

doi: 10.11835/j.issn.1000-582X.2023.255

## 非均质物理双摆的混沌特性研究

孔令辉<sup>1a</sup>, 刘丁杨<sup>2</sup>, 蹇开林<sup>1a,1b</sup>

(1. 重庆大学 a. 航空航天学院; b. 非均质材料力学重庆市重点实验室, 重庆 400044;  
2. 中国船舶集团海装风电股份有限公司, 重庆 401122)

**摘要:**为了解决工程实际中材料质量不均匀分布对双摆系统运动的影响,在均质物理双摆模型的基础上,将摆的质心位置和摆的转动惯量提取为变量,建立非均质双摆模型。将非均质双摆系统由 Hamilton 系统近似为拟 Hamilton 系统,运用双自由度的 Melnikov 法,得到拟 Hamilton 系统存在 Smale 马蹄意义下混沌的能量阈值,以此作为 Hamilton 系统的混沌条件。利用最大 Lyapunov 指数图、分岔图、Poincaré 截面图等数值方法验证混沌条件的正确性,并详细分析了各参数对系统运动状态的影响和作用机制。结果表明,非均质双摆的混沌阈值有较高复杂性,而且摆长、摆重、第一摆的质心位置同时影响着系统的能量与混沌阈值,解释了质心位置和转动惯量等参数发生变化时,系统在混沌和拟周期之间交替变换的原因。进一步研究了参数取值与 Melnikov 法适用性之间的关系,通过数值仿真分类讨论了 Melnikov 法不适用时的参数取值情况。

**关键词:**非均质物理双摆;混沌;拟周期;Melnikov 法

中图分类号:O322

文献标志码:A

文章编号:1000-582X(2024)02-106-13

## Study on chaotic characteristics of heterogeneous physical double pendulum

KONG Linghui<sup>1a</sup>, LIU Dingyang<sup>2</sup>, JIAN Kailin<sup>1a,1b</sup>

(1a. School of Aeronautics and Astronautics; 1b. Chongqing Key Laboratory of Heterogeneous Material Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China; 2. CSSC Haizhuang Windpower Co., Ltd., Chongqing 401122, P. R. China)

**Abstract:** To address the impact of materials with uneven mass distribution on the motion of double pendulum systems in engineering practice, a heterogeneous double pendulum model was established based on the homogeneous physical double pendulum model. This model incorporated variables, such as the position of the center of mass and the moment of inertia of the pendulum. To further explore the chaotic characteristics of the system, the heterogeneous double pendulum system was approximated from a Hamilton system to a quasi-Hamilton system. The dynamics equation of the double pendulum system was obtained using the Euler-Lagrange equation of the second kind. The energy threshold for Smale horseshoe chaos in the quasi-Hamiltonian system was determined using Melnikov method with two degrees of freedom, serving as the chaos condition for the Hamiltonian system. Through programming in Matlab, the correctness of the chaos condition was verified using numerical methods such as maximum Lyapunov exponential diagram, bifurcation diagram and Poincare section

收稿日期:2022-12-25 网络出版日期:2023-06-27

作者简介:孔令辉(1999—),男,硕士研究生,主要从事非线性振动方面的研究,(E-mail)klhcumtb@163.com。

通信作者:蹇开林,男,教授,博士生导师,(E-mail)cqjian@cqu.edu.cn。

diagram. The influence of each parameter on the system's motion state and action mechanism was analyzed in detail. The results show that the chaos threshold of heterogeneous double pendulums depends on various factors, including the initial energy of the double pendulums, the position of the center of mass of the first pendulums and the ratio of the moment of inertia of the two pendulums. With different values for each parameter, the system changes from a regular motion state with a chaos threshold to an irregular and complex motion state without a chaos threshold. The reasons for the system alternating between chaotic and quasi-periodic states were explained, and theoretical predictions were validated. The differences between the theoretical threshold and actual numerical simulation results were explained when the center of mass of the first pendulum, the mass ratio of the two pendulums, and the ratio of moment of inertia of the two pendulums were set to their limit values. On this basis, the relationship between parameter values and the applicability of Melnikov method were further explored, and the parameters under which Melnikov method was no longer applicable were discussed by numerical simulation classification.

