

doi:10.11835/j.issn.1000.582X.2023.06.002

三分点阻尼弦的本征解及其性质

郑 罡, 廖 伟, 王梦丽, 张晓东

(重庆交通大学 省部共建山区桥梁及隧道工程国家重点实验室, 重庆 400074)

摘要: 化简三分点阻尼弦的频率方程, 求得其闭合解, 分大阻尼、适中阻尼、小阻尼等 3 种情况讨论解的性质。结果表明, 与中点阻尼弦相比, 三分点阻尼弦具有 3 个新特性: 1) 在本征解与阻尼的函数关系上, 前者有且仅有 1 个突变点, 而后者有 2 个突变点; 2) 在阻尼-频率关系上, 前者的频率在各阻尼区间内均不受阻尼值影响, 而後者的频率则在小阻尼情况下依赖阻尼; 3) 对于任意给定阻尼, 前者本征解在各阻尼区间内仅 1 个衰减率, 而后者除小阻尼以外, 均有 2 个衰减率。上述性质表明, 两者的动力学特性在质上(而不仅是量上)存在差异, 考虑到两者仅在阻尼位置上有所不同, 这一点应予特别留意。

关键词: 弦; 集中阻尼; 复模态

中图分类号: O302

文献标志码: A

文章编号: 1000-582X(2023)06-014-10

The eigen solution and properties of a taut string with concentrated damping at one-third-span

ZHENG Gang, LIAO Wei, WANG Mengli, ZHANG Xiaodong

(Co-constructing State Key Laboratory of Mountain Bridge and Tunnel Engineering by Province and Ministry, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P. R. China)

Abstract: A frequency equation of the damping string is simplified in which the damping is located at one third of the string length, and its analytical solution is obtained. The properties of the solution are discussed in three cases: large damping, moderate damping and small damping. The results show that, compared with the taut strings with damping which is located at half of the string length, the taut strings with damping which is located at one third of the string length has three new characteristics: 1) In the functional relationship between the eigenvalues and damping, the former has and only has one mutation point, while the latter has two; 2) In the damping - frequency relationship, the frequency of the former is not affected by the damping value in each damping interval, while the frequency of the latter is related to the damping; 3) For any given damping, the former eigen solution has only one attenuation rate in each damping interval, and the latter has two attenuation rates except for small damping. The above properties show that the dynamic characteristics of the two are different in essence (not only in quantity). Considering that they differ only in damping position, this should be paid special attention to.

Keywords: string; concentrated damping; hybrid system

收稿日期: 2022-06-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51978112, 51878106)。

Supported by National Natural Science Foundation of China (51978112, 51878106).

作者简介: 郑罡(1972—), 男, 研究员, 博士生导师, 主要从事结构动力学研究, (E-mail)zhenggang@cqjtu.edu.cn。

在各种激励下,拉索由于其内阻尼过小易产生大幅振动。因此,桥梁和空间结构工程中常用阻尼器对拉索进行减振^[1-3]。为分析拉索-阻尼系统的动力特性,将其简化为带有集中阻尼的张紧弦^[4-5](简称阻尼弦),并通过数值手段求取近似解,讨论其动力特性。在处理工程问题时,此做法取得了显著成效^[6-9]。但对于拉索-阻尼系统的研究,除采用数值方法外,应考虑解析的求解路径,揭示其一般性质。

阻尼弦的解析求解问题一直受到学界的关注。针对阻尼靠近弦端时的本征问题,得到了弦端小曲率假设(近似)条件下的解析解^[10]。文献[11]利用狄拉克函数,实现了对阻尼弦动力学方程的全区段列式,用数值方法导出频率方程,并求得数值解。文献[12]对动力学方程采用文献[11]的全区段列式,但不再通过数值方法而改用分段求解方式,首次导出单阻尼弦频率方程的一般形式,得到了与文献[11]一致的数值本征解。文献[13]则通过对单阻尼弦动力学方程的分区段列式,导出单阻尼弦频率方程的另一种形式,该形式本质上与文献[12]一致,仍采用数值方法讨论了本征解的若干重要性质。以上文献在单阻尼弦本征问题的解析求解方面主要取得2项进展,一是用狄拉克函数实现了动力学方程的全区段列式;二是导出简化或精确频率方程,再由数值法求解频率方程本征解。阻尼弦频率方程的基本形式均为超越方程,尚无一般化的求解方法。因此,以上文献对该方程的求解仍采用了数值方法。在探讨阻尼弦频率方程的解析求解方面,文献[14]求得中点阻尼弦(二分点阻尼弦)频率方程的闭合解,并讨论了解的性质;文中针对三分点阻尼弦的频率方程进行求解,重点分析其相对于中点阻尼弦出现的新特性。

1 问题描述

为把握拉索-阻尼系统的动力特性,将其简化为带有集中阻尼的张紧弦,如图1所示^[4]。

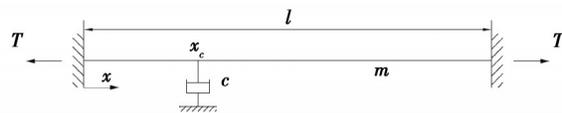


图1 带集中粘性阻尼的张紧弦

Fig. 1 Taut string attached with concentrated viscous damping

文献[11]给出的运动偏微分方程为

$$-T \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} c \delta(x - x_c), \quad (1)$$

式中: T 是索力; m 是单位长度的质量; $w(x, t)$ 、 $\delta(x - x_c)$ 、 x 、 t 、 x_c 和 c 分别是挠曲函数、狄拉克函数、位置坐标、时间、阻尼位置和阻尼器系数,并且 c 非负, $0 < x_c < l$ 。

