

doi: 10.11835/j.issn.1000-582X.2022.266

矩形板中应力波主波和次波的传播与反射

李 曦, 刘占芳

(重庆大学 航空航天学院, 重庆 400044)

摘要: 弹性应力波的修正理论指出关于体积应变的波动方程与现有理论一致, 但发展了一组关于体积应变和偏应变的弱耦合波动方程。针对矩形板受侧向集中载荷冲击下应力波的波动问题, 建立了应力波传播的两组控制方程以及加载面和自由面的波动边界条件。采用有限差分方法求解波动方程, 数值分析了应力波关于主波和次波的传播以及自由面上斜入射波的反射过程。偏应变在传播过程中分裂为两部分, 一部分与体积应变共同传播组成主波, 另一部分传播较慢形成次波。数值模拟结果显示与冲击载荷下纳钙玻璃板中应力波的传播图像是完全符合的。

关键词: 应力波; 主波; 次波; 弱耦合波动方程; 波反射

中图分类号: O347.4

文献标志码: A

文章编号: 1000-582X(2023)08-032-13

Propagation and reflection of stress wave about primary and secondary waves in rectangular plates

LI Xi, LIU Zhanfang

(College of Aerospace Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

Abstract: The modified theory of elastic stress waves asserts that the wave equations governing volume strain are consistent with existing theories, but a new set of weakly coupled wave equations encompassing both volume strain and partial strain has been developed. To address the problem of stress wave fluctuation caused by a concentrated load impact on a rectangular plate, two sets of control equations for stress wave propagation as well as the fluctuation boundary conditions of loading surface and free surface are established in this paper. The finite difference method is used to solve the wave equation, and the stress wave is simulated numerically for the propagation of the main and secondary waves and the reflection process of oblique incident waves on the free plane. During propagation, the partial strain splits into two parts: one part propagates together with the volume strain, forming the main wave, while the other part propagates at a slower pace, resulting in the formation of a secondary wave. The numerical simulation results show complete consistency with regard to the propagation image of the stress waves in the nanocalcium glass plate under shock loading.

Keywords: stress wave; primary stress wave; secondary stress wave; weakly coupled wave equation; reflection of waves

收稿日期: 2022-05-30 网络出版日期: 2022-09-14

基金项目: 国家自然科学基金(11372365; U1830115)。

Supported by National Natural Science Foundation of China(11372365, U1830115).

作者简介: 李曦(1994—), 男, 硕士研究生, 主要从事冲击破坏研究, (E-mail)961920449@qq.com;

刘占芳, 男, 教授, 博士生导师, (E-mail)zhanfang@cqu.edu.cn。

应力波理论大量运用于透明装甲^[1-2]、爆炸与冲击破坏^[3]等军事领域。由于武器和战争的升级,对透明装甲的材料、工艺等方面提出了越来越高的要求^[4]。玻璃是目前重要的装甲选用材料之一,通过对玻璃平板受冲击后的材料性能的理论研究与实验研究^[5],进而改善玻璃的弹道性能^[6]从而满足更多复杂环境下对装甲的需求。而弹性应力波理论及其数值模拟则是上述领域中研究工作开展的重要基础之一。应力波理论描述了固体中质点速度变化和相应的应力、应变变化^[7],尤其是针对各向同性线弹性体中的应力波波动问题的研究一直延续至今^[8-14],形成了一套理论体系。然而,现有的弹性应力波理论还不够完善,在理论及工程应用中仍存在诸多问题。

对于体积波方程:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\theta = \rho \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \quad (1)$$

式中: λ 、 μ 为拉梅参数; ρ 为材料密度; ∇ 为哈密尔顿算子;体积应变 $\theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$ 为位移的散度。该方程为标准的双曲方程,体积波的波速表示如下:

$$c_1 = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}} = \sqrt{\frac{\left(K + \frac{4}{3}G\right)}{\rho}} \quad (2)$$

体积波波速同时与体积模量和剪切模量有关,体积模量联系静水压力与体积应变,不难理解体积波波速与体积模量有关。而剪切模量联系偏应变和偏应力,然而体积波方程中波动变量为体积应变,不包含偏应变,故波速与剪切模量相关缺乏逻辑联系。

对于旋转波方程:

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{\omega} = \rho \frac{\partial^2\boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} \quad (3)$$

式中, $\boldsymbol{\omega}$ 为旋转矢量^[15]或转角,用以表达弹性体内连续的转角。旋转波方程波动变量为转角,但经典弹性力学缺少与之对应的共轭内力偶^[16],这是不完备的。旋转矢量作为角矢量 $\boldsymbol{\omega}$,表示为:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}, \quad (4)$$

即角矢量为位移旋度的一半。根据偶应力弹性理论^[17],反对称应力 $\boldsymbol{\tau}$ 与旋转矢量有关:

$$\boldsymbol{\tau} = -\eta\nabla^2\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \quad (5)$$

式中, $\boldsymbol{\epsilon}$ 为置换张量。经典弹性力学忽略了反对称应力,即反对称应力为零;式(5)右端也为零,则以旋转矢量为波动变量的波动方程不应存在。

观察旋转波的波速,该方程为标准双曲方程,波速为:

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (6)$$

该波速决定于剪切模量。由本构关系可知,剪切模量联系着偏应力与偏应变,没有直接关联于转动,所以这一点也与所谓旋转波的运动存在内在冲突。

此外,各种冲击实验现象表明,应力波理论需要进一步完善。冲击加载下固体中的压缩波在自由表面反射时出现的材料层裂^[18-19]并不是简单的拉压破坏,而是伴随着剪切破坏,说明应力波界面反射时不仅仅只有静水压力的影响,还应有剪应力的作用,但现有波动理论缺少产生剪切作用的波动方程。平板冲击实验中观测到的自由面速度二次压缩信号^[20-21]与一维应变假设矛盾,即当平板撞击简化为一维应变冲击时,理论上就排除了偏应变的传播,而自由面速度的二次压缩信号又对应着一个未知的波速较慢的波,对这个波的解释也需要改进现有的应力波理论。诸多材料受超高速撞击的弹道实验^[22-23]现象也有待更完备的理论予以解释。

尽管经典的应力波理论体系已经融合了大量学者的研究成果,但是它依然存在着值得研究之处。故对各向同性线弹性固体材料的修正应力波理论^[24]展开研究是有价值的,通过数值模拟结合已有的实验观测,完善理论研究的同时也为解决应用问题提供了更多思路。当数值模拟的结果能够较好地解释与经典理论有冲突的实验现象时,证明修正弹性应力波理论是值得研究的。

1 修正的弹性应力波理论

在小变形的情况下,物体的变形用位移的右梯度 $\mathbf{u}\nabla$ 来度量,弹性体任一线元 $d\mathbf{x}$ 的位移增量 $d\mathbf{u}$ 为:

$$d\mathbf{u} = \mathbf{u}\nabla \cdot d\mathbf{x}. \quad (7)$$

位移右梯度 $\mathbf{u}\nabla$ 为非对称张量,将其分解为对称张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和反对称张量 $\mathbf{A}^{[10]}$ 之和:

$$\mathbf{u}\nabla = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{A}, \quad (8)$$

式中应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为二阶对称张量描述线元长度的改变,转动张量 \mathbf{A} 为二阶反对称张量描述线元的弯曲,转动张量反偶于角矢量,于是有:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u}), \quad (9)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla - \nabla\mathbf{u}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\omega}, \quad (10)$$