**Keywords:** heterogeneous physical double pendulum; chaos; quasi-period; Melnikov method

双摆广泛地应用于生活、工程与科学中。生活中,人的身体摆动<sup>[1]</sup>、高尔夫球挥杆<sup>[2]</sup>与网球挥拍<sup>[3]</sup>等常见动作以及工程上的机械臂<sup>[4]</sup>、机械足<sup>[5]</sup>、各种类型的起重机<sup>[6-8]</sup>、隔振器<sup>[9]</sup>、能量收集装置<sup>[10]</sup>都可以简化为双摆模型。在科学上,范洪义等<sup>[11]</sup>通过摆、小车和弹簧的互相牵制效应研究了量子纠缠的经典类比问题。陈汉军等<sup>[12]</sup>通过对双物理摆混沌结果的研究,给一种新型振动机的参数设计提供了理论依据。Ford等<sup>[13]</sup>相信双摆作为一个简单的二自由度模型,很适用于测试量子力学能否描述经典混沌系统的观测实验,对经典混沌的量子对应研究意义重大。因此,双摆的混沌问题备受关注。

Stachowiak等<sup>[14]</sup>通过 Poincaré 截面图研究平面数学双摆,研究表明系统的运动状态与能量密切相关,在零能量极限时,双摆做周期运动,随着能量的增加,双摆将从周期运动转变为准周期运动,进而转变为混沌运动。赵武等<sup>[15]</sup>、刘丁杨等<sup>[16]</sup>和 Han等<sup>[17]</sup>应用 Melnikov 法研究了不同复杂摆系统的混沌阈值,并通过数值模拟加以验证。Maiti等<sup>[18]</sup>研究了旋转双摆的混沌特性,发现系统的内共振将导致混沌。Bi等<sup>[19]</sup>使用 Normal Form 理论分析了自治双摆系统在 1:1 内共振时的分岔特性,研究表明当存在周期激励时,系统会按周期倍化的道路通向混沌;没有周期激励时,参数的改变也会影响其解的稳定性。Martynyuk等<sup>[20]</sup>利用动态对称原理分析对双摆产生混沌运动的条件,证明了双摆质量比较大时,双摆存在有条件的周期性轨迹和混沌轨迹。Calvão等<sup>[21]</sup>不仅比较了分岔图、最大 Lyapunov 指数谱图、功率谱图、傅里叶变换图、时间历程图等不同方法在混沌研究中的优缺点,而且研究了两摆初始角度对双摆混沌的影响。Oiwa等<sup>[22]</sup>通过 Kosambi-Cartan-Chern 理论研究了双摆的雅可比稳定性,给出了雅可比稳定性条件,通过 Lyapunov 指数和 Poincaré 截面图,发现雅可比不稳定区域与混沌行为的开始有关。Kovacic等<sup>[23]</sup>研究了物理双摆在低能级时的非线性正则模态,通过谐波平衡法和 Lindstedt-Poincaré 法分析了系统非线性振动的情况,结合数值仿真比较 2 种方法在不同情况下的优缺点。Dudkowski等<sup>[24]</sup>通过数值方法和实验研究了具有参数激励的机械双摆,研究表明系统不规则运动的距离对参数和初始条件都非常敏感,而动态响应的特性严格依赖于激励参数。

综上所述,对于双摆大都集中在采用 Lyapunov 指数、分岔图和 Poincaré 图等数值方法研究系统的混沌性,一部分理论是在研究双摆稳定性之后,再考虑系统稳定性和混沌性的关系,少有对双摆混沌性的理论研究以及能判断系统出现混沌的理论阈值的研究。笔者考虑实际工程中材料非均质的特点,建立非均质物理双摆模型,应用二自由度 Melnikov 法<sup>[25]</sup>研究非均质双摆系统的混沌性质,从理论上得到系统的混沌阈值,更加深入地探究双摆转动惯量对混沌阈值的影响,揭示双摆系统在各参数变化下诱发能量改变来对系统运动状态产生的影响,并通过数值方法验证其正确性。

