

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2021.264

# 交变电场频率对弱导电液滴变形及融合的影响

杨 茜, 曾 忠, 李家宇, 张良奇

(重庆大学 航空航天学院, 重庆 400044)

**摘要:**基于相场方法和电荷守恒模型,在 OpenFOAM 框架下发展了考虑电荷运输的两相流数值方法,系统研究了不同电物性参数条件下交变电场频率对弱导电的单个液滴变形和双液滴融合的影响。结果表明,交变电场频率对单个液滴变形具有显著影响,同时也会影响双液滴的融合时间。当介电常数比  $Q$  和导电率比  $R$  相等时,单个液滴在交变电场中的平均变形率和等效直流电场中液滴的稳态变形率相等,双液滴融合时间随着频率增加而增加。当  $Q > R$  时,随着频率增大,单个液滴的平均变形率不断增大,双液滴融合时间减少。当  $Q < R$  时,电场频率增大会导致单个液滴平均变形率的减小以及双液滴融合时间增加。

**关键词:**交变电场;电场频率;相场方法;液滴融合;数值模拟

中图分类号:O35

文献标志码:A

文章编号:1000-582X(2022)12-058-13

## Effect of alternating electric field frequency on deformation and coalescence of weakly conducting droplets

YANG Xi, ZENG Zhong, LI Jiayu, ZHANG Liangqi

(College of Aerospace Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

**Abstract:** Based on the phase field method (PFM) and charge conservation equation, a numerical method is proposed for two-phase flows in an external electric field within the OpenFOAM framework. Under weakly conducting condition, the deformation of a single droplet and the coalescence of two droplets under alternating electric field are investigated. The results show that the frequency of the alternating electric field can effectively affect both the deformation rate of the single droplet and the coalescence efficiency of the two droplets. When the permittivity ratio  $Q$  equals to the electrical conductivity ratio  $R$ , the mean deformation resulting from the alternating electric field (AC field) is the same as the steady state deformation under the equivalent direct current electric field (DC field), and the coalescence time becomes longer with the increase of the AC field frequency. When  $Q > R$ , the mean deformation rate of the single droplet increases continuously and the coalescence time of two droplets reduces with the increase of the frequency of the AC field. When  $Q < R$ , the increase of AC field frequency leads to the decrease of the average deformation rate

收稿日期:2021-07-07 网络出版日期:2021-09-15

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11572062);中央高校基本科研业务费资助项目(2021CDJQY-055)。

Supported by the National Natural Science Foundation of China (11572062) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (2021CDJQY-055).

作者简介:杨茜(1996—),女,重庆大学硕士研究生,主要从事基于相场方法的多相流数值研究,(E-mail) yx2013@cqu.edu.cn。

通信作者:曾忠,男,重庆大学教授,博士生导师,主要从事流体力学基础理论、程序开发与并行及其应用的研究,(E-mail) zpeng@cqu.edu.cn。

of single droplet and the increase of the fusion time of two droplets.

**Keywords:** alternating electric field; AC field frequency; phase field method; coalescence; numerical simulation

液滴在电场作用下发生变形及运动,这种现象广泛存在于自然界和工业应用中。例如,雨滴在雷暴中发生爆裂<sup>[1]</sup>;在石油工业中,通过电场控制促进液滴融合,有助于实现油水分离<sup>[2]</sup>;在微流控装置中,通过电融合可以精确、无污染地控制试剂的混合<sup>[3]</sup>等。

相比于直流电场中的液滴研究,弱导电液滴在交变电场中的运动和变形研究还鲜有报道<sup>[4-6]</sup>。对于单个液滴变形,Torza 等<sup>[4]</sup>通过理论和实验研究了交变电场下弱导电液滴的变形,发现交变电场频率会影响液滴的平均变形:当频率趋于 0 时,交变电场中液滴的平均变形收敛于等效直流电场中的漏电介质模型稳态解<sup>[7]</sup>;当频率趋近于无穷大时,交变电场中液滴的平均变形收敛于基于理想介质模型得到的稳态解<sup>[8]</sup>。Esmaceli 等<sup>[9]</sup>基于漏电介质模型研究了交变电场中二维液滴的变形,结果表明对于所有的电导率比和介电常数比,液滴在交变电场中的平均变形与等效直流电场作用下的稳态变形相等。根据漏电介质模型的假设,电荷弛豫时间应当远小于流动时间,而当电场频率过高时,流动时间减小,漏电介质模型将不再适用,这就限制了 Esmaceli 等的研究所采用的电场频率。为了克服漏电介质模型对电场频率的限制,López-Herrera 等<sup>[10]</sup>提出了基于电荷守恒方程的两相流模型,并被 Sahu 等<sup>[11]</sup>用于交变电场中轴对称弱导电液滴的变形研究,结果表明当电导率比和介电常数比不相等时,液滴在交变电场中的平均变形与等效直流电场产生的稳态变形不相等,但他们并未对电场频率的影响进行深入研究。对于双液滴在交变电场的融合,当前研究主要关注油包水乳状液,适用于理想电介质模型,国内外学者研究了电场频率<sup>[12-13]</sup>、电场强度<sup>[14]</sup>、液滴半径<sup>[15]</sup>、双液滴间距<sup>[16-17]</sup>及油水界面张力<sup>[18]</sup>等因素对双液滴融合的影响。此外,陈晓东等<sup>[19]</sup>采用漏电介质模型研究了双液滴在交流电场下的相互作用变形。综上所述,当前对于交变电场中液滴变形的研究主要采用理想电介质模型和漏电介质模型,而弱导电液滴在交变电场中的变形和融合还未得到充分关注,交变电场频率对液滴变形作用的物理机理也尚不明确。

常见的界面捕捉数值方法可以分为两类:一是追踪拉格朗日界面标记点的界面追踪方法,例如 front-tracking 方法<sup>[20]</sup>等;二是用一个标量标识函数(体积分数或相变量)来区分不同相态流体的界面捕捉方法,例如 volume of fluid (VOF)方法<sup>[21]</sup>、level set 方法<sup>[22]</sup>和相场方法<sup>[23]</sup>等。采用 front-tracking 方法和漏电介质模型,Fernández 等<sup>[24-25]</sup>研究了直流电场和剪切流动共同作用下多个液滴的变形。Hua 等<sup>[26]</sup>采用 front-tracking 方法,研究了直流电场下单个液滴的变形。虽然 front-tracking 方法可以准确追踪相界面位置,但在处理液滴破裂和融合等复杂拓扑变化时会遇到困难,需要额外的特殊处理。界面捕捉方法通过求解关于界面识别函数的对流扩散方程来反映界面运动和变形,可以有效捕捉复杂界面拓扑变化。Mähmann 等<sup>[27]</sup>采用 level set 方法,研究了直流电场作用下,雷诺数对剪切流动中的液滴的影响。结合 VOF 方法和 level set 方法,Tomar 等<sup>[28]</sup>研究了直流电场中导电液滴的变形和融合。Lin 等<sup>[29]</sup>采用相场方法和漏电介质模型,研究了直流电场中双液滴的融合。考虑到漏电介质模型的局限性,López-Herrera 等<sup>[10]</sup>引入电荷守恒模型以考虑电荷的输运,发展了基于 VOF 方法的电场作用下两相流动模型。相比于 VOF 和 level set 方法,相场方法具有坚实的理论基础,既能保证质量、能量守恒以及满足热力学第二定律,还可以通过修正界面自由能泛函引入复杂的流体属性和物理效应,例如黏弹性多相流动<sup>[30]</sup>、表面活性剂作用<sup>[31]</sup>、壁面湿润性<sup>[32-33]</sup>以及热毛细效应<sup>[34]</sup>。此外,在数值层面上,相场方法描述相界面运动和变形无需引入额外的非物理处理。因此笔者选择相场方法捕捉界面运动和变形,采用电荷守恒模型描述电荷的输运,发展了考虑电场作用的两相流数值方法,在 OpenFOAM 框架下完成程序开发,研究不同频率交变电场作用下弱导电单个液滴变形和双液滴融合,系统分析了不同电物性参数条件下电场频率对液滴变形和融合时间的影响。