对于宏观弹性体,能够忽略旋转变形及其影响,只需考虑对称的应变张量,应变张量可以进一步分解成偏应变和球应变之和:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \frac{1}{3}\theta\mathbf{I}, \quad (11)$$

式中,偏应变张量 \mathbf{e} 的迹为零。在应变的和分解中,偏应变 \mathbf{e} 和球应变 θ 线性无关且分解唯一。

弹性体中的静水压力与体积应变的线性本构为:

$$P = K\theta = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\theta; \quad (12)$$

弹性体中的偏应力与偏应变的线性本构为:

$$\mathbf{S} = 2G\mathbf{e} = 2\mu\mathbf{e}. \quad (13)$$

应力是静水压力与偏应力之和:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} + P\mathbf{I} = 2\mu\mathbf{e} + \lambda\theta\mathbf{I}. \quad (14)$$

弹性体动量守恒方程为:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (15)$$

将式(11)(14)代入式(15)中,得到以位移为变量表达的拉梅^[15]方程:

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \rho\mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (16)$$

对该方程左右两边分别求散度,考虑体力均匀时,可得体积波的波动方程:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\theta = \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad (17)$$

这与已有的应力波理论中体积波的波动方程相同。

对式(16)左右两端取梯度,由于忽略了转动变形及其影响,可得:

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\theta + \mu\nabla^2\boldsymbol{\varepsilon} = \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t^2}, \quad (18)$$

式中, $\nabla\nabla$ 表示两个哈密尔顿算子的并乘。将式(11)代入式(18)整理可得:

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\theta + \frac{1}{3}\mu\nabla^2\theta\mathbf{I} + \mu\nabla^2\mathbf{e} = \frac{1}{3}\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\mathbf{I} + \rho \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2}. \quad (19)$$

用 $\frac{1}{3}\mathbf{I}$ 乘以式(17)后减式(19)可以得到:

$$\mu\nabla^2\mathbf{e} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} + (\lambda + \mu)\left(\frac{1}{3}\nabla^2\theta\mathbf{I} - \nabla\nabla\theta\right). \quad (20)$$

这是一个关于体积应变和偏应变的弱耦合波动方程,式(17)和式(20)组成弱耦合偏微分方程组,即为弹性应力波修正理论的波动方程组。由式(17)可以得到体积应变的传播,由式(20)可得被体积应变影响的偏应变的传播。已经发现^[25],随着应力波的传播,波阵面会随着偏应变分裂形成2个波阵面,一部分偏应变与体积

应变的传播速度相同,共同组成主波,剩下的偏应变则以较慢的波速独立传播,形成次波。

2 矩形板中应力波的波动方程和边界条件

2.1 矩形板中应力波的波动方程

波阵面到达边界时会发生反射,为了体现在侧面边界和右边界上的反射模式,需要建立集中力加载下应力波的传播与反射模型,如图 1 所示。

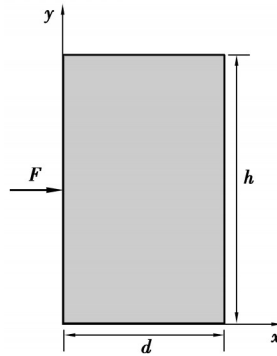


图 1 集中载荷冲击下的矩形平板

Fig. 1 Rectangular plate under concentrated load impact

图 1 中 x 方向和 y 方向为板的宽度和高度, z 方向垂直于纸面向外且假定为无限长度。在此问题中,集中力加载下,区域内应力波波阵面呈柱面。在此弹性柱面波的传播过程中,考虑到弹性波的性质,其能量不耗散,随着波的传播过程,波的范围变广,应力、应变以及能量的幅值会有所降低,即存在几何弥散现象,这里着眼于主波和次波的波速的讨论,故对于能量的分布不展开讨论。考虑到载荷沿 z 方向上是分布均匀的,沿 z 方向取不同截面时,其应变状态也相同,所以截面中应变只与 x 、 y 的位置有关,即所有应变分量都是 x 、 y 的函数,含有 z 的偏应变分量为 0,而 z 方向上存在应变,且均匀分布,针对该问题,应变状态可做如下分解:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & 0 \\ e_{xy} & e_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & e_{zz} \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta \end{pmatrix}. \quad (21)$$

由于偏应变张量的迹为零,故偏应变分量中只有 3 个分量是独立的,式(17)(20)简化可得区域内二维应力波波动方程:

$$(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad (22)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial t^2} + (\lambda + \mu) \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right), \quad (23)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial y^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial t^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right), \quad (24)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial y^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial t^2} + (\lambda + \mu) \left(-\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \right). \quad (25)$$

式(22)描述独立传播的体积应变;式(23)~(25)描述偏应变的演化方式,该偏应变分为与体积应变共同运动和独立传播的两部分。由于 $e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = 0$,且 z 方向垂直平面向外,故不再罗列以 e_{zz} 为变量的波动方程。要对区域内的波动方程进行求解,还需建立边界上的波动条件。接下来描述如何建立加载面和不同自由面上的波动边界条件。

2.2 加载面的波动条件

应力波在结构中传播时遇到界面会发生反射现象。针对应力波在上下侧面和右侧自由面上的反射现象

进行研究,首先将波阵面视为间断面的运动,得到间断面前后材料密度、质点运动速度、波速、应力等物理量的关系^[24]:

$$f_i = -\rho c v_i, \quad (26)$$

式中: ρ 代表材料密度, v 代表质点运动速度, c 表示波阵面的传播速度, ρc 表示波阻抗,静水压力波阻抗的波速为 c_1 ,加载面激发应变的瞬间假定偏应变未发生分离,则偏应力波阻抗的波速 c_2 。式(26)分量形式为:

$$P = -\rho c_1 v_P, \quad (27)$$

$$S_{xx} = -\rho c_2 v_{S1}, \quad (28)$$

$$S_{xy} = -\rho c_2 v_{S2}, \quad (29)$$

$$S_{yy} = -\rho c_2 v_{S3}. \quad (30)$$

根据加载面上的力和速度的平衡关系,以正撞为例, y 方向外力 f_y 为零则可以得到:

$$f_x(t) = P + S_{xx}, \quad v(t) = v_P + v_{S1}. \quad (31)$$

联立方程本构关系式(12)~(14)与式(27)~(31)得到加载面上的体积应变和偏应变关于加载的力和速度的边界条件:

$$\theta(t) = \frac{[f_x(t) + \rho c_2 v(t)] c_1}{\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)(c_1 - c_2)}, \quad (32)$$

$$e_{xx}(t) = \frac{[f_x(t) + \rho c_1 v(t)] c_2}{2\mu(c_2 - c_1)}, \quad (33)$$

$$e_{xy} = \frac{F_y}{2\mu} = 0, \quad e_{yy} = 0. \quad (34)$$

只要测得加载面上加载的力和速度,即可通过式(32)~(34)得到加载面激发的应力波的应变值,接下来建立在上下侧面和右侧自由面的波动边界条件。

2.3 上下侧自由面的波动条件

分别建立如图2所示的上下侧面边界和右侧边界的波动边界条件。应力波到达自由面会发生发射,激发新的主波和次波,令自由面上反射的应力为 P' 、 S'_{xx} 、 S'_{xy} 、 S'_{yy} ;自由面反射的应变为 θ' 、 e'_{xx} 、 e'_{xy} 、 e'_{yy} 。 v_x 、 v_y 表示质点分别在 x 、 y 方向的速度。图2(a)为应力波在右侧自由面边界反射模型,波入射角为 α ;图2(b)为应力波在上下侧面边界反射模型,此时波入射角为 β ,由于结构的对称性,上下边界的波反射类似,以上边界为例推导波反射的边界条件。