文献[15]对式(1)所示系统进行无量纲化,得到无量纲的阻尼弦运动方程:

$$-\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} c \delta(x - x_c). \quad (2)$$

上述无量纲化过程表明,对于图1所示阻尼弦系统均可无量纲化,其特点是具有单位长度、单位分布质量密度以及单位张力,其中, $0 < x_c < 1$ 。因此,用无量纲的阻尼弦运动方程式可以简化物理系统的讨论,并采用文献[15]中的无量纲化逆过程得到对应的物理系统。式(1)(2)中未区分有量纲和无量纲符号。

文献[14]将式(2)的本征解分为两类:II类本征解对应阻尼位置处为本征函数驻点的情况,即阻尼点位移恒为零,弦做无衰减振动;I类本征解则对应于阻尼位置处不出现本征函数驻点的情况,其频率方程为

$$\frac{\sinh(p(1-x_c)) \sinh(px_c)}{\sinh p} = -\frac{1}{c}, \quad (3)$$

式中, p 为本征值。将式(3)与文献[12-13]中的频率方程对比可知,三者本质上是一致的。因II类本征解对应于弦作无衰减振动,这种解是常规的,对此不展开讨论,重点讨论三分点集中阻尼弦I类本征解及其性质。

2 I类本征解

注意到阻尼弦频率方程式(3)为超越方程,尽管其解可通过数值算法求得,但对于解析求解尚无一般化的方法,仅在某些特定情况下可能求得解析解,在三分点阻尼的情形下,将该超越方程转化为可直接求得闭合解的代数方程,以下对此进行讨论。

2.1 本征值

将 $x_c=1/3$ 代入频率方程式(3),整理得:

$$c \cdot \sinh\left(\frac{2}{3}p\right) \sinh\left(\frac{1}{3}p\right) + \sinh p = 0, \quad (4)$$

利用双曲函数的倍角公式,将式(4)化为关于 $\tanh(p/3)$ 的二次代数方程,即:

$$\tanh^2\left(\frac{p}{3}\right) + 2c \cdot \tanh\left(\frac{p}{3}\right) + 3 = 0, \quad (5)$$

注意到式(5)是关于 $\tanh(p/3)$ 的二次方程,求解该二次方程,再作反双曲函数计算,整理得:

$$p^{(1)} = \frac{3}{2} \ln \frac{1-c+\sqrt{c^2-3}}{1+c-\sqrt{c^2-3}}, \quad (6)$$

$$p^{(2)} = \frac{3}{2} \ln \frac{1-c-\sqrt{c^2-3}}{1+c+\sqrt{c^2-3}}. \quad (7)$$

式(6)(7)即为三分点阻尼弦本征值的闭合解,其中,上标(1)、(2)表示2个本征值的编号顺序,可将其称为根序。注意到该式是关于阻尼 c 的分数式的对数函数,存在函数性质突变点:第1种是分式的零点,即令分子为0的点;第2种是分式的极点,即令分母为0的点;第3种是分式中二次根式的零点,由于文中只讨论 c 非负的情况,第2种性质突变点不予讨论。第1种突变点,即 c 等于2,此时,式(6)中对数函数内分子为0;第3种突变点,即 c 等于 $\sqrt{3}$,当 c 小于 $\sqrt{3}$ 时,式(6)(7)两子式中将出现对非零虚部的复数取对数。因此,阻尼值 c 可根据函数性质突变点分为大阻尼($c > 2$)、适中阻尼($\sqrt{3} < c < 2$)、小阻尼($0 < c < \sqrt{3}$) 3个区间。

以上分析表明,三分点阻尼弦系统本征值存在2个函数性质突变点,因此,可分为3个区间进行讨论,而中点阻尼弦本征值仅存在1个函数性质突变点,对数函数内分式的分子存在零点,故阻尼值仅分为2个区间。实际上文献[14]给出的频率方程本征值的闭合解为

$$p = \ln\left(\frac{c-2}{c+2}\right). \quad (8)$$

中点阻尼弦和三分点阻尼弦突变点个数的差别是由于后者本征值闭合解中出现二次根式,而出现二次根式是由式(5)的二次方程性质决定的。同时,两者均具有第一种函数性质突变点,是因为两者关于阻尼 c 分数式的对数函数中的分式均存在分子等于0的情况。

2.2 本征函数

文献[14]给出的I类解的本征函数表达式为

$$\phi(x) = -c \left[\frac{\sinh(p(1-x_c)) \sinh(px)}{\sinh p} - \mu(x-x_c) \sinh(p(x-x_c)) \right], \quad (9)$$

式中, $\mu(x-x_c)$ 为单位阶跃函数。对于文中所讨论的三分点的情形,即 $x_c=1/3$,本征函数全区段表达式(9)可写为分区段形式,化简为

$$\phi(x) = \begin{cases} \sinh(px) & x \leq 1/3, \\ A \sinh(p(1-x)) & x > 1/3; \end{cases} \quad (10)$$

式中,常数 A 为 $\text{sech}(p/3)/2$,且 p 为待求的常数。式(6)(7)中的 p 可表示为复数形式 $p = \sigma + j \cdot \omega$, j 为虚数单位, σ 为本征值实部, $-\sigma$ 表示系统衰减率; ω 为本征值虚部,表示系统圆频率,文中将圆频率皆简称为频率。将复