## 1 基本理论

### 1.1 Cahn-Hilliard 相场模型

相场方法是基于自由能理论的一种扩散界面方法。对于两相不混溶流体 A 和 B,令流体 A 的体积分数

为  $C$ , 则流体 B 的体积分数为  $1-C$ , 体积分数  $C$  即为相变量, 它随时间的演化由 Cahn-Hilliard 方程<sup>[35]</sup>来控制:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}C) = \nabla \cdot (M \nabla \varphi), \quad (1)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} a \varepsilon^{-1} \sigma C(C-1)(2C-1) - a \varepsilon \sigma \Delta C. \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{u}$  是流动速度;  $M$  为迁移率;  $\varphi$  为化学势, 由总自由能泛函对相分数的变分得到;  $\varepsilon$  为界面厚度;  $\sigma$  为表面张力系数;  $a$  为待定系数;  $t$  是时间。对于没有外界质量流入的边界, 化学势  $\varphi$  的边界条件为

$$\mathbf{n}_w \cdot \nabla \varphi = 0, \quad (3)$$

式中  $\mathbf{n}_w$  为边界的外法向方向矢量。

van der Waals<sup>[36]</sup> 提出当相分布处于平衡状态时自由能应取极值, 此时化学势  $\varphi=0$ , 所得一维相分布为

$$C(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{z}{2\sqrt{2}\varepsilon}\right). \quad (4)$$

在自由能理论中, 表面张力的作用可理解为单位相界面上的自由能, 对于平衡态的界面<sup>[31]</sup>可得到

$$\sigma = \varepsilon a \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dC}{dz}\right)^2 dz. \quad (5)$$

代入方程(4)的理论解, 得到  $a = 6\sqrt{2}$ 。定义无量纲化学势  $\hat{\varphi} = \varphi / (\varepsilon^{-1} \sigma a)$ , 可以得到如下基于无量纲化学势  $\hat{\varphi}$  的 Cahn-Hilliard 方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}C) = \nabla \cdot (\hat{M} \nabla \hat{\varphi}), \\ \hat{\varphi} = \frac{1}{2} C(C-1)(2C-1) - \varepsilon^2 \Delta C, \end{cases} \quad (6)$$

式中  $\hat{M} = M \varepsilon^{-1} \sigma a$ 。这里采用相场方法, 表面张力为<sup>[37-38]</sup>:

$$\mathbf{F}_s = \frac{6\sqrt{2}\sigma}{\varepsilon} \hat{\varphi} \nabla C. \quad (7)$$

## 1.2 电场控制方程

根据电流体动力学理论, 产生的动态电流很小时, 可以忽略磁感应效应, 因此电场强度是无旋的, 即  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 。对于电介质流体, 由高斯定律可得

$$\nabla \cdot (\varepsilon_E \mathbf{E}) = \rho^E, \quad (8)$$

式中:  $\varepsilon_E$  为流体的介电常数,  $\rho^E$  为体电荷密度。电荷守恒方程为:

$$\frac{\partial \rho^E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho^E) = -\nabla \cdot (\sigma_E \mathbf{E}), \quad (9)$$

式中  $\sigma_E$  为流体的电导率。

由于电场是无旋的, 电场强度  $\mathbf{E}$  和电势  $\phi$  的关系为:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (10)$$

方程(8)和(9)可写为:

$$-\nabla \cdot (\varepsilon_E \nabla \phi) = \rho^E, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho^E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho^E) = \nabla \cdot (\sigma_E \nabla \phi). \quad (12)$$

电场力  $\mathbf{F}_e$  的表达式为:

$$\mathbf{F}_e = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^E = \rho^E \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \nabla \varepsilon_E, \quad (13)$$

式中: 第一项为库仑力, 第二项为极化应力。

## 1.3 流动控制方程

对于等温不可压两相流动, 流体运动控制方程为不可压缩的 N-S 方程组:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)) + \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_e. \end{cases} \quad (14)$$

式中:  $\rho$  为密度;  $p$  为压强;  $\mu$  为黏性。此外,流动方程中各物性参数定义如下:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 C + \rho_2 (1 - C), \\ \mu &= \mu_1 C + \mu_2 (1 - C), \\ \epsilon_E &= \epsilon_{E1} \epsilon_{E2} / (\epsilon_{E1} (1 - C) + \epsilon_{E2} C), \\ \sigma_E &= \sigma_{E1} \sigma_{E2} / (\sigma_{E1} (1 - C) + \sigma_{E2} C). \end{aligned} \quad (15)$$

对上述控制方程系统进行无量纲处理,选取液滴半径  $R_d$  为特征长度,特征速度  $U = \sqrt{\sigma / \rho_2 R_d}$ ,外加电场强度  $E_0$  为特征电场强度,相应的无量纲量分别为:长度  $x^* = x / R_d$ ,速度  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} / U$ ,时间  $t^* = t R_d / U$ ,压力  $p^* = p / \rho_2 U^2$ ,电场强度  $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} / E_0$ ,电导率  $\sigma_E^* = \sigma_E / \sigma_{E2}$ ,介电常数  $\epsilon_E^* = \epsilon_E / \epsilon_{E2}$ ,密度  $\rho^* = \rho / \rho_2$ ,黏度  $\mu^* = \mu / \mu_2$ 。可以得到无量纲 N-S 方程组为:

$$\begin{cases} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0, \\ \rho^* \left( \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* \right) = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^* \cdot (\mu^* (\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^* \mathbf{u}^{*T})) + \frac{1}{Re \cdot Ca} \mathbf{F}_s^* + \frac{Ca_E}{Re \cdot Ca} \mathbf{F}_e^*. \end{cases} \quad (16)$$

无量纲电场方程为:

$$\frac{\partial \rho^{E*}}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \rho^{E*} = -\frac{1}{O_c} \nabla^* \cdot (\sigma_E^* \mathbf{E}^*), \quad (17)$$

$$\nabla^* \cdot (\epsilon_E^* \nabla^* \phi^*) = \rho^{E*}. \quad (18)$$

无量纲相场方程为:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\mathbf{u}^* C) = \nabla^* \cdot (M^* \nabla^* \hat{\varphi}), \\ \varphi^* = \frac{1}{2} C(C-1)(2C-1) - C_n^2 \Delta^* C. \end{cases} \quad (19)$$