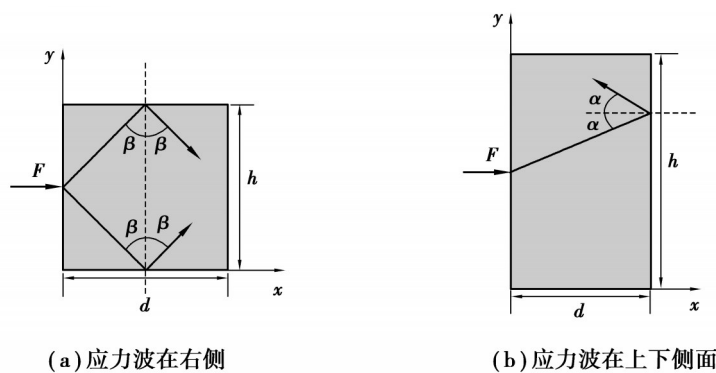


图2 应力波在平板右侧和上下侧自由面的入射与反射

Fig. 2 Model of stress wave reflection of rectangular area under local impact

当主波到达上下侧面时,应力波作用在自由面上的应力为:

$$\sigma_{xx} = P + S_{xx}, \quad \sigma_{xy} = S_{xy}, \quad \sigma_{yy} = P + S_{yy}; \quad (35)$$

当应力波到达上下侧面边界时,入射波阵面和反射波阵面的法线为:

$$\mathbf{n} = \sin \beta \mathbf{e}_1 + \cos \beta \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n}' = \sin \beta \mathbf{e}_1 - \cos \beta \mathbf{e}_2. \quad (36)$$

x 方向和 y 方向入射应力的合力为:

$$f_x = -\rho c_1 v_x = \sin \beta \sigma_{xx} + \cos \beta \sigma_{xy}, \quad (37)$$

$$f_y = -\rho c_1 v_y = \sin \beta \sigma_{xy} + \cos \beta \sigma_{yy}. \quad (38)$$

x 方向和 y 方向静水应力和偏应力为:

$$f_x^P = -\rho c_1 v_x^P = \sin \beta P', \quad (39)$$

$$f_y^P = -\rho c_1 v_y^P = -\cos \beta P', \quad (40)$$

$$f_x^S = -\rho c_1 v_x^S = \sin \beta S'_{xx} - \cos \beta S'_{xy}, \quad (41)$$

$$f_y^S = -\rho c_1 v_y^S = \sin \beta S'_{xy} - \cos \beta S'_{yy}. \quad (42)$$

x 方向和 y 方向入射应力与反射应力平衡, 即:

$$\sigma_{xy} + S'_{xy} = 0, \sigma_{yy} + P' + S'_{yy} = 0. \quad (43)$$

由式(38)~(43)可得波阵面上应力与质点速度的关系:

$$\bar{v}_x = v_x + v_x^P + v_x^S = -\frac{\sin \beta \sigma_{xx} + \cos \beta \sigma_{xy}}{\rho c_1} - \frac{\sin \beta P'}{\rho c_1} - \frac{\sin \beta S'_{xx} - \cos \beta S'_{xy}}{\rho c_2}, \quad (44)$$

$$\bar{v}_y = v_y + v_y^P + v_y^S = -\frac{\sin \beta \sigma_{xy} + \cos \beta \sigma_{yy}}{\rho c_1} + \frac{\sin \beta P'}{\rho c_1} - \frac{\sin \beta S'_{xy} - \cos \beta S'_{yy}}{\rho c_2}. \quad (45)$$

式(43)~(45)为侧面边界上应力波反射的力和速度的边界条件, 改写成以 P'_{xx} 、 S'_{xy} 、 S'_{yy} 为待求变量的形式:

$$P' = -(\sigma_{yy} + S'_{yy}), \quad (46)$$

$$S'_{xy} = -\sigma_{xy}, \quad (47)$$

$$S'_{xx} = \frac{1}{-c_1 \sin \beta} [\rho c_1 c_2 v_x + c_2 (\sin \beta \sigma_{xx} + \cos \beta \sigma_{xy}) - c_2 \sin \beta \sigma_{yy} + c_1 \cos \beta \sigma_{xy}], \quad (48)$$

$$S'_{yy} = \frac{1}{(c_1 - c_2) \cos \beta} [\rho c_1 c_2 v_y + c_2 (\sin \beta \sigma_{xy} + \cos \beta \sigma_{yy}) + c_2 \cos \beta \sigma_{yy} - c_1 \sin \beta \sigma_{xy}]. \quad (49)$$

由本构关系可得到反射波在边界上的应变值:

$$\theta' = \frac{P'}{\lambda + \frac{2}{3} \mu}, \quad (50)$$

$$e_{ij} = \frac{S_{ij}}{2\mu}. \quad (51)$$

以上为矩形区域上下侧面波动边界条件的推导。

2.4 右侧自由面的波动条件

由入射应力与反射应力的守恒可得:

$$\sigma_{xy} + S'_{xy} = 0, \quad \sigma_{xx} + P' + S'_{xx} = 0, \quad (52)$$

入射阵面与反射阵面的法线分别为:

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n}' = -\cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2. \quad (53)$$

x 方向和 y 方向入射应力为:

$$f_x = -\rho c_1 v_x = \cos \alpha \sigma_{xx} + \sin \alpha \sigma_{xy}, \quad (54)$$

$$f_y = -\rho c_1 v_y = \cos \alpha \sigma_{xy} + \sin \alpha \sigma_{yy}. \quad (55)$$

x 方向和 y 方向静水应力和偏应力为:

$$f_x^P = -\rho c_1 v_x^P = -\cos \alpha P', \quad (56)$$

$$f_y^P = -\rho c_1 v_y^P = \sin \alpha P', \quad (57)$$

$$f_x^S = -\rho c_1 v_x^S = -\cos \alpha S'_{xx} + \sin \alpha S'_{xy}, \quad (58)$$

$$f_y^S = -\rho c_1 v_y^S = -\cos \alpha S'_{xy} + \sin \alpha S'_{yy}. \quad (59)$$

由入射阵面和反射阵面上应力与速度的关系可得:

$$\bar{v}_x = v_x + v_x^P + v_x^S = -\frac{\cos \alpha \sigma_{xx} + \sin \alpha \sigma_{xy}}{\rho c_1} + \frac{\cos \alpha P'}{\rho c_1} - \frac{\cos \alpha S'_{xx} + \sin \alpha S'_{xy}}{\rho c_2}, \quad (60)$$

$$\bar{v}_y = v_y + v_y^p + v_y^s = -\frac{\cos \alpha \sigma_{xy} + \sin \alpha \sigma_{yy}}{\rho c_1} - \frac{\sin \alpha P'}{\rho c_1} - \frac{-\cos \alpha S'_{xy} + \sin \alpha S'_{yy}}{\rho c_2} \quad (61)$$