# 1 非均质物理双摆的动力学方程

图1为非均质物理双摆模型。

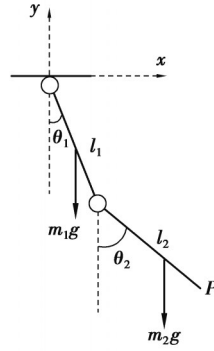


图1 非均质双摆模型

Fig. 1 A heterogeneous double pendulum model

该模型仅由2杆连接而成,假设2杆为刚性非均质直杆,建立如图1所示的平面直角坐标系,记第二摆端点为P点,其坐标表示为 $(x,y)$ ;2杆与竖直面夹角为 $\theta_1, \theta_2$ ,2杆角速度为 $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ ;杆长分别为 $l_1, l_2$ ,假定铰接到质心的距离分别为 $\frac{l_1}{k_1}, \frac{l_2}{k_2}$ ,其中 $(k_1, k_2) \in (1, +\infty)$ ;质量大小分别为 $m_1, m_2$ ,绕质心轴的转动惯量分别为 $J_1, J_2$ ;取重力加速度 $g=9.81 \text{ m/s}^2$ ,其余参数的单位与 $g$ 的单位相一致,系统总动能为

$$T = \frac{1}{2} \left( \frac{m_1}{k_1^2} + m_2 \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[ \frac{l_2^2}{k_2^2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2}{k_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]. \quad (1)$$

系统总势能为

$$V = \left( \frac{m_1}{k_1} + m_2 \right) g l_1 (1 - \cos \theta_1) + \frac{1}{k_2} m_2 g l_2 (1 - \cos \theta_2). \quad (2)$$

Euler-Lagrange第二类方程为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_g}{\partial \dot{\theta}_j} \right) - \frac{\partial L_g}{\partial \theta_j} = 0, \quad (3)$$

式中, $L_g = T - V$ ,因此,由式(3)得非均质物理双摆的微分方程组

$$\begin{cases} \left( \frac{m_1}{k_1^2} + m_2 \right) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + \left( \frac{m_1}{k_1} + m_2 \right) g l_1 \sin \theta_1 + J_1 \ddot{\theta}_1 + \frac{m_2 l_1 l_2}{k_2} \left[ \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right] = 0, \\ \frac{m_2 l_2^2}{k_2^2} \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{k_2} m_2 g l_2 \sin \theta_2 + J_2 \ddot{\theta}_2 + \frac{m_2 l_1 l_2}{k_2} \left[ \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right] = 0. \end{cases} \quad (4)$$

将式(4)化为一阶微分方程组,并令 $\frac{m_1}{m_2} = m, \frac{l_1}{k_1} = L_1, \frac{l_2}{k_2} = L_2, \frac{L_1}{L_2} = L, \frac{J_1 k_1^2}{m_1 l_1^2} = a, \frac{J_2 k_2^2}{m_2 l_2^2} = b$ ,则式(4)可以改写为式(5)。

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = w_1, \\ \dot{\theta}_2 = w_2, \\ \dot{w}_1 = \frac{(1+b) \left[ L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) w_2^2 + \left( 1 + \frac{m}{k_1} \right) g \sin \theta_1 \right] + \cos(\theta_1 - \theta_2) \left[ k_1 L_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) w_1^2 - g \sin \theta_2 \right]}{L_1 \left\{ k_1 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) - (1+b) \left[ \frac{(a+1)m}{k_1} + k_1 \right] \right\}}, \\ \dot{w}_2 = \frac{\left[ \frac{(a+1)m}{k_1^2} + 1 \right] \left( g \sin \theta_2 - k_1 L_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) w_1^2 \right) - \cos(\theta_1 - \theta_2) \left[ L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) w_2^2 + \left( 1 + \frac{m}{k_1} \right) g \sin \theta_1 \right]}{L_2 \left\{ \cos^2(\theta_1 - \theta_2) - (1+b) \left[ \frac{(a+1)m}{k_1^2} + 1 \right] \right\}}. \end{cases} \quad (5)$$

## 2 Melnikov 法分析非均质物理双摆

Melnikov 法是通过构建拟 Hamilton 系统的 Melnikov 函数来获取系统混沌阈值的解析方法。双摆系统的 Hamilton 函数就是系统的机械能函数,则双摆系统的 Hamilton 函数  $H$  可以表示为式(6)。

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{m_1}{k_1^2} + m_2 \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( \frac{l_2^2}{k_2^2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2}{k_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{k_2} m_2 g l_2 (1 - \cos \theta_2) + \left( \frac{m_1}{k_1} + m_2 \right) g l_1 (1 - \cos \theta_1). \quad (6)$$