数 p 代入本征函数分段表达式(10)可得到各阶本征函数 $\phi(x)$ 的闭合形式,在一般情况下为复本征函数,对应于复模态。

3 I类本征解的性质

由上一节可知,I类本征解在大阻尼、适中阻尼、小阻尼3个区间具有不同的函数表达式。本节分区间重点讨论系统的频率和衰减率,对于有0阶本征值的情况给出了0阶本征函数。

3.1 大阻尼

大阻尼情况下,当 $c > 2$ 时,在本征值 $p^{(1)}$ 、 $p^{(2)}$ 与阻尼的关系式(6)(7)中,前者对数函数内的值恒大于0,后者对数函数内的值恒小于0。由于两者在复域中的多值特性,可将其简化为

$$p_k^{(1)} = \frac{3}{2} \ln \left(\frac{1-c+\sqrt{c^2-3}}{1+c-\sqrt{c^2-3}} \right) + \frac{3}{2} j(2s^{(1)})\pi, \quad (11)$$

$$p_k^{(2)} = \frac{3}{2} \ln \left(-\frac{1-c-\sqrt{c^2-3}}{1+c+\sqrt{c^2-3}} \right) + \frac{3}{2} j(1+2s^{(2)})\pi, \quad (12)$$

式中,本征值的阶次 $k = 0, 1, 2, \dots$, 整数 $s^{(1)}$ 、 $s^{(2)} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。 k 与 $s^{(1)}$ 、 $s^{(2)}$ 的关系为

$$k = \begin{cases} -(4s^{(1)}+1), & s^{(1)} < 0, \\ 4s^{(1)}, & s^{(1)} \geq 0, \\ -(4s^{(2)}+3), & s^{(2)} < 0, \\ 4s^{(2)}+2, & s^{(2)} \geq 0. \end{cases} \quad (13)$$

阶次 k 由本征值虚部(即频率 ω)绝对值的大小及正负号决定。按照虚部绝对值从小到大依次对本征值阶次 k 进行编号;当出现2个绝对值相等的频率时,先编负值,后编正值。采用的规则与常规的先编正值,后编负值的做法不同,目的是在讨论不同阻尼区间内本征值阶次的数学关系时具有简洁性。

3.1.1 频率

将本征值式(11)(12)中的虚部记为 ω_k , 利用 k 与 $s^{(1)}$ 、 $s^{(2)}$ 的关系式(13), 可将 ω_k 写为

$$\omega_k = \frac{3}{2} s\pi, \quad (14)$$

式中, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。式(11)(12)是关于 $\tanh(p/3)$ 的二次方程式2根所对应的2个子式,其为本征值的闭合形式。频率一般表达式(14)使得两本征值虚部的表达式在大阻尼情况下更为紧凑,且 s 取偶数和奇数时分别对应的是式(11)(12)的虚部。按式(13)和式(14)可给出系统各阶频率,表1列出了0~6阶频率,图2(a)绘出了系统0~6阶频率,图2(b)为衰减率-阻尼函数。

表1 大阻尼下系统0~6阶频率

Table 1 The 0-6th order frequency in large damping range

阶次	k	第0阶	第1阶	第2阶	第3阶	第4阶	第5阶	第6阶
频率 ^(根序)	$\omega^{(i)}$	$0^{(1)}$	$-3\pi/2^{(2)}$	$3\pi/2^{(2)}$	$-3\pi^{(1)}$	$3\pi^{(1)}$	$-9\pi/2^{(2)}$	$9\pi/2^{(2)}$

由表1和图2(a)可知,在大阻尼情况下,系统存在虚部为0的本征值 $p_0(1)$, 即当式(14)中 $s^{(1)}$ 取0时,系统的频率为0,表明系统的0阶运动无振荡特性。除0阶以外,系统还有1阶及以上无穷多阶本征值,即这些本征值的虚部 ω 为 $3\pi/2$ 的非零整数倍,其表达式中不显含阻尼 c 。

将文中频率结果与中点阻尼弦的情况^[14]比较:两者均具有无振荡运动的0阶本征解,即0阶频率成分;两者频率的闭合解均不显含阻尼 c ,表明在该区间上系统频率与阻尼无关。尽管两者各阶频率在数值上不同,但在该区间含有0阶振动以及频率表达式不显含阻尼 c ,两者具有内在一致性。

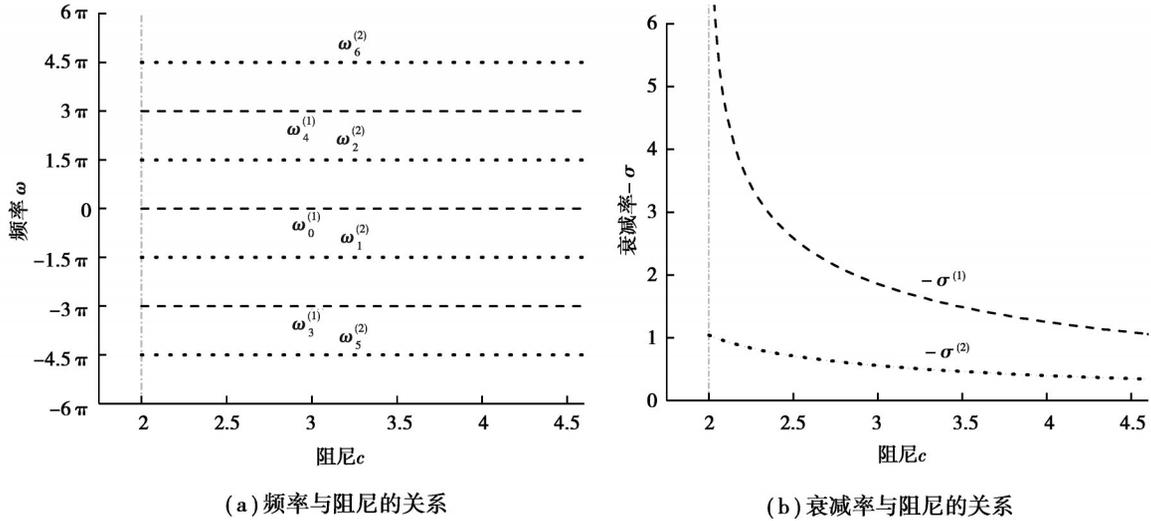


图2 大阻尼区间衰减率和频率与阻尼的关系 ($c > 2$)

