,2016,61(1):72-81.  
Zhuang Z, Liu Z L, Wang T, et al. The key mechanical problems on hydraulic fracture in shale[J]. Chinese Science Bulletin, 2016, 61(1): 72-81.(in Chinese)
- [4] 邹才能,董大忠,王玉满,等.中国页岩气特征、挑战及前景(二)[J].石油勘探与开发,2016,43(2):166-178.  
Zou C N, Dong D Z, Wang Y M, et al. Shale gas in China: characteristics, challenges and prospects(II)[J]. Petroleum Exploration and Development, 2016, 43(2): 166-178. (in Chinese)
- [5] 卞学鑽.有限元法论文选[M].张相麟,樊大钧,薛大为,等译.北京:国防工业出版社,1980:291-293.  
Pian T H H. Selected papers on finite element[M]. Zhang X L, Fan D J, Xue D W, et al. trans. Beijing: National Defense Industry Press, 1980: 291-293. (in Chinese)
- [6] Zhang J, Dong P. A hybrid polygonal element method for fracture mechanics analysis of resistance spot welds containing porosity[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1998, 59(6): 815-825.
- [7] Accorsi M L, Chamarajanagar R. Numerical validation of a hybrid finite element method using eigenstrain[J]. Computers & Structures, 1991, 41(5): 1065-1071.
- [8] 黄永霞,郭然,李伟.颗粒增强复合材料有效模量的 Voronoi 单元有限元法分析[J].重庆大学学报,2016,39(5):63-72.  
Huang Y X, Guo R, Li W. Finite element method based on Voronoi cell for the effective modulus of particle reinforced composites[J]. Journal of Chongqing University, 2016, 39(5): 63-72. (in Chinese)

(下转第 70 页)

- [35] Cahn J W, Hilliard J E. Free energy of a nonuniform system. I. interfacial free energy and free energy[J]. *The Journal of Chemical Physics*, 1958, 28(2): 258-267.
- [36] Jacqmin D. An energy approach to the continuum surface tension method[C]// 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, January 15-18, 1996, Reno, NV. Reston, Virginia: AIAA, 1996.
- [37] Kim J. A continuous surface tension force formulation for diffuse-interface models[J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, 204(2): 784-804.
- [38] Liu H H, Valocchi A J, Zhang Y H, et al. Lattice Boltzmann phase-field modeling of thermocapillary flows in a confined microchannel[J]. *Journal of Computational Physics*, 2014, 256: 334-356.
- [39] Zhang T Y, Wang Q. Cahn-Hilliard vs singular Cahn-Hilliard equations in phase field modeling[J]. *Communications in Computational Physics*, 2010, 7(2): 362-382.
- [40] Ding L, Shu C, Ding H, et al. Stencil adaptive diffuse interface method for simulation of two-dimensional incompressible multiphase flows[J]. *Computers & Fluids*, 2010, 39(6): 936-944.
- [41] Hu Y, He Q, Li D C, et al. On the total mass conservation and the volume preservation in the diffuse interface method [J]. *Computers & Fluids*, 2019, 193: 104291.
- [42] Sherwood J D. Breakup of fluid droplets in electric and magnetic fields[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1988, 188: 133-146.

(编辑 罗 敏)

~~~~~

(上接第 57 页)

- [9] Zhang R, Guo R. Voronoi cell finite element method for fluid-filled materials[J]. *Transport in Porous Media*, 2017, 120(1): 23-35.
- [10] 韩宁, 郭然. 颗粒增强复合材料网格划分对精度影响结果比较[J]. *中国水运*, 2019, 19(1): 230-231, 239.  
Han N, Guo R. Comparison of the effect of particle-reinforced composite meshing on accuracy [J]. *China Water Transport*, 2019, 19(1): 230-231, 239. (in Chinese)
- [11] Han N, Guo R. Two new Voronoi cell finite element models for fracture simulation in porous material under inner pressure[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019, 211: 478-494.
- [12] 王挺, 张蕊, 郭然. 含界面相 Voronoi 单元等效弹性常数的计算[J/OL]. *固体力学学报*, 2021, 1-15 [2021-03-01]. <https://doi.org/10.19636/j.cnki.cjasm42-1250/o3.2021.006>.  
Wang T, Zhang R, Guo R. Calculation of equivalent elastic constants of Voronoi cell with interfacial phase[J/OL]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2021, 1-15 [2021-03-01]. <https://doi.org/10.19636/j.cnki.cjasm42-1250/o3.2021.006>. (in Chinese)
- [13] 廖光开, 李乡安, 邹萍, 等. 基于均匀化方法的钨丝增强锆基块体非晶复合材料等效弹性常数预测[J]. *中国有色金属学报*, 2014, 24(6): 1449-1458.  
Liao G K, Li X A, Zou P, et al. Homogenization-based approach for predicting equivalent elastic constants of tungsten fiber reinforced Zr-based bulk metallic glass matrix composites[J]. *The Chinese Journal of Nonferrous Metals*, 2014, 24(6): 1449-1458. (in Chinese)
- [14] 谢桂兰, 赵锦泉, 田杰, 等. 均匀化有限元法预测复合材料层合板宏观有效弹性性能[J]. *玻璃钢/复合材料*, 2014(7): 23-27.  
Xie G L, Zhao J X, Tian J, et al. Predicting macroscopic effective elastic properties of composite laminated plate by homogenization fem[J]. *Fiber Reinforced Plastics/Composites*, 2014(7): 23-27. (in Chinese)
- [15] Ghosh S, Nowak Z, Lee K. Quantitative characterization and modeling of composite microstructures by Voronoi cells[J]. *Acta Materialia*, 1997, 45(6): 2215-2234.
- [16] Ghosh S, Nowak Z, Lee K. Tessellation-based computational methods for the characterization and analysis of heterogeneous microstructures[J]. *Composites Science and Technology*, 1997, 57(9/10): 1187-1210.

(编辑 罗 敏)