其中涉及的无量纲参数定义为:雷诺数  $Re = \rho_2 U R_d / \mu$ ,毛细数  $Ca = \mu_2 U / \sigma$ ,电毛细数  $Ca_E = \epsilon_{E2} E_0^2 R_d / \sigma$ ,  $O_c = U \epsilon_{E2} / \sigma_{E2} R_d$ ,  $M^* = \hat{M} / R_d U$ 。为了提高数值稳定性和减少数值扩散,采用动态迁移率<sup>[38-39]</sup>,即  $M^* = M_0 C(1-C)$ ,  $M_0$  为迁移率系数,是常数。此外,无量纲的界面厚度参数  $C_n = \epsilon / R_d$ ,无量纲表面张力  $\mathbf{F}_s^* = 6 \sqrt{2} \varphi^* \nabla^* C / C_n$ ,无量纲电场力  $\mathbf{F}_e^* = \rho^{E*} \mathbf{E}^* - \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}^* \nabla^* \epsilon_E^* / 2$ 。根据定义的无量纲速度可得韦伯数  $We = Re \cdot Ca = 1$ 。

定义密度比  $\lambda_\rho = \rho_1 / \rho_2$ ,黏性比  $\lambda_\mu = \mu_1 / \mu_2$ ,介电常数比  $Q = \epsilon_{E1} / \epsilon_{E2}$ ,电导率比  $R = \sigma_{E1} / \sigma_{E2}$ ,由此得到的无量纲物性参数为:

$$\begin{aligned} \rho^* &= \lambda_\rho C + (1 - C), \\ \mu^* &= \lambda_\mu C + (1 - C), \\ \epsilon_E^* &= \epsilon_{E1}^* / [Q(1 - C) + C], \\ \sigma_E^* &= \sigma_{E1}^* / [R(1 - C) + C]. \end{aligned} \quad (20)$$

#### 1.4 求解步骤

基于 OpenFOAM 开源平台自主实现上述两相流动模型,Cahn-Hilliard 方程、电场方程和 N-S 方程组的时间离散采用交错离散的方式,即速度场  $\mathbf{u}$ 、压力场  $p$ 、电荷密度  $\rho^E$  和电势  $\phi$  离散在时间步  $t^n$ ,体积分数  $C$  离散在时间步  $t^{n+1/2}$ 。Cahn-Hilliard 方程采用二阶 Ralston 方法进行时间推进,对流项采用 Gauss Vanleer 格式,扩散项采用 Gauss linear corrected 格式。电场方程和 N-S 方程组瞬态项采用 Euler 格式,速度对流项采

用 Gauss limited linear V 格式,其余对流项采用 Gauss linear 格式,扩散项采用 Gauss linear corrected 格式,梯度项采用 least squares 格式。从时间步  $t^n$  到  $t^{n+1}$  的求解步骤如下:

- 1) 求解对流 Cahn-Hilliard 方程(19),更新相变量分布  $C$ ;
- 2) 根据方程(20)更新物性参数  $\rho, \mu, \varepsilon_E$  和  $\sigma_E$ ;
- 3) 求解方程(17)(18),更新电荷密度  $\rho^E$  和电势  $\phi$ ;
- 4) 计算表面张力  $\mathbf{F}_s$  和电场力  $\mathbf{F}_e$ ;
- 5) 采用 PISO 迭代算法求解 N-S 方程组(16),得到新的速度场  $\mathbf{u}$  和压力场  $p$ 。

## 2 模型和程序验证

### 2.1 Laplace 定律

根据 Laplace 定律,在表面张力的作用下,静止的孤立液滴将会处于平衡状态,液滴的内外压差  $\Delta p_{\text{theory}}$  将由液滴半径  $R_0$  和表面张力系数  $\sigma$  决定,理论表达式为

$$\nabla p_{\text{theory}} = \frac{k\sigma}{R_0}, \quad (21)$$

式中:对于二维平面问题,  $k=1$ ,对于二维轴对称和三维问题,  $k=2$ 。

首先考虑静止轴对称液滴,计算域为长 1 m,宽 2 m,液滴半径为 0.5 m,液滴中心位于对称轴中心点处。上下边界为无滑移固壁,左边界为轴对称边界,右边界为自由流出边界。用下标 d 和 m 分别表示液滴和环境流体,相关物性参数为  $\rho_d = \rho_m = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu_d = \mu_m = 0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,表面张力分别取为  $\sigma = 0.01 \text{ N/m}$ ,  $\sigma = 0.05 \text{ N/m}$  和  $\sigma = 0.10 \text{ N/m}$ ,计算结果见图 1。如表 1 所示,数值模拟得到的相对压差与理论压差的相对误差均在 0.5% 左右,与方程(21)的理论预测吻合。算例结果表明,本文中采用的相场模型以及自主开发的数值程序能够准确地描述压力场和表面张力。

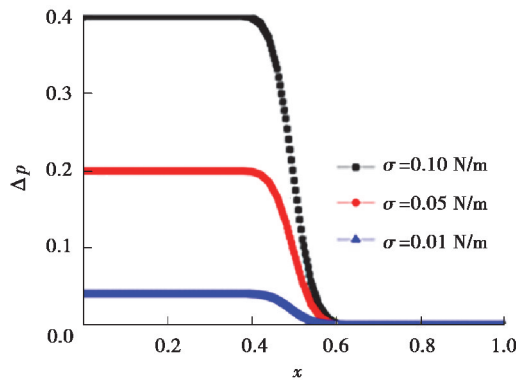


图 1 在  $y=1$  上相对压力的分布曲线

Fig. 1 The profiles of relative pressure at  $y=1$

表 1 内外压差数值解与理论解的相对误差

Table 1 The relative error for numerical solution and theoretical solution of internal and external pressure difference

表面张力系数	压差数值解	压差理论解	相对误差/%
0.01	0.039 80	0.04	0.500
0.05	0.198 97	0.20	0.515
0.10	0.397 93	0.40	0.518

### 2.2 剪切液滴变形

对液滴在剪切流动下的变形进行数值模拟。采用二维平面模型,计算域为边长为 2 的正方形,网格为



200×200,液滴位于计算域中心,半径为 0.5, $C_n$ 为 0.01,迁移率系数  $M_0$ 为 0.01,液滴密度和黏性与环境流体相同。雷诺数  $Re$  为 1,毛细数  $Ca$  分别取 0.2、0.4 和 0.9。左右边界为周期边界,上下边界速度分别为  $(\pm 1, 0)$ ,初始条件为库埃特流速度分布。定义变形率  $D = (L_1 - B_1) / (L_1 + B_1)$ ,其中  $L_1$  是界面到液滴中心的最大距离, $B_1$  是界面到液滴中心的最小距离。图 2 给出了  $Ca$  分别为 0.2、0.4 和 0.9 时的计算结果,液滴随时间变化的变形率与文献结果吻合良好。Ding 等<sup>[40]</sup>和 Hu 等<sup>[41]</sup>均采用相场方法描述界面运动,本文的结果和 Hu 等的结果更为吻合,有效验证了当前数值计算的界面变形捕捉精度。