式(52)(60)(61)为右侧自由面边界上应力波反射的力和速度的边界条件,改写成以 P' 、 S'_{xx} 、 S'_{xy} 、 S'_{yy} 为待求变量的形式:

$$P' = -(\sigma_{xx} + S'_{xx}), \quad (62)$$

$$S'_{xy} = -\sigma_{xy}, \quad (63)$$

$$S'_{xx} = \frac{1}{(c_1 - c_2) \cos \alpha} [\rho c_1 c_2 v_x + c_2 (\cos \alpha \sigma_{xx} + \sin \alpha \sigma_{xy}) + c_2 \cos \alpha \sigma_{xx} - c_1 \sin \alpha \sigma_{xy}], \quad (64)$$

$$S'_{yy} = \frac{1}{-c_1 \sin \alpha} [\rho c_1 c_2 v_y + c_2 (\cos \alpha \sigma_{xy} + \sin \alpha \sigma_{yy}) - c_2 \sin \alpha \sigma_{yy} + c_1 \cos \alpha \sigma_{xy}]. \quad (65)$$

由本构关系可得到反射波在边界上的应变值:

$$\theta' = \frac{P'}{\lambda + \frac{2}{3}\mu}, \quad (66)$$

$$e_{ij} = \frac{S_{ij}}{2\mu}. \quad (67)$$

以上为矩形区域右侧面波动边界条件的推导。

3 波动变量的迭代形式

体积应变和偏应变张量表示为 $\theta(x,y,t)$ 、 $e_x(x,y,t)$ 、 $e_y(x,y,t)$ 、 $e_z(x,y,t)$ 其中 x,y 表示的为几何模型中的位置, t 表示的为某一时刻。空间中网格如图3所示。

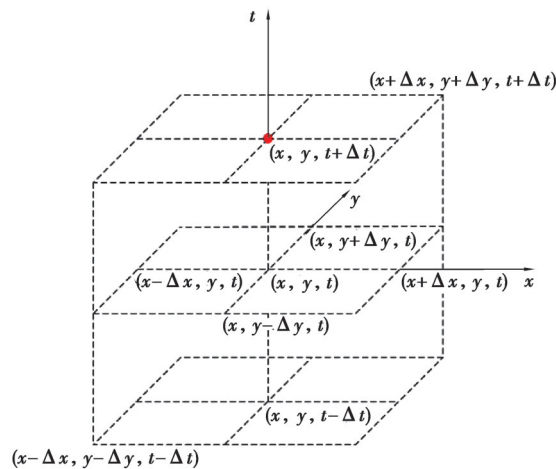


图3 时间和空间差分网格

Fig. 3 Differential mesh of time and space

图3中红点表示待求点。求解二维的波动方程形变波在 x,y 方向的分量和体积波用到这7个点,需要注意的是偏应变在 x,y 方向分量时需要多用到当前时刻(t)所在平面的四个角点的值。以体积应变为例,对二维体积应变进行泰勒级数展开:

$$\theta_{(x+\Delta x, y, t)} = \theta_{(x, y, t)} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{(x, y, t)} \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)_{(x, y, t)} (\Delta x)^2 + \dots, \quad (68)$$

$$\theta_{(x-\Delta x, y, t)} = \theta_{(x, y, t)} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{(x, y, t)} \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)_{(x, y, t)} (\Delta x)^2 + \dots \quad (69)$$

式(68)减式(69)可得:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}_{(x, y, t)} = \frac{\theta_{(x+\Delta x, y, t)} - \theta_{(x-\Delta x, y, t)}}{2\Delta x}; \quad (70)$$

式(68)加式(69)可得:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}_{(x,y,t)} = \frac{\theta_{(x+\Delta x,y,t)} - 2\theta_{(x,y,t)} + \theta_{(x-\Delta x,y,t)}}{\Delta x^2}. \quad (71)$$

同理可得:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}_{(x,y,t)} = \frac{\theta_{(x,y+\Delta y,t)} - \theta_{(x,y-\Delta y,t)}}{2\Delta y}, \quad (72)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}_{(x,y,t)} = \frac{\theta_{(x,y+\Delta y,t)} - 2\theta_{(x,y,t)} + \theta_{(x,y-\Delta y,t)}}{\Delta y^2}, \quad (73)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}_{(x,y,t)} = \frac{\theta_{(x,y,t+\Delta t)} - \theta_{(x,y,t-\Delta t)}}{2\Delta t}, \quad (74)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}_{(x,y,t)} = \frac{\theta_{(x,y,t+\Delta t)} - 2\theta_{(x,y,t)} + \theta_{(x,y,t-\Delta t)}}{\Delta t^2}, \quad (75)$$

$$\frac{\partial e}{\partial x}_{(x,y,t)} = \frac{e_{(x+\Delta x,y,t)} - e_{(x-\Delta x,y,t)}}{2\Delta x}, \quad (76)$$

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}_{(x,y,t)} = \frac{e_{(x+\Delta x,y,t)} - 2e_{(x,y,t)} + e_{(x-\Delta x,y,t)}}{\Delta x^2}, \quad (77)$$

$$\frac{\partial e}{\partial y}_{(x,y,t)} = \frac{e_{(x,y+\Delta y,t)} - e_{(x,y-\Delta y,t)}}{2\Delta y}, \quad (78)$$

$$\frac{\partial^2 e}{\partial y^2}_{(x,y,t)} = \frac{e_{(x,y+\Delta y,t)} - 2e_{(x,y,t)} + e_{(x,y-\Delta y,t)}}{\Delta y^2}, \quad (79)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t}_{(x,y,t)} = \frac{e_{(x,y,t+\Delta t)} - e_{(x,y,t-\Delta t)}}{2\Delta t}, \quad (80)$$

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}_{(x,y,t)} = \frac{e_{(x,y,t+\Delta t)} - 2e_{(x,y,t)} + e_{(x,y,t-\Delta t)}}{\Delta t^2}. \quad (81)$$

接下来对 $\theta_{(x+\Delta x,y+\Delta y,t)}$, $\theta_{(x-\Delta x,y+\Delta y,t)}$, $\theta_{(x+\Delta x,y-\Delta y,t)}$, $\theta_{(x-\Delta x,y-\Delta y,t)}$ 进行泰勒展开可得:

$$\theta_{(x+\Delta x,y+\Delta y,t)} = \theta_{(x,y,t)} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{(x,y,t)} \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)_{(x,y,t)} (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{(x,y,t)} \Delta y + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right)_{(x,y,t)} (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}\right)_{(x,y,t)} (\Delta x \Delta y) + \dots, \quad (82)$$

$$\theta_{(x-\Delta x,y+\Delta y,t)} = \theta_{(x,y,t)} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{(x,y,t)} \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)_{(x,y,t)} (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{(x,y,t)} \Delta y + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right)_{(x,y,t)} (\Delta y)^2 - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}\right)_{(x,y,t)} (\Delta x \Delta y) + \dots, \quad (83)$$

$$\theta_{(x+\Delta x,y-\Delta y,t)} = \theta_{(x,y,t)} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{(x,y,t)} \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)_{(x,y,t)} (\Delta x)^2 - \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{(x,y,t)} \Delta y + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right)_{(x,y,t)} (\Delta y)^2 - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}\right)_{(x,y,t)} (\Delta x \Delta y) + \dots, \quad (84)$$

$$\theta_{(x-\Delta x,y-\Delta y,t)} = \theta_{(x,y,t)} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{(x,y,t)} \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)_{(x,y,t)} (\Delta x)^2 - \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{(x,y,t)} \Delta y + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right)_{(x,y,t)} (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}\right)_{(x,y,t)} (\Delta x \Delta y) + \dots \circ \quad (85)$$