对式(6)中的余弦项  $\cos(\theta_1 - \theta_2)$  进行放缩处理,取  $\frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)}{k_2 g}$  为  $\varepsilon_1$ ; 对  $\cos \theta_2$  进行泰勒展开有  $\cos \theta_2 = 1 - \frac{\theta_2^2}{2!} + \frac{\cos \zeta}{4!} \theta_2^4$ , 取 Lagrange 余项的常数项  $\frac{\cos(\zeta)}{24} (0 < \zeta < \theta_2)$  为  $\varepsilon_2$ , 因此式(6)化为式(7)。

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{m_1}{k_1^2} + m_2 \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{k_2} m_2 g l_2 \left( \frac{1}{2} \theta_2^2 - \varepsilon_2 \theta_2^4 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left( \frac{l_2^2}{k_2^2} \dot{\theta}_2^2 + 2\varepsilon_1 l_1 l_2 g \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) + \left( \frac{m_1}{k_1} + m_2 \right) g l_1 (1 - \cos \theta_1), \quad (7)$$

式中,  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$  都远小于 1, 可以看作微小扰动, 且  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$  数值上相差不大, 为方便计算, 统一用  $\varepsilon$  代替。因此, 拟 Hamilton 系统能量函数  $H^\varepsilon$  可整理为两相平面函数  $F_1(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ 、 $F_2(\theta_2, \dot{\theta}_2)$  与微扰函数  $H'$  的和, 如式(8)所示。

$$\begin{cases} H^\varepsilon = F_1(\theta_1, \dot{\theta}_1) + F_2(\theta_2, \dot{\theta}_2) + \varepsilon H', \\ F_1(\theta_1, \dot{\theta}_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{m_1}{k_1^2} + m_2 \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \left( \frac{m_1}{k_1} + m_2 \right) g l_1 (1 - \cos \theta_1), \\ F_2(\theta_2, \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2} \frac{m_2 l_2^2}{k_2^2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 g l_2}{k_2} \theta_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2, \\ H' = m_2 l_1 l_2 g \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{k_2} m_2 g l_2 \theta_2^4. \end{cases} \quad (8)$$

由  $F_1(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  可知, 相平面  $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  存在中心  $(0, 0)$ , 在  $\theta_1 \in (-2\pi, 2\pi)$  上有双曲鞍点  $(-\pi, 0)$ 、 $(\pi, 0)$ , 存在 2 条经过 2 点的异宿轨道, 将  $(-\pi, 0)$ 、 $(\pi, 0)$  代入  $F_1(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  得对应的 Hamilton 量为  $h_1 = 2 \left( \frac{m_1}{k_1} + m_2 \right) g l_1$ 。

引入变量  $(I, t)$ , 做如式(9)的变换  $(\theta_2, \dot{\theta}_2) \rightarrow (I, t)$ 。将式(9)分别代入式(8)的  $F_2(\theta_2, \dot{\theta}_2)$  和  $H'$  中, 得到式(10), 可见相平面  $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$  中仅存在以  $I$  为参数的周期轨道。

$$\begin{cases} \theta_2 = \sqrt{\frac{2k_2 I}{m_2 l_2 g}} \sqrt{\frac{m_2 l_2 k_2 g}{m_2 l_2^2 + k_2^2 J_2}} \sin \left( \sqrt{\frac{m_2 l_2 k_2 g}{m_2 l_2^2 + k_2^2 J_2}} t \right), \\ \dot{\theta}_2 = \sqrt{\frac{2k_2^2 I}{m_2 l_2^2 + k_2^2 J_2}} \sqrt{\frac{m_2 l_2 k_2 g}{m_2 l_2^2 + k_2^2 J_2}} \cos \left( \sqrt{\frac{m_2 l_2 k_2 g}{m_2 l_2^2 + k_2^2 J_2}} t \right), \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} F_2(\theta_2, \dot{\theta}_2) = G(I) = \sqrt{\frac{m_2 l_2 k_2 g}{m_2 l_2^2 + k_2^2 J_2}} I, \\ H' = m_2 l_1 l_2 k_2 g \dot{\theta}_1 \sqrt{\frac{2I}{m_2 l_2^2 + k_2^2 J_2}} \sqrt{\frac{m_2 l_2 k_2 g}{m_2 l_2^2 + k_2^2 J_2}} \cos \left( \sqrt{\frac{m_2 l_2 k_2 g}{m_2 l_2^2 + k_2^2 J_2}} t \right) - \frac{4k_2^2 I^2}{m_2 l_2^2 + k_2^2 J_2} \sin^4 \left( \sqrt{\frac{m_2 l_2 k_2 g}{m_2 l_2^2 + k_2^2 J_2}} t \right). \end{cases} \quad (10)$$