Fig. 2 The decay rate and frequency varying with damping c in large damping range ($c > 2$)

3.1.2 衰减率

将本征值在大阻尼下的闭合解式(11)(12)的实部记为 $\sigma^{(1)}$ 和 $\sigma^{(2)}$, 系统的衰减率为

$$-\sigma^{(1)} = -\frac{3}{2} \ln \left(\frac{1-c+\sqrt{c^2-3}}{1+c-\sqrt{c^2-3}} \right), \tag{15}$$

$$-\sigma^{(2)} = -\frac{3}{2} \ln \left(-\frac{1-c-\sqrt{c^2-3}}{1+c+\sqrt{c^2-3}} \right). \tag{16}$$

式中, 衰减率与阻尼的关系如图2(b)所示。由图可知, 系统存在2个不同的衰减率 $-\sigma^{(1)}$ 和 $-\sigma^{(2)}$, 其中, $-\sigma^{(1)}$ 对应于频率 $3\pi/2$ 的偶数倍, $-\sigma^{(2)}$ 对应于频率为 $3\pi/2$ 的奇数倍, 两者均随阻尼值 c 的增大而减小。

与中点阻尼弦的有关性质^[4]相比, 三分点阻尼弦在大阻尼区间延续了前者的性质, 表现出了新的特性: 在阻尼-衰减率函数关系上, 两者的衰减率均随阻尼值 c 的增大而减小; 对于任意给定阻尼, 前者的所有本征解均对应着1个衰减率, 而后者出现2个不同衰减率, 2个衰减率对应着2组不同频率的本征解。

3.1.3 本征函数

将本征值在大阻尼下的闭合解式(11)(12)带入本征函数分段表达式(10)中可得到各阶本征函数的闭合形式, 由于仅0阶本征函数具有非震荡的特性, 仅讨论0阶本征函数。对于0阶本征函数的情况, 式(11)中虚部 $\omega = 0$, 即 $p_0^{(1)} = \sigma_0^{(1)}$, 将其带入本征函数闭合形式中得到实双曲正弦函数, 为实模态:

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \sinh(\sigma x), & x \leq 1/3, \\ A \sinh(\sigma(1-x)), & x > 1/3. \end{cases} \tag{17}$$

此时, 常数 A 为 $\text{sech}(p/3)/2$ 。将上式与二分点阻尼弦的本征函数^[4]

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \sinh \sigma x, & x < 1/2, \\ \sinh \sigma(1-x), & x \geq 1/2. \end{cases} \tag{18}$$

对比可知, 两者的0阶本征函数都是实双曲正弦函数的分段函数, 但由于阻尼布设位置不同, 函数分段点不同。

3.2 适中阻尼

适中阻尼情况下, 即当 $\sqrt{3} < c < 2$ 时, 在本征值 $p^{(1)}$ 、 $p^{(2)}$ 与阻尼的关系式(6)(7)中, 两对数函数内的值均恒小于0, 由对数函数在复域中的多值特性, 将其化简为

$$p_k^{(1)} = \frac{3}{2} \ln \left(-\frac{1-c+\sqrt{c^2-3}}{1+c-\sqrt{c^2-3}} \right) + \frac{3}{2} j(1+2s^{(1)})\pi, \tag{19}$$

$$p_k^{(2)} = \frac{3}{2} \ln \left(-\frac{1-c-\sqrt{c^2-3}}{1+c+\sqrt{c^2-3}} \right) + \frac{3}{2} j(1+2s^{(2)})\pi, \tag{20}$$

式中,本征值的阶次 $k = 0, 1, 2 \dots$, 整数 $s^{(1)}, s^{(2)} = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ 。 k 与 $s^{(1)}, s^{(2)}$ 的关系如下:

$$k = \begin{cases} -4s^{(1)}, & s^{(1)} < 0, \\ 4s^{(1)} + 1, & s^{(1)} \geq 0, \\ -(4s^{(2)} + 2), & s^{(2)} < 0, \\ 4s^{(2)} + 3, & s^{(2)} \geq 0. \end{cases} \quad (21)$$

阶次 k 由本征值虚部绝对值的大小与正负号决定:依照虚部绝对值从小到大依此对本征值阶次 k 进行编号;在本征值此区间的闭合解式(19)(20)中 2 个本征值的虚部均相同,即出现重频的情况,当出现 4 个绝对值相等的频率时,先编正值,后编负值,且依照根序(1)(2)(2)(1)为周期进行编号。应特别注意,在适中阻尼区间上出现了重频的特殊情况,在编号时需考虑根序顺序。

3.2.1 频率

将本征值在适中阻尼区间的闭合解式(19)(20)中的虚部记为 ω_k , 并利用 k 与 $s^{(1)}, s^{(2)}$ 的关系式(21)得 ω_k :

$$\omega_k = \frac{3}{2} (1 + 2s) \pi, \quad (22)$$

式中, $s = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ 。按式(21)和式(22)可得到系统各阶频率,表 2 列出了前 6 阶频率,同时,图 3(a)绘制了两本征值对应的前 6 阶频率,图 3(b)为衰减率-阻尼函数图示。