整理方程(82)~(85)可得:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}_{(x,y,t)} = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} (\theta_{(x+\Delta x,y+\Delta y,t)} - \theta_{(x-\Delta x,y+\Delta y,t)} - \theta_{(x+\Delta x,y-\Delta y,t)} + \theta_{(x-\Delta x,y-\Delta y,t)}) \circ \quad (86)$$

同样的方法可求得:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial x \partial y}_{(x,y,t)} = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} (e_{xx(x+\Delta x,y+\Delta y,t)} - e_{xx(x-\Delta x,y+\Delta y,t)} - e_{xx(x+\Delta x,y-\Delta y,t)} + e_{xx(x-\Delta x,y-\Delta y,t)}), \quad (87)$$

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x \partial y}_{(x,y,t)} = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} (e_{yy(x+\Delta x,y+\Delta y,t)} - e_{yy(x-\Delta x,y+\Delta y,t)} - e_{yy(x+\Delta x,y-\Delta y,t)} + e_{yy(x-\Delta x,y-\Delta y,t)}), \quad (88)$$

$$\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} (e_{xy(x+\Delta x, y+\Delta y, t)} - e_{xy(x-\Delta x, y+\Delta y, t)} - e_{xy(x+\Delta x, y-\Delta y, t)} + e_{xy(x-\Delta x, y-\Delta y, t)}) \quad (89)$$

将上述差分格式代入二维波动方程后可得波动方程的迭代格式:

$$\theta_{(x, y, t+\Delta t)} = 2\theta_{(x, y, t)} - \theta_{(x, y, t-\Delta t)} - \frac{c_1^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (\theta_{(x+\Delta x, y, t)} - 2\theta_{(x, y, t)} + \theta_{(x-\Delta x, y, t)}) + \frac{c_1^2 \Delta t^2}{\Delta y^2} (\theta_{(x, y+\Delta y, t)} - 2\theta_{(x, y, t)} + \theta_{(x, y-\Delta y, t)}), \quad (90)$$

$$e_{xx(x, y, t+\Delta t)} = \frac{c_2^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (e_{xx(x+\Delta x, y, t)} - 2e_{xx(x, y, t)} + e_{xx(x-\Delta x, y, t)}) + \frac{c_2^2 \Delta t^2}{\Delta y^2} (e_{xx(x, y+\Delta y, t)} - 2e_{xx(x, y, t)} + e_{xx(x, y-\Delta y, t)}) + 2e_{xx(x, y, t)} - e_{xx(x, y, t-\Delta t)} + c_2^2 \Delta t^2 \frac{\lambda + \mu}{\rho} \left(-\frac{2}{3} \frac{\theta_{(x+\Delta x, y, t)} - 2\theta_{(x, y, t)} + \theta_{(x-\Delta x, y, t)}}{\Delta x^2} + \frac{1}{3} \frac{\theta_{(x, y+\Delta y, t)} - 2\theta_{(x, y, t)} + \theta_{(x, y-\Delta y, t)}}{\Delta y^2} \right), \quad (91)$$

$$e_{yy(x, y, t+\Delta t)} = \frac{c_2^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (e_{yy(x+\Delta x, y, t)} - 2e_{yy(x, y, t)} + e_{yy(x-\Delta x, y, t)}) + \frac{c_2^2 \Delta t^2}{\Delta y^2} (e_{yy(x, y+\Delta y, t)} - 2e_{yy(x, y, t)} + e_{yy(x, y-\Delta y, t)}) + 2e_{yy(x, y, t)} - e_{yy(x, y, t-\Delta t)} + c_2^2 \Delta t^2 \frac{\lambda + \mu}{\rho} \left(\frac{1}{3} \frac{\theta_{(x+\Delta x, y, t)} - 2\theta_{(x, y, t)} + \theta_{(x-\Delta x, y, t)}}{\Delta x^2} - \frac{2}{3} \frac{\theta_{(x, y+\Delta y, t)} - 2\theta_{(x, y, t)} + \theta_{(x, y-\Delta y, t)}}{\Delta y^2} \right), \quad (92)$$

$$e_{xy(x, y, t+\Delta t)} = \frac{c_2^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (e_{xy(x+\Delta x, y, t)} - 2e_{xy(x, y, t)} + e_{xy(x-\Delta x, y, t)}) + \frac{c_2^2 \Delta t^2}{\Delta y^2} (e_{xy(x, y+\Delta y, t)} - 2e_{xy(x, y, t)} + e_{xy(x, y-\Delta y, t)}) + 2e_{xy(x, y, t)} - e_{xy(x, y, t-\Delta t)} + c_2^2 \Delta t^2 \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{1}{4\Delta x \Delta y} (\theta_{(x+\Delta x, y+\Delta y, t)} - \theta_{(x-\Delta x, y+\Delta y, t)} - \theta_{(x+\Delta x, y-\Delta y, t)} + \theta_{(x-\Delta x, y-\Delta y, t)}) \quad (93)$$

通过前文所述,只需要知道加载面上初始加载的力和速度,即可计算得到结构中加载面上应变的值,应力的值只需将应变通过本构关系即可求得。应力波在结构内的传播由波动方程关于时间和空间的迭代近似,通过波动方程在计算域内的循环迭代可以模拟材料内部应力波的传播。之后测得自由面上的速度,就可利用以上边界条件得到反射后的应力,再通过本构关系即可转化为应变,至此得到应力波传播和反射的完整过程。

4 冲击载荷下矩形板中主波和次波的传播和反射

根据前文得到的修正的弹性应力波理论的波动方程和边界波动条件,对厚度为0.1 m的矩形钠钙玻璃板中应力波传播和反射过程利用Matlab进行数值分析。由加载面的波动边界可知,激发的应变值与加载面载荷、加载面的质点速度、拉梅参数、密度以及应力波的波速相关。加载面速度、加载历程函数如式(94)(95)所示,波形图如图4~5所示。材料参数如表1所示,模型几何参数如表2所示。

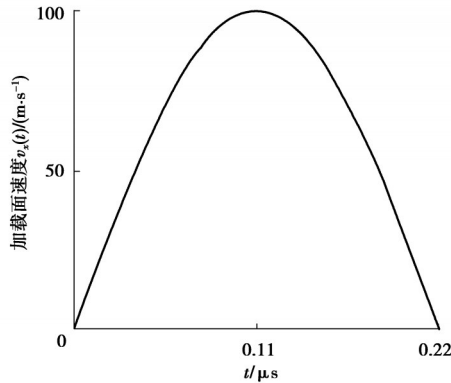


图4 加载面速度历程

Fig. 4 Change of the impact surface velocity

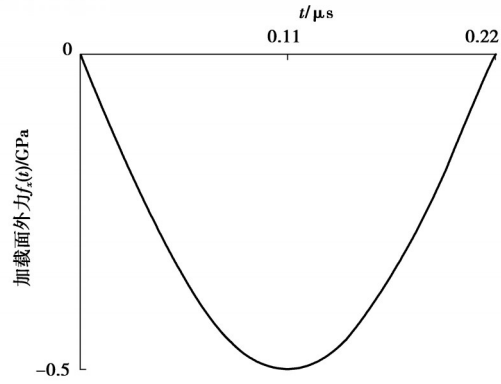


图5 加载面的加载历程

Fig. 5 Change of the impact surface loading

$$v_x(t) = \begin{cases} 100 \times \sin(\pi t \times 10^6 / 0.22) \text{ (GPa)} & 0 \leq t \leq 0.22 \times 10^{-6} \text{ s,} \\ 0 & t > 0.22 \times 10^{-6} \text{ s.} \end{cases} \quad (94)$$

$$f_x(t) = \begin{cases} -0.5 \times \sin(\pi t \times 10^6 / 0.22) \text{ (GPa)} & 0 \leq t \leq 0.22 \times 10^{-6} \text{ s,} \\ 0 & t > 0.22 \times 10^{-6} \text{ s.} \end{cases} \quad (95)$$