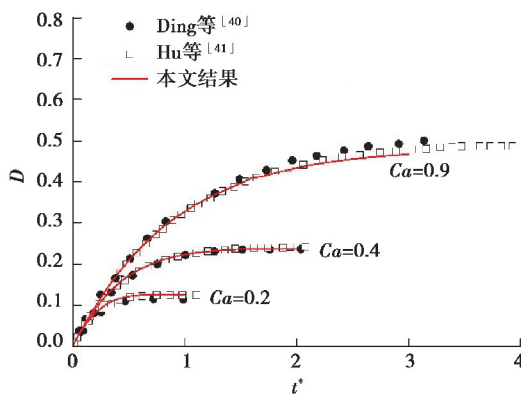


图 2 不同毛细数下液滴的变形率随时间的变化

Fig. 2 Temporal variations of the deformation rate of droplets for different  $Ca$

### 2.3 电荷守恒模型验证

为验证电荷守恒模型,分别对直流电场作用下的理想电介质液滴和漏电介质液滴变形进行研究。对于理想电介质液滴,计算域为  $3 \times 6$ ,液滴半径为 1,雷诺数  $Re$  为 3.64,韦伯数  $We$  为 1,介电常数比  $Q$  为 5, $C_n$ 为 0.02,迁移率系数  $M_0$ 为 0.001。图 3 为直流电场中液滴变形率  $D$  随电毛细数  $Ca_E$  的变化,并与文献<sup>[11,26,29,42]</sup>的结果进行对比。本文的结果和 Lin 等<sup>[29]</sup>采用相场方法和理想电介质模型的结果吻合较好,说明提出的模型能够准确地模拟理想电介质液滴的变形。

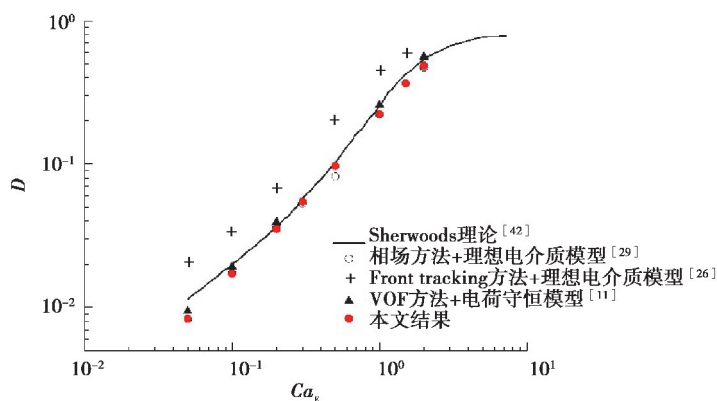


图 3 直流电场中理想电介质液滴变形率随电毛细数  $Ca_E$  的变化

Fig. 3 Variations of the deformation rate of the perfect dielectric droplet with electrical capillary number in the DC field

参考 Sahu 等<sup>[11]</sup>对漏电介质液滴变形的研究,选择计算域为  $3 \times 6$ (液滴半径为 1), $C_n$ 为 0.02,迁移率系数  $M_0$ 为 0.001,雷诺数  $Re=1$ ,韦伯数  $We=1$ ,介电常数比  $Q=10$ ,电毛细数  $Ca_E=0.183$ , $O_c=2.68$ 。图 4 给出了计算得到的直流电场中液滴变形率  $D$  随电导率比  $R$  的变化,可以看出当前结果与参考结果一致,本文的数值方法能够准确描述漏电介质液滴的变形。

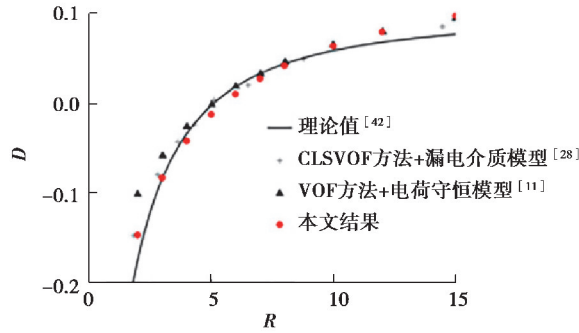


图 4 直流电场中漏电介质液滴变形率  $D$  随电导率比  $R$  的变化

Fig. 4 Variations of the deformation rate of the leaky dielectric droplet with electrical conductivity ratio in the DC field

### 3 交变电场中液滴的变形和融合

Torza 等<sup>[4]</sup>通过理论分析得到了  $Q$ - $R$  坐标系下交变电场变形-流动循环图。如图 5 所示,根据零变形曲线和零流动循环线(即直线  $Q=R$ )分为 3 个区域。变形率与变形特征函数  $\Phi_m = f(R, Q, \lambda_\mu; \hat{\omega})$  相关,交变电场中液滴的变形率由平均变形率  $D_m$  和振荡变形率  $D_i$  组成,即  $D = D_m + D_i$ 。在区域 I 中,存在无量纲临界角频率  $\hat{\omega}_{cr} = \frac{\sqrt{3Q-1-R-R^2}}{(O_c |S-1|)}$ ,当  $2\pi f > \hat{\omega}_{cr}$  时,液滴呈扁长形(如图 6(a)所示的液滴沿垂直方向伸长),当  $2\pi f < \hat{\omega}_{cr}$  时,液滴呈扁圆形(如图 6(a)所示的液滴沿水平方向伸长)。随着频率增加,平均变形率  $D_m$  增大;在区域 II 中,液滴呈扁长形,随着频率增加,平均变形率  $D_m$  增大;在区域 III 中,液滴呈扁长形,随着频率增加,平均变形率  $D_m$  减小。

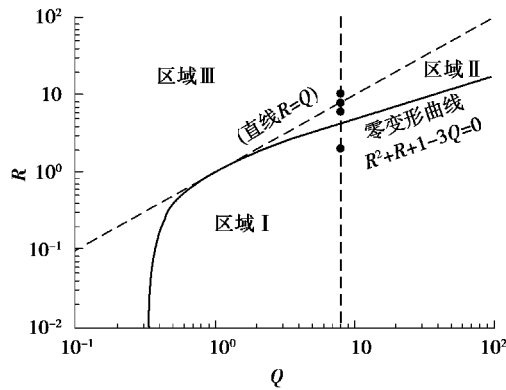


图 5 交变电场中液滴的变形-流动循环图<sup>[4]</sup>

Fig. 5 Deformation-circulation map of a droplet in an alternating electric field<sup>[4]</sup>

采用二维轴对称模型,分别对电场中单个液滴的变形和双液滴的融合进行研究。对于图 6(a)所示的单个液滴和图 6(b)所示的双液滴,液滴半径为  $R_d=1$ ,双液滴初始界面间最短距离为  $l_0=0.4$ 。计算域特征尺寸  $L=5$ ,网格为  $320 \times 640$ ,  $C_n=0.02$ ,迁移率系数  $M_0=0.001$ ,雷诺数  $Re=1$ ,毛细数  $Ca=1$ ,电毛细数  $Ca_E=1$ ,  $O_c=1$ 。