表 2 适中阻尼下系统前 6 阶频率

Table 2 The 1-6th order frequency in moderate damping range

阶次	k	第 1 阶	第 2 阶	第 3 阶	第 4 阶	第 5 阶	第 6 阶
频率(根序)	$\omega^{(i)}$	$3\pi/2^{(1)}$	$-3\pi/2^{(2)}$	$3\pi/2^{(2)}$	$-3\pi/2^{(1)}$	$9\pi/2^{(1)}$	$-9\pi/2^{(2)}$

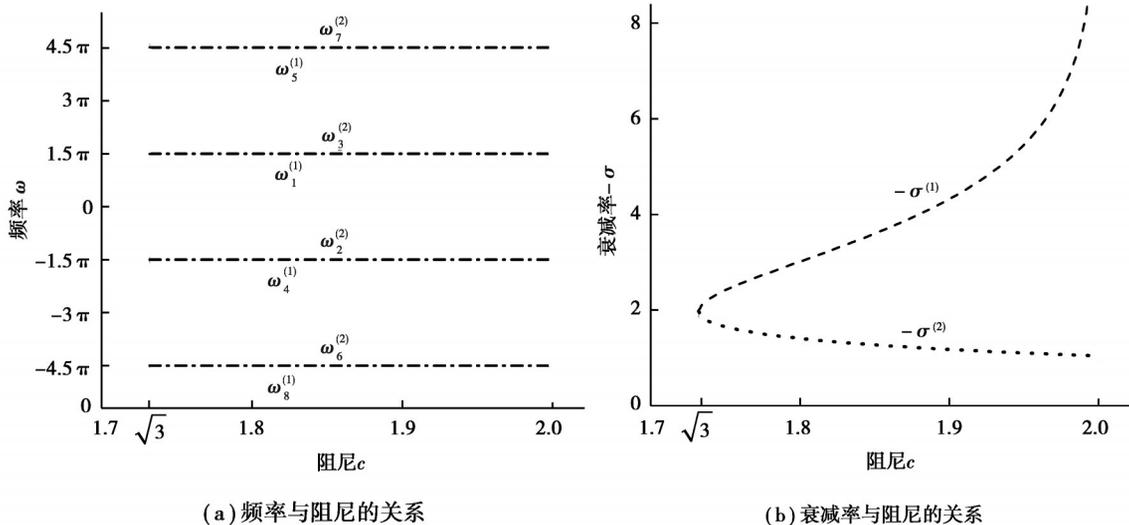


图 3 适中阻尼区间衰减率和频率与阻尼的关系 ($\sqrt{3} < c < 2$)

Fig. 3 The decay rate and frequency varying with damping c in moderate damping range ($\sqrt{3} < c < 2$)

从表 2 和图 3(a)可知,适中阻尼下系统的频率为 $3(1+2s)\pi/2$, 不存在频率为 0 的情况。与大阻尼的情况相比,频率呈现出两点与其不同的特点:一是 $3\pi/2$ 偶数倍的频率全部消失;二是不再有频率等于 0 的情况,表明在此区间三分点阻尼弦系统具有振荡运动特性。此时,系统的频率表达式中不显含阻尼 c , 表明系统频率与阻尼无关,再次表现出阻尼不影响系统频率的性质。与中点阻尼弦的频率性质^[14]相比,两者在适中阻尼区间下频率均不显含阻尼 c 。

3.2.2 衰减率

将本征值在适中阻尼的闭合解式(19)(20)的实部记为 $\sigma^{(1)}$ 和 $\sigma^{(2)}$, 则系统的衰减率为

$$-\sigma^{(1)} = -\frac{3}{2} \ln \left(-\left(1 - c + \sqrt{c^2 - 3}\right) / \left(1 + c - \sqrt{c^2 - 3}\right) \right), \quad (23)$$

$$-\sigma^{(2)} = -\frac{3}{2} \ln \left(-\left(1 - c - \sqrt{c^2 - 3}\right) / \left(1 + c + \sqrt{c^2 - 3}\right) \right). \quad (24)$$

将式(23)(24)中阻尼与衰减率的关系绘于图3(b)。由图可知,系统同样存在2个衰减率 $-\sigma^{(1)}$ 和 $-\sigma^{(2)}$,其中, $-\sigma^{(1)}$ 随着阻尼值的增大而增大, $-\sigma^{(2)}$ 随着阻尼值的增大而减小。对于系统同一频率会对应出现2个不同的衰减率,这与大阻尼的情况不同。

与中点阻尼弦有关性质^[14]相比,此时三分点阻尼弦出现了新的特性:在阻尼与衰减率的函数关系上,前者的衰减率随着阻尼值的增大而增大,而三分点阻尼弦存在2个衰减率, $-\sigma^{(1)}$ 的单调性保留了原有的性质,而 $-\sigma^{(2)}$ 随着阻尼值的增大而减小。此区间三分点阻尼弦系统会出现同一频率对应2个衰减率的情况,这既是区别于三分点阻尼弦其他阻尼区间的独有性质,又是区别于中点阻尼弦的新特性。

3.3 小阻尼

小阻尼情况下,即当 $0 < c < \sqrt{3}$ 时,在本征值 $p^{(1)}$ 、 $p^{(2)}$ 与阻尼的关系式(6)(7)中,两对数函数内皆出现复数,由对数函数在复域中的多值特性,可将其简化为

$$p_k^{(1)} = \frac{3}{2} \left(\ln \left(\sqrt{4 - c^2} / (c + 2) \right) + \frac{3}{2} j \left(\tan^{-1}(-\sqrt{3 - c^2}) + (1 + 2s^{(1)})\pi \right) \right), \quad (25)$$

$$p_k^{(2)} = \frac{3}{2} \left(\ln \left(\sqrt{4 - c^2} / (c + 2) \right) + \frac{3}{2} j \left(\tan^{-1}(\sqrt{3 - c^2}) + (-1 + 2s^{(2)})\pi \right) \right). \quad (26)$$