4.1 受冲击矩形板中应力波的传播

加载面受集中力加载,材料内部应力波传播如图6所示,为7.7 μs时的应力波波波形图。

表 1 钠钙玻璃试件材料参数

Table 1 Parameters of soda lime glass plate specimen

$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	E/GPa	ν	λ/GPa	μ/GPa	$c_1/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$c_2/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$
2 550	70	0.22	22.5	28.7	5 650	3 355

表 2 模型几何参数

Table 2 Geometric parameters of the model

dx/m	dy/m	dt/s	w/m	h/m
0.000 1	0.000 1	$dx/c_1/1.5$	0.1	0.1

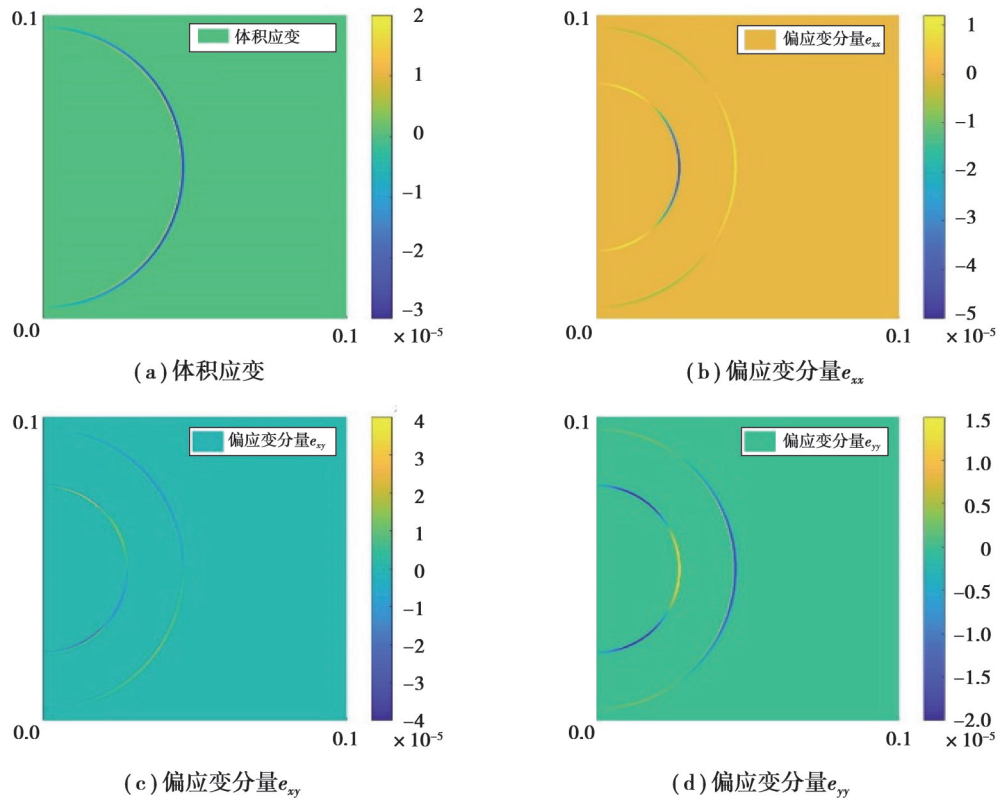


图 6 冲击加载下矩形钠钙玻璃板中的应力波传播

Fig. 6 Stress wave propagation in rectangular soda-lime glass plates under shock loading

由加载面的波动条件可知,加载面受集中力作用,会同时产生体积应变和偏应变。由应力波修正理论可知,体积应变以较快的波速独立传播,而偏应变的传播则会受到体积应变的影响。偏应变会逐渐分裂成两部分,一部分偏应变以和体积应变传播速度相同的波速共同传播,剩下的偏应变则以较慢的波速独立传播。如图所示,体积应变只有一个波阵面,分布较均匀,而偏应变分量均有两个波阵面,且较快的阵面与体积应变波阵面的位置相同。应力波的修正理论解释了已有理论中体积波的波速与剪切模量相关的原因,即已有理论中体积波的波速实际描述的是体积应变和部分偏应变共同组成的主波的波速,体积模量对应体积应变,剪切模量对应传播较快的这部分偏应变;而已有理论中旋转波的波速,实际描述的是剩下独立传播的偏应变形成的次波的波速,显然偏应变对应着剪切模量,故波速只与剪切模量相关。图中 e_{xx} 、 e_{yy} 关于 $y=0.05\text{ m}$ 呈对称分布, e_{xy} 关于 $y=0.05\text{ m}$ 呈反对称分布,且随体积波共同传播的部分较少,剩下独立传播的部分较大。随着波的传播,应变的值也会变小,这是由于弹性应力波的能量不耗散,能量总量不变而分布的范围越光,能量越稀疏。所受冲击加载为压力,体积应变为压应变,此时波阵阵面还未到达边界。