对于等效直流电场,上边界  $\phi=5/\sqrt{2}=3.536$ ,下边界  $\phi=0$ ;对于交变电场,上边界  $\phi=5\sin(2\pi ft)$ ,下边界  $\phi=0$ 。定义变形率  $D=(L_2-B_2)/(L_2+B_2)$ ,其中  $L_2$  为液滴沿垂直方向的最大变形,  $B_2$  为液滴沿水平方向的最大变形。当  $D>0$  时,液滴呈扁长形,当  $D<0$  时,液滴呈扁圆形。对于沿外加电场方向放置的两个液滴,定义  $l(t)$  为随时间变化的两个液滴间的距离,定义液滴融合时间为两个液滴的距离从初始间距  $l_0$  变化

到零的时间。在等效直流电场下,单液滴的稳态变形率为 $D_{DC}$ ,双液滴间最短界面距离为 $l_{DC}$ 。

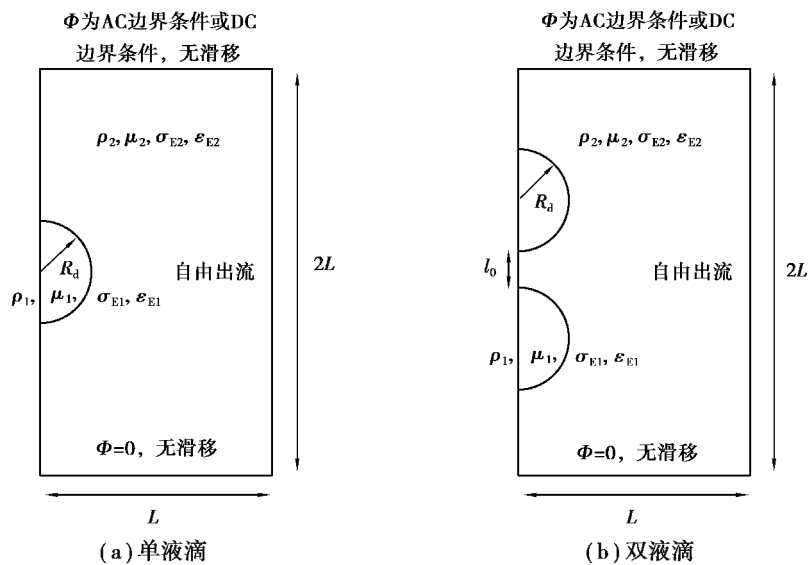


图 6 轴对称液滴示意图

Fig. 6 Schematic diagram of axisymmetric droplet

采用固定介电常数比  $Q=8$ , 电导率比  $R$  分别取值为 2、6、8 和 10。

### 3.1 $Q=R$

当  $Q=R$  时, 在不同频率下, 液滴变形率随时间的变化率如图 7 所示, 双液滴之间最短距离随时间变化如图 8 所示。

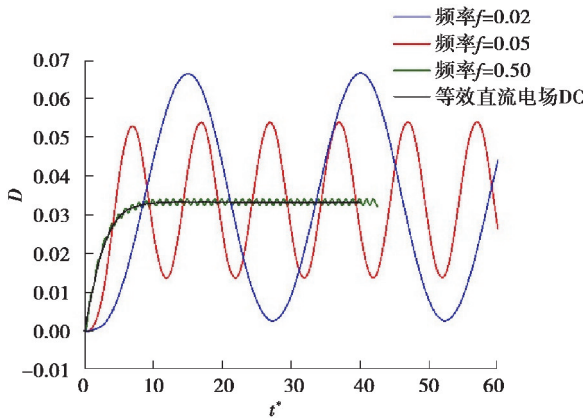


图 7 不同频率下液滴变形率随时间的变化

Fig. 7 Temporal variations of deformation rate of droplet for different frequencies

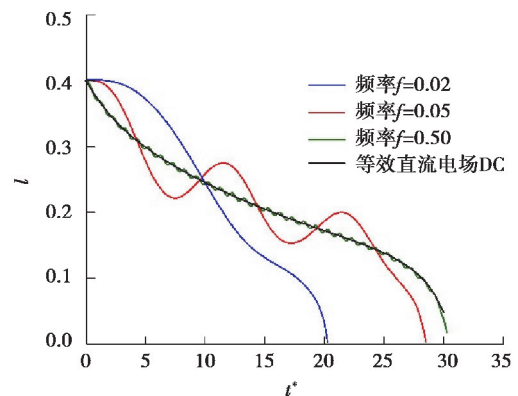


图 8 双液滴界面间最短距离随时间变化

Fig. 8 Temporal variations of the shortest distance between two droplets for different frequencies

当  $Q=R$  时, 如图 7 所示, 在等效直流电场和交变电场中, 液滴的变形率  $D > 0$ , 呈扁长变形。随着频率增大, 液滴变形振荡幅度减小。这是因为当交变电场频率较小时, 液滴有足够的时间发生变形, 产生较大的变形率。而当频率较大时, 液滴还未达到变形极限, 电场强度就减小, 电场力随之减小, 在表面张力的作用下, 液滴开始回缩, 变形率减小, 所以振荡变形幅度减小。液滴在不同频率下的平均变形率和等效直流电场的稳态变形率相等。换言之, 当  $Q=R$  时, 液滴的平均变形率与频率无关。由于此时液滴的平均速度为零, 界面处电荷密度为零, 相当于理想电介质流体, 所以仅有极化应力产生电场力作用。同时可以发现, 液滴变形率



的振荡频率约为交变电场频率的两倍,这与 Torza 等<sup>[4]</sup>的理论分析和 Esmaeeli 等<sup>[9]</sup>的数值模拟结果一致。

如图 8 所示,对于双液滴融合问题,基于交变电场所得液滴界面间的最短距离  $l$  绕  $l_{DC}$  振荡。由于振荡变形的原因,交变电场中的双液滴会比等效直流电场中的双液滴先融合,且随着频率减小,液滴的变形振荡幅度增大,使得双液滴的融合时间缩短,有助于提高液滴融合效率。

### 3.2 $Q \neq R$

#### 3.2.1 区域 I

当  $Q=8, R=2$  时,位于区域 I 中,此时临界角频率为  $\hat{\omega}_{cr}$  为 0.589,对应的临界频率  $f_{cr}$  为 0.093 7。当位于区域 I 时,在等效直流电场作用下,液滴呈扁圆形;在交变电场作用下,当频率小于临界频率时,液滴呈扁圆形振荡,当频率大于临界频率时,液滴呈扁长形振荡。当频率较高时,流体的弛豫时间  $\tau^e = \epsilon_E / \sigma_E$  将远大于电极板间电场方向的变化时间  $1/\omega$ ,因此在高频交流电场作用下,液滴表现为理想电介质,平均变形呈扁长形,所以当电场由低频向高频变化时,液滴的变形模式也由扁圆形向扁长形转变,当液滴的变形率为零时,此时的频率对应为临界频率。如图 9 所示,当频率  $f$  为 0.02 和 0.05 时,此时频率小于临界频率,液滴的变形率  $D < 0$ ,呈扁圆形振荡。当频率  $f$  为 0.50 时,此时频率大于临界频率,液滴的变形率  $D > 0$ ,呈扁长形振荡。随着频率增大,液滴的振荡变形幅度减小,并且液滴的平均变形不断增大,逐渐大于等效直流电场的稳态变形  $D_{DC}$ 。