式中,本征值的阶次 $k = 0, 1, 2, \dots$,整数 $s^{(1)}$ 、 $s^{(2)} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。 k 与 $s^{(1)}$ 、 $s^{(2)}$ 的关系为

$$k = \begin{cases} -4s^{(1)}, & s^{(1)} < 0, \\ 4s^{(1)} + 1, & s^{(1)} \geq 0, \\ -(4s^{(2)} - 2), & s^{(2)} \leq 0, \\ 4s^{(2)} - 1, & s^{(2)} > 0; \end{cases} \quad (27)$$

式中,阶次 k 由本征值虚部绝对值的大小与正负号决定:依照虚部绝对值从小到大依次对本征值阶次 k 进行编号;当出现2个绝对值相等的频率时,先编正值,后编负值。

3.3.1 频率

将本征值在小阻尼的闭合解式(22)中的虚部记为 ω_k ,则有:

$$\omega_k^{(1)} = \frac{3}{2} \left(\tan^{-1}(-\sqrt{3 - c^2}) + (1 + 2s^{(1)})\pi \right), \quad (28)$$

$$\omega_k^{(2)} = \frac{3}{2} \left(\tan^{-1}(\sqrt{3 - c^2}) + (-1 + 2s^{(2)})\pi \right). \quad (29)$$

按式(27)和式(28)(29)可给出系统各阶频率,表3列出了前6阶频率,图4(a)绘制了两本征值对应的前6阶频率,图4(b)为衰减率-阻尼函数。

表3 小阻尼下系统前6阶频率

Table 3 The 1-6th order frequency in small damping range

阶次	k	第1阶	第2阶	第3阶	第4阶	第5阶	第6阶
频率 ^(阶序)	$\omega^{(i)}$	$\frac{3}{2}(-\omega_c + \pi)^{(1)}$	$\frac{3}{2}(\omega_c - \pi)^{(2)}$	$\frac{3}{2}(\omega_c + \pi)^{(2)}$	$\frac{3}{2}(-\omega_c - \pi)^{(1)}$	$\frac{3}{2}(-\omega_c + 3\pi)^{(1)}$	$\frac{3}{2}(\omega_c - 3\pi)^{(2)}$

注: $\omega_c = \tan^{-1}(\sqrt{3 - c^2})$

由表3和图4(a)可知,小阻尼下系统无0阶频率,表明系统此时具有振荡运动的特性,这与大阻尼时的情况不同。注意到,本征值式(23)(24)各阶频率 $\omega_k^{(1)}$ 、 $\omega_k^{(2)}$ 的表达中皆含有阻尼 c ,表明在该区间,三分点阻尼弦的系统频率与其阻尼值有关。将上述三分点阻尼弦结果与中点阻尼弦^[14]相比,两者在此区间上皆具有振荡

运动的特性,但在阻尼是否影响系统频率这一性质上,两者不一致,前者的系统频率受到其阻尼值影响,后者不受影响。

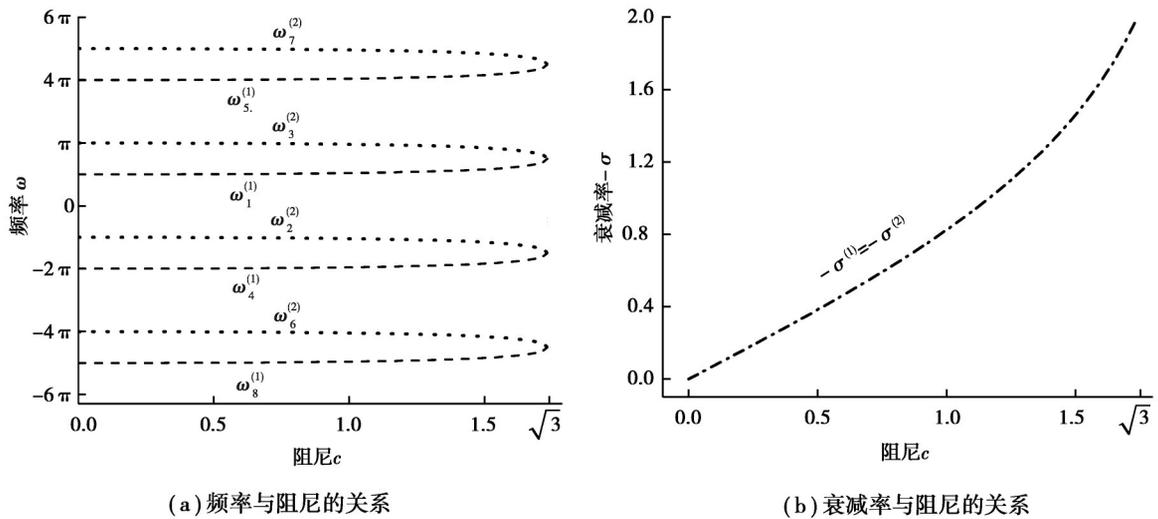


图 4 小阻尼频率及衰减率与阻尼关系 ($0 < c < \sqrt{3}$)

Fig. 4 The decay rate and frequency varying with damping c in small damping range