3.2 受冲击矩形板中应力波斜入射的反射

图7为15.7 μs 时的波形图。

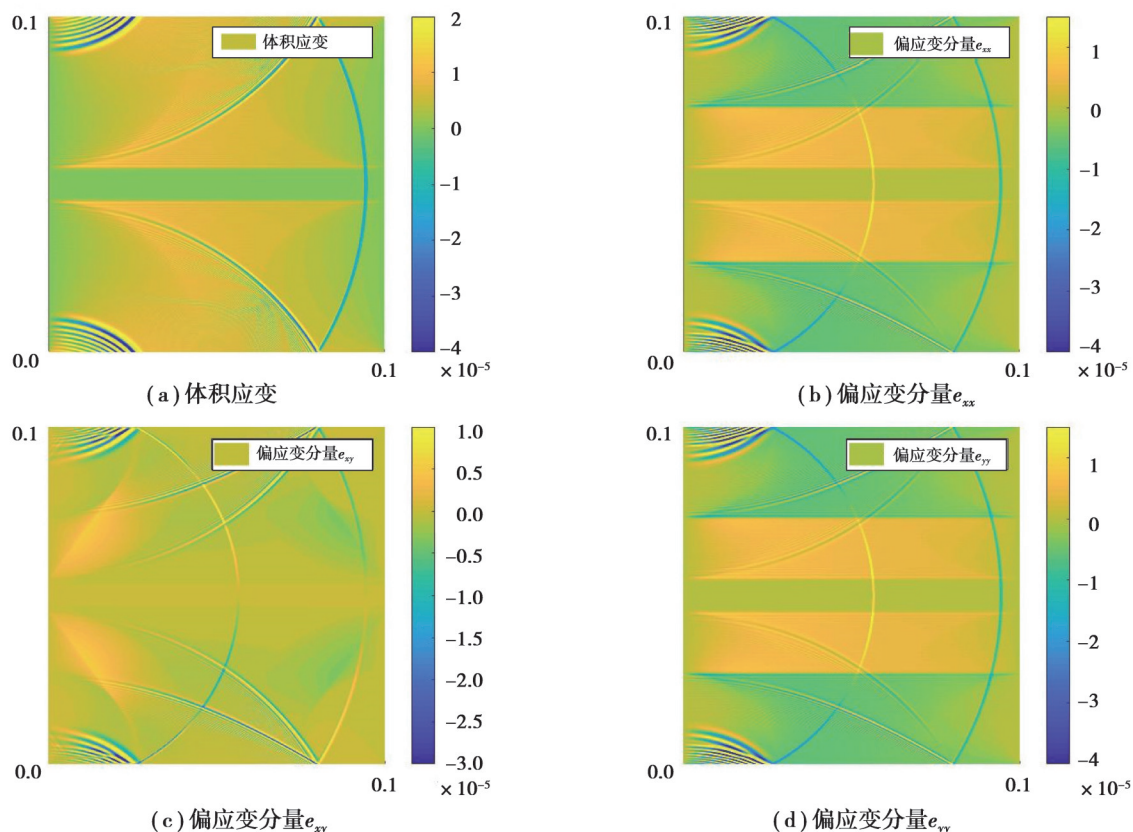


图7 冲击加载下矩形钠钙玻璃板中的应力波斜入射的反射

Fig. 7 Shock loading under the reflection of stress waves in rectangular soda-lime glass plates on the upper and lower sides

此时主波已在上下侧面边界完成了反射。由上下侧面的反射波动条件可知,当主波到达边界时,体积应变和偏应变由本构关系转化为静水压力和偏应力,作为在边界上加载的力,静水压力和偏应力均在边界上激发出体积应变和偏应变。同时体积应变和部分偏应变形成反射后的主波,而剩余偏应变独立传播形成反射后的次波。观察体积波的波形图,主波波速较快,先到达边界并完成反射,对于体积应变而言依旧是一个入射波一个反射波。对于各个偏应变分量而言,入射的主波中的偏应变到达边界后完成反射,反射后的体积应变和部分偏应变随反射后的主波共同传播,而剩下的偏应变则以较慢的波速形成反射后的次波,而次波并未完成反射,故波形为两个入射波阵面两个反射波阵面,且反射波的波形已经明显分离。

在 Grujicic 等^[22]的冲击实验结果如图8所示,冲击实验得到的7.7 μs 波形图有2个波,且波速较快的波阵面快要到达边界。15.7 μs 时的波形图显示波速较快的波到达侧面边界并发生了反射,而波速较慢的次波也到达边界,即将反射完成并分离出新的波形。该实验中沿着目标的中心线(在弹丸运动的传播方向上)放置了许多测量点,并记录了两个波的波前的到达力矩。从测量点之间的距离和应力波到达测量点的时间,得到平均纵向和横向应力波速度为 $v_1=(5\ 890\pm 100)$ m/s 和 $v_2=(3\ 410\pm 70)$ m/s。这些结果与实验结果(5 763 m/s 和 3 518 m/s)以及使用材料参数所计算的理论速度(分别为 5 598 m/s 和 3 355 m/s)获得的结果吻合。冲击加载下矩形钠钙玻璃板中的应力波反射的数值模拟与之相符。

3.3 受冲击钠钙玻璃板应力波在右侧面的反射

为了更好的体体现在右侧面上的应力波反射,即应力波到达右侧边界时还远未到达上下侧面边界,故模型在保持宽度为0.1 m的同时高度选取为0.3 m。由于7.7 μs 时应力波还未到达边界,显示的波形不再重复,直接展示15.7 μs 时应力波在右侧边界反射形成的波形图,如图9所示。

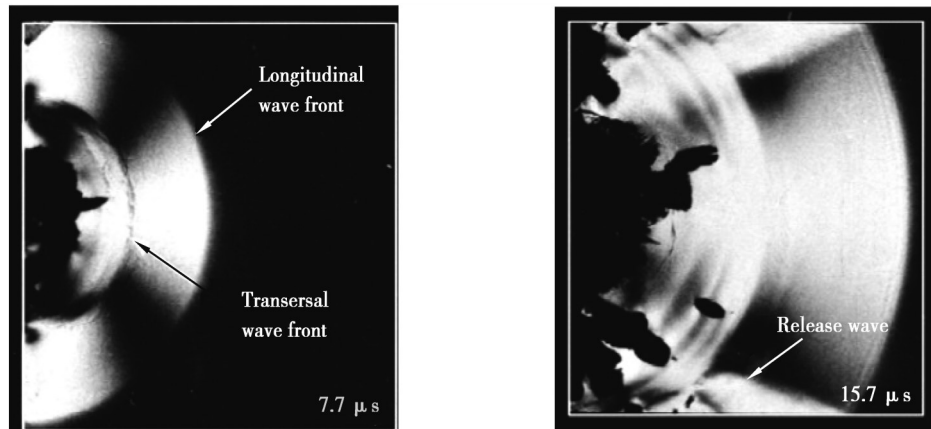
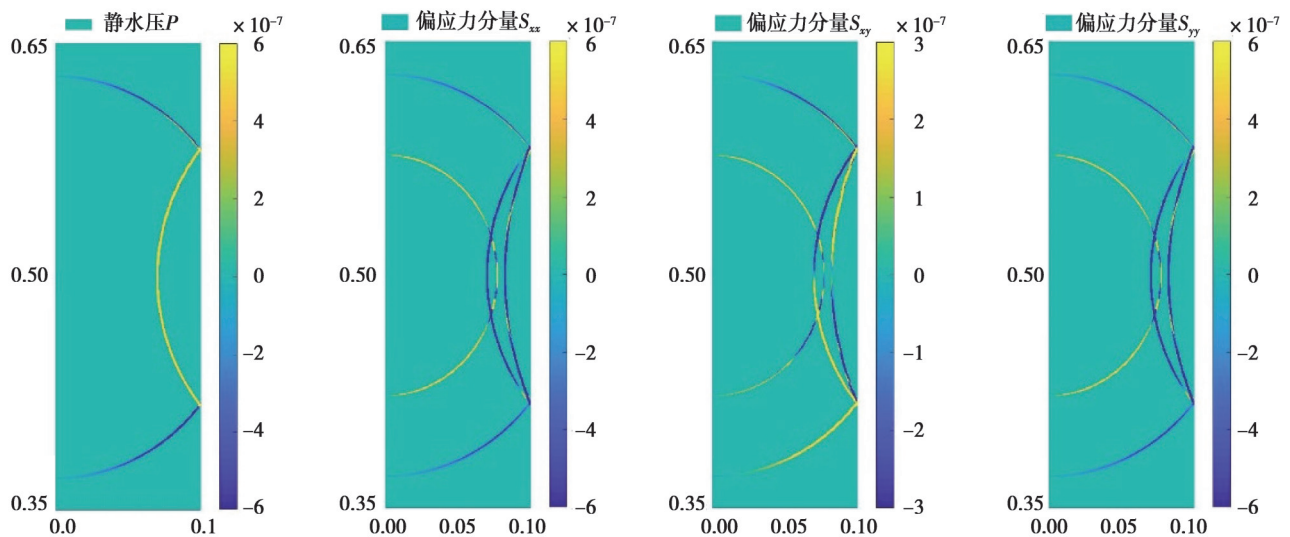
图 8 冲击加载下的钠钙玻璃中应力波的传播与反射^[22]Fig. 8 Propagation and reflection of stress waves in soda-lime glass under shock loading^[22]