如图 10 所示,随着电场频率增大,双液滴的融合时间不断减小。扁长形变形有利于液滴融合,因此当大于临界频率时,液滴的融合时间急剧减小。当小于临界频率时,液滴呈扁圆形变形,不利于液滴融合。

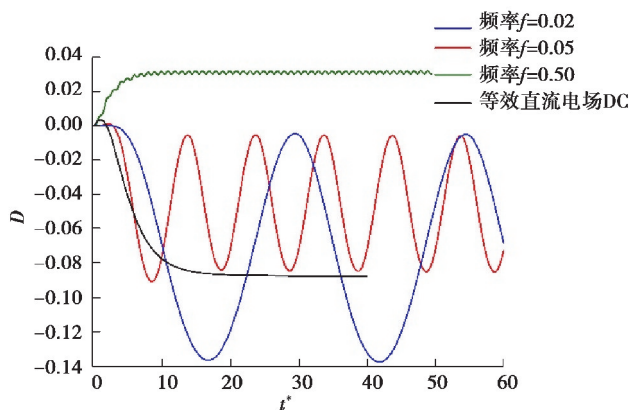


图 9 不同频率下液滴变形率随时间的变化

Fig. 9 Temporal variations of deformation rate of the droplet with different frequencies

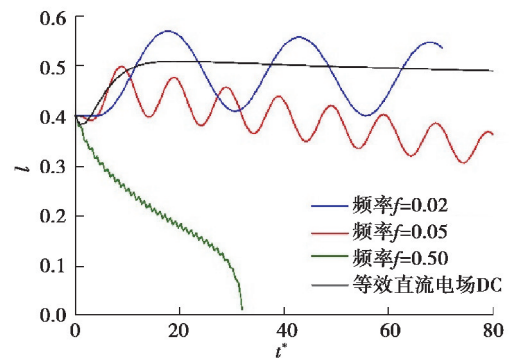


图 10 双液滴界面最短距离随时间的变化

Fig. 10 Temporal variations of the shortest distance between two droplets with different frequencies

#### 3.2.2 区域 II

当  $Q=8, R=6$  时,当前电物性参数取值位于区域 II。如图 11 所示,在等效直流电场和交变电场中,液滴的变形率  $D > 0$ ,液滴呈扁长形,而且液滴的变形振荡幅度随着频率增大而减小。和位于区域 I 时的液滴一样,随着频率增大,液滴的平均变形率  $D_m$  不断增大,液滴的平均变形大于等效直流电场的稳态变形,即  $D_m > D_{DC}$ 。这是因为电场力由两部分组成,如等式(13)所示,第一项为电荷产生的库仑力,第二项为极化应力产生的电场力,当  $Q > R$  时,面向电势高的电极板的界面电荷为正电荷,面向电势低的电极板的界面电荷为负电荷<sup>[4]</sup>,电荷密度在液滴轴向两端最大,并沿着界面向径向逐渐减小,此时电荷产生的库仑力指向液滴内部。随着频率减小,界面电荷增大,电荷贡献的库仑力增大,抑制液滴向扁长变形,因此液滴的平均变形率减小。

对于液滴融合,如图 12 所示,由于随着频率增大,平均变形率  $D_m$  增大,使得液滴界面间的距离减小,双液滴更易于聚结。此外,还存在临界低频率值,当小于该临界频率时,虽然平均变形率  $D_m$  相对减小,但液滴的变形振荡幅度增加(如图 11 所示),双液滴间的界面间距振荡幅度也变大,易于促进液滴融合。

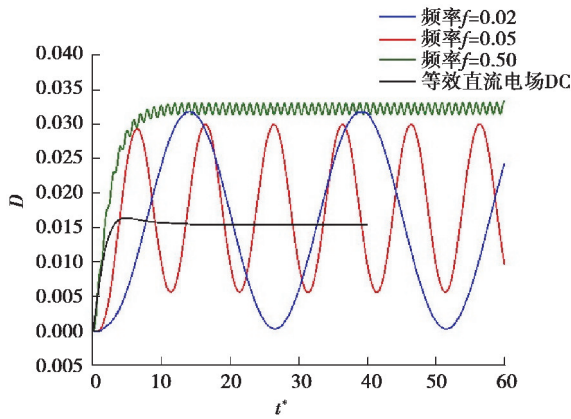


图 11 不同频率下液滴变形率随时间的变化

Fig. 11 Temporal variations of the deformation rate of droplet with different frequencies

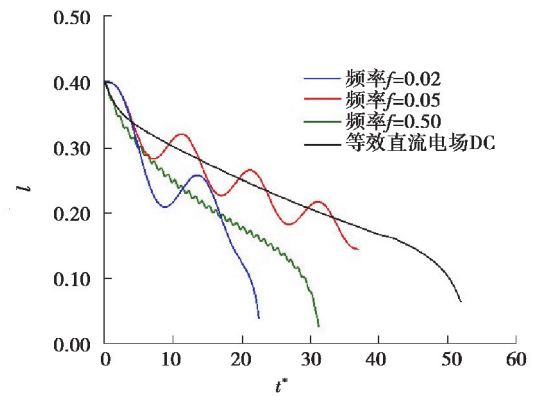


图 12 双液滴界面最短距离随时间的变化

Fig. 12 Temporal variations of the shortest distance between two droplets with different frequencies

### 3.2.3 区域 III

当  $Q=8, R=10$  时,位于区域 III。如图 13 所示,在等效直流电场和交变电场中,液滴的变形率  $D > 0$ ,液滴呈扁长形。随着频率增大,液滴的变形振荡幅度减小,且平均变形率增大。当  $Q < R$  时,面向电势高的电极板的界面电荷为负电荷,面向电势低的电极板的界面电荷为正电荷,电荷密度在液滴轴向两端最大,并沿着界面向径向逐渐减小,此时电荷产生的库仑力指向液滴外部。随着频率减小,界面电荷增大,电荷贡献的库仑力增大,使得液滴趋向于扁长形,液滴平均变形率增大。

如图 14 所示,随着频率减小,液滴的平均变形率和变形振荡幅度都随之增大,因此双液滴的融合时间减小。存在临界频率  $f_{cr}$ ,当  $f > f_{cr}$ ,液滴的平均变形小于等效直流电场的稳态变形,即  $D_m < D_{DC}$ ,不利于液滴融合。当  $f < f_{cr}$ ,液滴的平均变形大于等效直流电场的稳态变形,即  $D_m > D_{DC}$ ,显然液滴更易聚结。