综合 3 个区间对阻尼-频率关系的分析可知,中点阻尼弦在对应区间内,其频率均不受阻尼值影响,而三分点阻尼弦出现了新的频率性质:在小阻尼区间,频率依赖于阻尼。

当 $c \rightarrow 0$ 时,系统频率 $\omega_k^{(1)}$ 和 $\omega_k^{(2)}$ 为

$$\lim_{c \rightarrow 0} \omega_k^{(1)} = \pi + 3s^{(1)}\pi, \tag{30}$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} \omega_k^{(2)} = -\pi + 3s^{(2)}\pi. \tag{31}$$

根据 $s^{(1)}$ 和 $s^{(2)}$ 的取值可知,式(30)~(31)的 2 个子式可统一写为

$$\lim_{c \rightarrow 0} \omega_k = s\pi, \tag{32}$$

式中, $s = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 7 \dots$ 。注意到, s 不能取到 $\pm 3, \pm 6 \dots \pm 3n$ 。实际上,当 s 取到 3 的整数倍时,频率是 II 类本征解所对应的频率,这恰恰是 I 类解无法包含的。当阻尼 c 趋于 0 时,三分点阻尼弦系统的基频趋于 π ,其余频率趋于基频 π 的整数倍(但不能取到 3 的整数倍)。与无阻尼弦频率相比,前者在 c 趋于 0 时的频率与后者固有频率 $a s \pi / l$ 相等。

而当阻尼 c 从左趋于 $\sqrt{3}$ 时,系统频率 $\omega_k^{(1)}$ 和 $\omega_k^{(2)}$ 为

$$\lim_{c \rightarrow \sqrt{3}^-} \omega_k^{(1)} = \frac{3}{2}(1 + 2s^{(1)})\pi, \tag{33}$$

$$\lim_{c \rightarrow \sqrt{3}^-} \omega_k^{(2)} = \frac{3}{2}(-1 + 2s^{(2)})\pi. \tag{34}$$

由式(33)(34)2 个子式可以发现,当阻尼值从左趋于 $\sqrt{3}$ 时,系统的频率实际上是 $3\pi/2$ 的奇数倍,与 3.2 节中当阻尼值 c 从右趋近于 $\sqrt{3}$ 时的频率相同,虽然阻尼 c 等于 $\sqrt{3}$ 是函数性质突变点,但在该点处系统的频率还是连续的。

3.3.2 衰减率

将本征值在小阻尼的闭合解式(25)(26)的实部记为 $\sigma^{(1)}$ 和 $\sigma^{(2)}$,则系统的衰减率为

$$-\sigma^{(1)} = -\sigma^{(2)} = -\frac{3}{2} \left(\ln \left(\sqrt{4 - c^2} / (c + 2) \right) \right). \tag{35}$$

将式(35)中阻尼与衰减率的关系绘于图 4(b)。由图可知,此时 2 组本征解对应的 2 个衰减率相同,即仅存在 1 个衰减率,表明对于给定阻尼,各阶运动均具有相同的衰减率。随着阻尼值增大,衰减率增大。

与中点阻尼弦在该区间下的有关性质^[14]相比,三分点阻尼弦延续了前者的性质:对于在此区间任意给定的阻尼 c ,两者均仅有1个衰减率,两者的衰减率均随着阻尼值的增大而增大。

3.4 阻尼-频率及阻尼-衰减率函数

文中分析大阻尼、适中阻尼、小阻尼3种情况下系统的动力学性质,结果如图5所示。

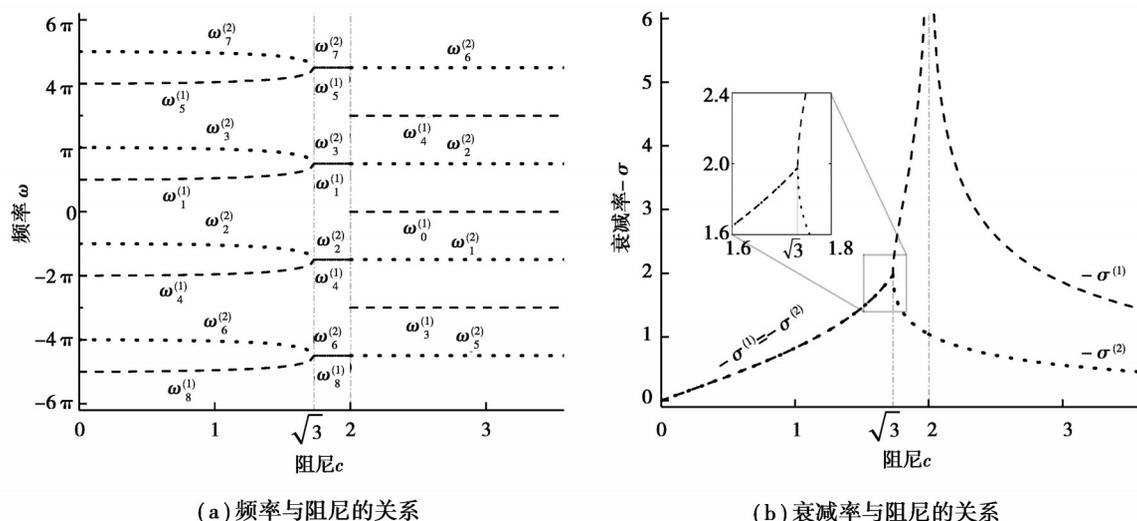


图5 频率及衰减率随阻尼变化曲线

Fig. 5 The frequency and decay rate varying with damping C

图中分别绘出了阻尼-频率及阻尼-衰减率关系曲线。图5(a)中,虚线表示本征值 $p^{(1)}$ 对应的频率,点线表示本征值 $p^{(2)}$ 对应的频率,下标为阶次;图5(b)中,虚线与点线分别表示衰减率 $\sigma^{(1)}$ 和 $\sigma^{(2)}$ 。应特别注意,前三小节给出3种不同排序规则是为了协调3个阻尼区间的阶次编号,且小阻尼与适中阻尼阶次进行简单的代数运算即可得到大阻尼下的本征值阶次。