图 9 冲击加载下矩形钠钙玻璃板中的应力波在右侧面的反射

Fig. 9 Stress wave reflection at the right boundaries under concentrated force impact

如图所示,此时主波已在右侧面边界完成了反射。以 c_1 为波速的主波传播速度较快,先到达右侧边界完成反射,次波波速较慢还未到达边界。由右侧面波动条件可知,主波在自由面反射形成新的主波和次波。

4 结 论

全文基于修正的应力波理论,对传统应力波理论中体积波的波速、波动变量、波动方程等进行了分析。针对平板的冲击问题建立了二维坐标系下的波动方程以及波动边界条件。

通过有限差分法数值模拟了受冲击矩形钠钙玻璃平板中主波和次波的传播与在边界上的反射。主波包含全部的体积应变和部分偏应变以波速 c_1 向前传播直到到达自由面反射两个结构相同的波。次波包含了剩下的全部偏应变以波速 c_2 传播较慢,并且在碰到自由面后也会反射 2 个结构相同的反射波。说明修正的弹性应力波方程是合理的,对波动边界条件的建立与对应力波在边界上的反射的描述是可行的。修正的弹性应力波理论值得进一步的研究与验证。

参考文献

- [1] 吴点宇,李鑫,张小刚,等. 观察探测装置用透明装甲材料的设计研究[J]. 兵器材料科学与工程, 2022, 45(4): 75-79.
Wu D Y, Li X, Zhang X G, et al. Design of transparent armor materials for observation and detection device[J]. Ordnance Material Science and Engineering, 2022, 45(4): 75-79.(in Chinese)
- [2] McCauley J W, Strassburger E, Patel P, et al. Experimental observations on dynamic response of selected transparent armor materials[J]. Experimental Mechanics, 2013, 53(1): 3-29.

- [3] 金键, 侯海量, 吴梵, 等. 战斗部近炸下防护液舱破坏机理分析[J]. 国防科技大学学报, 2019, 41(2): 163-169.
Jin J, Hou H L, Wu F, et al. Analysis of failure mechanism on protective liquid cabin under warhead close explosion[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2019, 41(2): 163-169. (in Chinese)
- [4] 冯爱新, 聂贵锋, 薛伟, 等. 2024 铝合金薄板激光冲击波加载的实验研究[J]. 金属学报, 2012, 48(2): 205-210.
Feng A X, Nie G F, Xue W, et al. Experimental research on laser shock wave loading mechanism of 2024 aluminum alloy sheet[J]. Acta Metallurgica Sinica, 2012, 48(2): 205-210. (in Chinese)
- [5] Neckel L, Hotza D, Stainer D, et al. Modelling of ballistic impact over a ceramic-metal protection system[J]. Advances in Materials Science and Engineering, 2013, 2013: 698476.
- [6] Ogawa K. Impact friction test method by applying stress wave[J]. Experimental Mechanics, 1997, 37(4): 398-402.
- [7] 余同希, 邱信明. 冲击动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2011.
Yu T X, Qiu X M. Impact dynamics[M]. 2nd edition. Beijing: Tsinghua University Press, 2011. (in Chinese)
- [8] Ibragimov N H, Ibragimov R N. Applications of lie group analysis in geophysical fluid dynamics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2011.
- [9] 吴家龙. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
Wu J L. Elasticity[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001. (in Chinese)
- [10] 王礼立. 应力波基础[M]. 2版. 北京: 国防工业出版社, 2005.
Wang L L. Foundation of stress waves[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2005. (in Chinese)
- [11] Achenbach J D. Wave propagation in elastic solids[M]. Amsterdam: Elsevier, 1973.
- [12] Graff K F. Wave motion in elastic solid[M]. New York: Dover Publications, Inc., 1975.
- [13] Meyers M. Dynamic behavior of materials[M]. John Wiley & Sons, 1994.
- [14] Kolsky H. Stress waves in solids[M]. Courier Corporation, 1963.
- [15] 黄克智, 薛明德, 陆明万. 张量分析[M]. 3版. 北京: 清华大学出版社, 2020.
Huang K Z, Xue M D, Lu M W. Tensor analysis[M]. 3rd edition. Beijing: Tsinghua University Press, 2020. (in Chinese)
- [16] 颜世军, 刘占芳. 修正的偶应力线弹性理论及广义线弹性体的有限元方法[J]. 固体力学学报, 2012, 33(3): 279-287.
Yan S J, Liu Z F. A modified couple stress linear elasticity and finite element method for generalized elastic bodies[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2012, 33(3): 279-287. (in Chinese)
- [17] Liua Z F, Fu Z. Scale effects of the stress symmetry in generalized elasticity[J]. International Journal of Aerospace and Lightweight Structures (IJALS), 2013, 4(4): 509.
- [18] Antoun T, Curran D R, Sergey V, et al. Spall fracture[M]. New York: Springer, 2002.
- [19] Mikhailova N V, Petrov Y V. Effect of impact time parameters on the dynamic strength in spall fracture[J]. Physical Mesomechanics, 2021, 24(1): 9-13.
- [20] 刘占芳, 冯晓伟, 张凯, 等. 氧化铝陶瓷动态压缩强度的高压和高应变率效应[J]. 功能材料, 2010, 41(12): 2087-2090.
Liu Z F, Feng X W, Zhang K, et al. Effects of high pressure and high strain rate on dynamic compressive strength of alumina[J]. Journal of Functional Materials, 2010, 41(12): 2087-2090. (in Chinese)
- [21] 刘占芳, 常敬臻, 唐录成, 等. 平面冲击波压缩下氧化铝陶瓷的动态强度[J]. 高压物理学报, 2007, 21(2): 129-135.
Liu Z F, Chang J Z, Tang L C, et al. Dynamic strength of alumina under plane shock waves[J]. Chinese Journal of High Pressure Physics, 2007, 21(2): 129-135. (in Chinese)
- [22] Grujicic M, Pandurangan B, Coutris N, et al. A simple ballistic material model for soda-lime glass[J]. International Journal of Impact Engineering, 2009, 36(3): 386-401.
- [23] Kawai N, Zama S, Takemoto W, et al. Stress wave and damage propagation in transparent materials subjected to hypervelocity impact[J]. Procedia Engineering, 2015, 103: 287-293.
- [24] 范镜泓, 高芝晖. 非线性连续介质力学基础[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1987.
Fan J H, Gao Z H. Fundamentals of nonlinear continuum mechanics[M]. Chongqing: Chongqing University Press, 1987. (in Chinese)
- [25] 刘占芳, 郭原, 唐少强, 等. 弹性应力波的双脉冲结构与平板冲击试验验证[J]. 应用数学和力学, 2018, 39(3): 249-265.
Liu Z F, Guo Y, Tang S Q, et al. Dual pulse wave structure of elastic stress waves and plate impact verification[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2018, 39(3): 249-265. (in Chinese)

(编辑 郑洁)