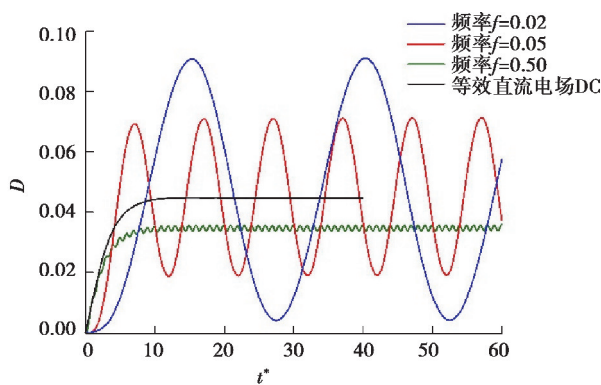


图 13 不同频率下液滴变形率随时间的变化

Fig. 13 Temporal variations of deformation rate the droplet with different frequencies

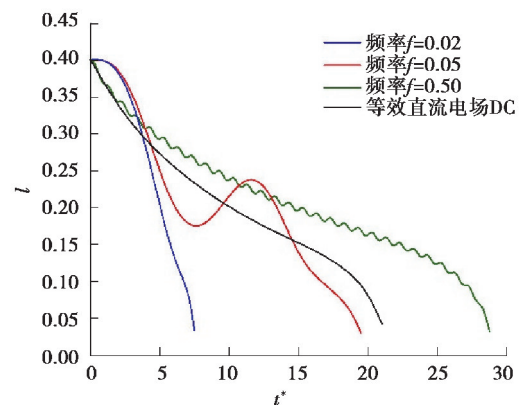


图 14 不同频率下,双液滴界面最短距离随时间的变化

Fig. 14 Temporal variations of the shortest distance between two droplets with different frequencies

## 4 结 论

选择相场法捕捉界面运动,采用电荷守恒模型描述电荷输运,发展了考虑电场作用的两相流动数值方法,并在 OpenFOAM 框架内完成程序开发,系统研究了交变电场频率对单个液滴变形和双液滴融合的影响。研究表明,随着频率增大,液滴的变形振荡幅度减小,变形振荡频率约为交变电场频率的 2 倍。当  $Q \geq R$  时,相比于等效直流电场,交变电场更能够促进液滴融合。当  $Q = R$  时,液滴的平均变形率和等效直流电场的稳态变形率相等,随着频率降低,双液滴融合时间减少,此时低频能够促进液滴融合。当  $Q > R$  时,随着频率增大,液滴的平均变形率增大,双液滴的聚结时间减小,而当频率减小到一定值时,由于液滴振荡变形率增大,双液滴的聚结时间也会减少,因此高频能够促进液滴融合,同时对于当前液滴初始间距,当频率足够小,也有利于液滴融合。当  $Q < R$  时,考虑平均变形率和振荡变形率的共同影响,低频时液滴更易融合。存在临界频率,当大于临界频率时,液滴的平均变形率小于等效直流电场的稳态变形率,随着频率增大,平均变形率减小,双液滴融合时间增加,双液滴融合时间比等效直流电场作用下液滴融合时间长;当小于临界频率时,液滴的平均变形率大于等效直流电场的稳态变形率,此时相较于等效直流电场,交变电场更能促进融合,且随着频率减小,双液滴的融合时间减小。

### 参考文献:

- [1] Simpson G C. On the electricity of rain and its origin in thunderstorms[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1909, 209: 379-413.
- [2] Ptasincki K J, Kerkhof P J A M. Electric field driven separations: phenomena and applications[J]. Separation Science and Technology, 1992, 27(8/9): 995-1021.
- [3] Theberge A, Courtois F, Schaerli Y, et al. Microdroplets in microfluidics: an evolving platform for discoveries in chemistry and biology[J]. Angewandte Chemie International Edition, 2010, 49(34): 5846-5868.
- [4] Torza S, Cox R G, Mason S G. Electrohydrodynamic deformation and bursts of liquid drops [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1971, 269(1198): 295-319.
- [5] Vizika O, Saville D A. The electrohydrodynamic deformation of drops suspended in liquids in steady and oscillatory electric fields[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1992, 239: 1-21.
- [6] Esmaeli A, Halim M A. Electrohydrodynamics of a liquid jet in transverse AC electric fields[J]. International Journal of Multiphase Flow, 2018, 109: 219-241.
- [7] Taylor G I, Mcewan A D, De Jong L N J. Studies in electrohydrodynamics. I. The circulation produced in a drop by an electric field[J]. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1966, 291(1425): 159-166.
- [8] Allan R S, Mason S G. Particle behaviour in shear and electric fields I. Deformation and burst of fluid drops [J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1962, 267(1328): 45-61.
- [9] Esmaeli A, Halim M A. Electrohydrodynamics of a liquid drop in AC electric fields[J]. Acta Mechanica, 2018, 229(9): 3943-3962.
- [10] López-Herrera J M, Popinet S, Herrada M A. A charge-conservative approach for simulating electrohydrodynamic two-phase flows using volume-of-fluid[J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(5): 1939-1955.
- [11] Sahu K C, Tripathi M K, Chaudhari J, et al. Simulations of a weakly conducting droplet under the influence of an alternating electric field[J]. Electrophoresis, 2020, 41(23): 1953-1960.
- [12] Bailes P J. An electrical model for coalescers that employ pulsed DC fields[J]. Chemical Engineering Research and Design, 1995, 73(5): 559-566.
- [13] 孙治谦, 金有海, 王磊, 等. 高频脉冲电场参数对水滴极化变形的影响[J]. 化工学报, 2012, 63(10): 3112-3118.  
Sun Z Q, Jin Y H, Wang L, et al. Impact of high-frequency pulse electric field parameters on polarization and deformation of water droplet[J]. CIESC Journal, 2012, 63(10): 3112-3118. (in Chinese)
- [14] 陈庆国, 梁雯, 宋春辉. 电场强度对原油乳液破乳脱水的影响[J]. 高电压技术, 2014, 40(1): 173-180.  
Chen Q G, Liang W, Song C H. Effect of electric field strength on crude oil emulsion's demulsification and dehydration[J]. High