4 II类本征解

三分点阻尼弦还存在一类特殊的自由振动,即II类本征解。这类解相当于三分点位置恰好为无阻尼自由振动驻点的那一部分本征解,其本征函数在阻尼位置处恒为0,振动不受阻尼的影响,表现为无衰减自由振动。

文献[15]给出了这类本征解的表达式为

$$p = j \cdot 3s\pi s = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (36)$$

$$\phi(x) = \sinh(px) = j \sin(3s\pi x) s = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (37)$$

由式(36)和式(37)可知,II类本征解实际上对应于无阻尼弦第3,6,9...3s阶本征解。

5 结论

根据集中阻尼弦的本征方程,推导出单个阻尼布设于1/3处时系统的本征解,分大阻尼、适中阻尼、小阻尼3个区间对系统的频率和衰减率进行讨论,结果如下。

1)本征值存在2个函数性质突变点,即 $c = \sqrt{3}$ 和 $c = 2$ 。

2)在频率方面,大阻尼情况下,系统存在频率为0的情况,除0阶以外的频率, ω 均为 $3\pi/2$ 的非零整数倍;与大阻尼不同的是,在适中阻尼区间系统的频率不再存在频率为0的情况,且 $3\pi/2$ 偶数倍的频率全部消失;小阻尼下系统同样无0阶频率,与其他2个区间不同的是,在该区间系统频率与其阻尼值有关。

3)在衰减率方面,系统存在2个衰减率 $-\sigma^{(1)}$ 和 $-\sigma^{(2)}$:大阻尼情况下,前者对应频率 $3\pi/2$ 的偶数倍,后者对应频率为 $3\pi/2$ 的奇数倍,两者均随阻尼值 c 的增大而减小;在适中阻尼区间,随着阻尼值的增大,前者增大而后者减小;在小阻尼区间两者相等,同时随着阻尼值增大,衰减率均在减小。

将上述关于频率和衰减率的性质与中点阻尼弦作比较,得到三分点阻尼弦的3个新特性:

- 1)在本征解与阻尼值的关系上,前者仅存在1个性质突变点,而后者则存在2个性质突变点。
- 2)在阻尼-频率关系上,前者的频率在各个阻尼区间内均不受阻尼值的影响,后者的频率在小阻尼区间内则依赖于阻尼取值。
- 3)对于任意给定阻尼,前者本征解在各阻尼区间内仅1个衰减率,而后者除小阻尼以外,均具有2个衰减率。

参考文献

- [1] Caetano E. Cable vibrations in cable-stayed bridges[M]. IABS, 2007.
- [2] Fujino Y, Kimura K, Tanaka H. Wind resistant design codes for bridges in Japan[M]// Wind Resistant Design of Bridges in Japan. Tokyo: Springer, 2012: 1-7.
- [3] Chen L, Sun L M, Nagarajaiah S. Cable vibration control with both lateral and rotational dampers attached at an intermediate location[J]. Journal of Sound and Vibration, 2016, 377: 38-57.
- [4] Pacheco B M, Fujino Y, Sulekh A. Estimation curve for modal damping in stay cables with viscous damper[J]. Journal of Structural Engineering, 1993, 119(6): 1961-1979.
- [5] Tabatabai H, Mehrabi A B. Design of mechanical viscous dampers for stay cables[J]. Journal of Bridge Engineering, 2000, 5(2): 114-123.
- [6] Battini J M. Analysis of dampers for stay cables using non linear beam elements[J]. Structures, 2018, 16: 45-49.
- [7] Main J A, Jones N P. Vibration of tensioned beams with intermediate damper. II: damper near a support[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2007, 133(4): 379-388.
- [8] Lazar I F, Neild S A, Wagg D J. Vibration suppression of cables using tuned inerter dampers[J]. Engineering Structures, 2016, 122: 62-71.
- [9] 李寿英, 王世峰, 陈政清. 阻尼器支架刚度对悬索桥吊索减振效果影响的数值研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2017, 44(1): 9-15.
Li S Y, Wang S F, Chen Z Q. Numerical investigation on influence of damper support stiffness on damping effect of suspension bridge hangers[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2017, 44(1): 9-15. (in Chinese)
- [10] Carne T G. Guy cable design and damping for vertical axis wind turbines[J]. Sand, 1981.
- [11] Pacheco B M, Fujino Y, Sulekh A. Estimation curve for modal damping in stay cables with viscous damper[J]. Journal of Structural Engineering, 1993, 119(6): 1961-1979.
- [12] Krenk S. Vibrations of a taut cable with an external damper[J]. Journal of Applied Mechanics, 2000, 67(4): 772-776.
- [13] Main J A, Jones N P. Free vibrations of taut cable with attached damper. I: linear viscous damper[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2002, 128(10): 1062-1071.
- [14] 郑罡, 李章瑜, 郭增伟, 等. 集中阻尼弦本征解的性质[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(9): 980-990.
Zheng G, Li Z Y, Guo Z W, et al. Properties of the eigen solution of taut strings with concentrated damping[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2019, 40(9): 980-990. (in Chinese)
- [15] 郑罡, 白钰, 张晓东, 等. 集中黏性阻尼弦的本征问题[J]. 振动与冲击, 2020, 39(12): 177-181.
Zheng G, Bai Y, Zhang X D, et al. Eigen problem of a taut string with concentrated viscous damping[J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(12): 177-181. (in Chinese)

(编辑 陈移峰)