- Voltage Engineering, 2014, 40(1): 173-180. (in Chinese)
- [15] Goto M, Irie J, Kondo K, et al. Electrical demulsification of W/O emulsion by continuous tubular coalescer[J]. Journal of Chemical Engineering of Japan, 1989, 22(4): 401-406.
- [16] Williams T J, Bailey A G. Changes in the size distribution of a water-in-oil emulsion due to electric field induced coalescence[J]. IEEE Transactions on Industry Applications, 1986, IA-22(3): 536-541.
- [17] Eow J S, Ghadiri M. Drop-drop coalescence in an electric field: the effects of applied electric field and electrode geometry[J]. Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects, 2003, 219(1/2/3): 253-279.
- [18] Chen T Y, Mohammed R A, Bailey A I, et al. Dewatering of crude oil emulsions 4. Emulsion resolution by the application of an electric field[J]. Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects, 1994, 83(3): 273-284.
- [19] 陈晓东, 胡国庆. 双液滴在交流电场下的变形和相互作用[C]//北京力学学会第 21 届学术年会暨北京振动工程学会第 22 届学术年会论文集. 北京:北京力学学会,2015: 74-77.  
Chen X D, Hu G Q. Deformation and interaction of double droplets under AC electric field[C]//Proceedings of the 21st Annual Meeting of the Beijing Society of Mechanics and the 22nd Annual Meeting of the Beijing Society of Vibration Engineering. Beijing: Beijing Society of Theoretical and Applied Mechanics, 2015: 74-77. (in Chinese)
- [20] Unverdi S O, Tryggvason G. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows[J]. Journal of Computational Physics, 1992, 100(1): 25-37.
- [21] Hirt C W, Nichols B D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries[J]. Journal of Computational Physics, 1981, 39(1): 201-225.
- [22] Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J]. Journal of Computational Physics, 1988, 79(1): 12-49.
- [23] Jacqmin D. Calculation of two-phase navier-stokes flows using phase-field modeling[J]. Journal of Computational Physics, 1999, 155(1): 96-127.
- [24] Fernández A. Response of an emulsion of leaky dielectric drops immersed in a simple shear flow: Drops less conductive than the suspending fluid[J]. Physics of Fluids, 2008, 20(4): 043304.
- [25] Fernández A, Tryggvason G, Che J, et al. The effects of electrostatic forces on the distribution of drops in a channel flow: Two-dimensional oblate drops[J]. Physics of Fluids, 2005, 17(9): 093302.
- [26] Hua J, Lim L K, Wang C H. Numerical simulation of deformation/motion of a drop suspended in viscous liquids under influence of steady electric fields[J]. Physics of Fluids, 2008, 20(11): 113302.
- [27] Mählmann S, Papageorgiou D T. Numerical study of electric field effect on the deformation of two-dimensional liquid drops in simple shear flow at arbitrary Reynolds number[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2009, 626: 367-393.
- [28] Tomar G, Gerlach D, Biswas G, et al. Two-phase electrohydrodynamic simulations using a volume-of-fluid approach[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 227(2): 1267-1285.
- [29] Lin Y, Skjetne P, Carlson A. A phase field model for multiphase electro-hydrodynamic flow[J]. International Journal of Multiphase Flow, 2012, 45: 1-11.
- [30] 李家宇. 粘弹性液滴的撞击动力学过程数值研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2019.  
Li J Y. Numerical study on impact dynamic process of viscoelastic droplet[D]. Chongqing: Chongqing University, 2019. (in Chinese)
- [31] Teng C H, Chern I L, Lai M C. Simulating binary fluid-surfactant dynamics by a phase field model[J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems: B, 2012, 17(4): 1289-1307.
- [32] 李家宇, 曾忠, 乔龙. 相场方法模拟液滴的动态润湿行为[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(9): 957-967.  
Li J Y, Zeng Z, Qiao L. Numerical simulation of droplets' dynamic wetting process with the phase field method[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2019, 40(9): 957-967. (in Chinese)
- [33] 周平, 曾忠, 乔龙. 假塑性流体液滴撞击壁面上的铺展的格子 Boltzmann 模拟[J]. 重庆大学学报, 2018, 41(12): 1-9.  
Zhou P, Zeng Z, Qiao L. Simulation of shear-thinning droplets impact on solid surfaces by using Lattice Boltzmann method[J]. Journal of Chongqing University, 2018, 41(12): 1-9. (in Chinese)
- [34] Borcia R, Bestehorn M. Phase-field model for Marangoni convection in liquid-gas systems with a deformable interface[J]. Physical Review E, 2003, 67(6): 066307.

- [35] Cahn J W, Hilliard J E. Free energy of a nonuniform system. I. interfacial free energy and free energy[J]. The Journal of Chemical Physics, 1958, 28(2): 258-267.
- [36] Jacqmin D. An energy approach to the continuum surface tension method[C]// 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, January 15-18, 1996, Reno, NV. Reston, Virginia: AIAA, 1996.
- [37] Kim J. A continuous surface tension force formulation for diffuse-interface models[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 204(2): 784-804.
- [38] Liu H H, Valocchi A J, Zhang Y H, et al. Lattice Boltzmann phase-field modeling of thermocapillary flows in a confined microchannel[J]. Journal of Computational Physics, 2014, 256: 334-356.
- [39] Zhang T Y, Wang Q. Cahn-Hilliard vs singular Cahn-Hilliard equations in phase field modeling[J]. Communications in Computational Physics, 2010, 7(2): 362-382.
- [40] Ding L, Shu C, Ding H, et al. Stencil adaptive diffuse interface method for simulation of two-dimensional incompressible multiphase flows[J]. Computers & Fluids, 2010, 39(6): 936-944.
- [41] Hu Y, He Q, Li D C, et al. On the total mass conservation and the volume preservation in the diffuse interface method [J]. Computers & Fluids, 2019, 193: 104291.
- [42] Sherwood J D. Breakup of fluid droplets in electric and magnetic fields[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1988, 188: 133-146.

(编辑 罗 敏)

(上接第 57 页)

- [9] Zhang R, Guo R. Voronoi cell finite element method for fluid-filled materials[J]. Transport in Porous Media, 2017, 120(1): 23-35.
- [10] 韩宁, 郭然. 颗粒增强复合材料网格划分对精度影响结果比较[J]. 中国水运, 2019, 19(1): 230-231, 239.  
Han N, Guo R. Comparison of the effect of particle-reinforced composite meshing on accuracy [J]. China Water Transport, 2019, 19(1): 230-231, 239. (in Chinese)
- [11] Han N, Guo R. Two new Voronoi cell finite element models for fracture simulation in porous material under inner pressure[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2019, 211: 478-494.
- [12] 王挺, 张蕊, 郭然. 含界面相 Voronoi 单元等效弹性常数的计算[J/OL]. 固体力学学报, 2021, 1-15 [2021-03-01]. <https://doi.org/10.19636/j.cnki.cjasm42-1250/o3.2021.006>.  
Wang T, Zhang R, Guo R. Calculation of equivalent elastic constants of Voronoi cell with interfacial phase[J/OL]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2021, 1-15 [2021-03-01]. <https://doi.org/10.19636/j.cnki.cjasm42-1250/o3.2021.006>. (in Chinese)
- [13] 廖光开, 李乡安, 邹萍, 等. 基于均匀化方法的钨丝增强锆基块体非晶复合材料等效弹性常数预测[J]. 中国有色金属学报, 2014, 24(6): 1449-1458.  
Liao G K, Li X A, Zou P, et al. Homogenization-based approach for predicting equivalent elastic constants of tungsten fiber reinforced Zr-based bulk metallic glass matrix composites[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2014, 24(6): 1449-1458. (in Chinese)
- [14] 谢桂兰, 赵锦泉, 田杰, 等. 均匀化有限元法预测复合材料层合板宏观有效弹性性能[J]. 玻璃钢/复合材料, 2014(7): 23-27.  
Xie G L, Zhao J X, Tian J, et al. Predicting macroscopic effective elastic properties of composite laminated plate by homogenization fem[J]. Fiber Reinforced Plastics/Composites, 2014(7): 23-27. (in Chinese)
- [15] Ghosh S, Nowak Z, Lee K. Quantitative characterization and modeling of composite microstructures by Voronoi cells[J]. Acta Materialia, 1997, 45(6): 2215-2234.
- [16] Ghosh S, Nowak Z, Lee K. Tessellation-based computational methods for the characterization and analysis of heterogeneous microstructures[J]. Composites Science and Technology, 1997, 57(9/10): 1187-1210.

(编辑 罗 敏)