若令  $1 - \cos \theta_1 = \frac{1}{2} \theta_1^2 - \frac{1}{24} \theta_1^4 + o(\theta_1^6)$ , 略去 Peano 余项后代入式(8)中的  $F_1(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ , 则  $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  上的异宿轨道参数化为

$$\begin{cases} \theta_{10} = \pm \sqrt{6} \tanh \left( \sqrt{\frac{(m_1 k_1 + m_2 k_1^2) g l_1}{2((m_1 + m_2 k_1^2) l_1^2 + J_1 k_1^2)}} t \right), \\ \dot{\theta}_{10} = \pm \sqrt{\frac{3(m_1 k_1 + m_2 k_1^2) g l_1}{(m_1 + m_2 k_1^2) l_1^2 + J_1 k_1^2}} \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{\frac{(m_1 k_1 + m_2 k_1^2) g l_1}{2((m_1 + m_2 k_1^2) l_1^2 + J_1 k_1^2)}} t \right). \end{cases} \quad (11)$$

当系统的 Hamilton 量  $H < h_1$  时, 相平面  $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  的轨迹始终在式(11)所围的异宿圈上, 当系统的 Hamilton 量  $H > h_1$  时, 相平面  $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  上存在不稳定流形。稳定流形和 unstable 流形之间的距离由 Melnikov 函数<sup>[26]</sup>表示, 如式(12)所示。

$$\begin{aligned} M_{\pm}(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{F_1, H'\}(t-t_0) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial F_1}{\partial \theta_i} \frac{\partial H'}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial F_1}{\partial \dot{\theta}_i} \frac{\partial H'}{\partial \theta_i} \right) (t-t_0) dt = \\ &= 2 \frac{\left(\frac{m_1}{k_1} + m_2\right) m_2^2 l_1^2 l_2^2 k_2^2 g^2 \pi}{(m_2 l_2^2 + k_2^2 J_2)^2 (m_1 k_1 + m_2 k_1^2)} \left( (m_1 + m_2 k_1^2) l_1^2 + J_1 k_1^2 \right) \cdot \\ &\quad \sqrt{\frac{6 m_2 l_2 k_2 \left( h_1 - 2 \left( \frac{m_1}{k_1} + m_2 \right) g l_1 \right)}{(m_1 k_1 + m_2 k_1^2) l_1}} \sqrt{\left( (m_1 + m_2 k_1^2) l_1^2 + J_1 k_1^2 \right)} \cdot \\ &\quad \operatorname{csch} \left( \sqrt{\frac{m_2 l_2 k_2 \left( (m_1 + m_2 k_1^2) l_1^2 + J_1 k_1^2 \right)}{2(m_1 k_1 + m_2 k_1^2) l_1 (m_2 l_2^2 + k_2^2 J_2)}} \pi \right) \sin \left( \sqrt{\frac{m_2 l_2 k_2 g}{m_2 l_2^2 + k_2^2 J_2}} t_0 \right). \end{aligned} \quad (12)$$

由式(12)可知, Melnikov 函数为振荡型, 存在简单零点, 则 Poincaré 映射存在横截异宿点, 由 Smale-Birkhoff 同宿定理可知, 系统存在 Smale 马蹄意义下的混沌。综上可知, 当  $\varepsilon$  充分小时, 拟 Hamilton 系统在  $H \geq 2 \left( \frac{m_1}{k_1} + m_2 \right) g l_1$  的能量条件下存在横截异宿点, 系统将呈现混沌的性质。拟 Hamilton 系统在相平面  $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$  上没有不稳定流形, 也就不存在横截异宿点, 因此只需讨论存在不稳定流形的相平面  $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ 。而对于 Hamilton 系统, 相平面  $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$  上的相轨道并非纯粹的周期轨道, 可能存在不稳定流形; 不略去 Peano 余项,  $F_1(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  也无法参数化, 这些因素或多或少会影响系统的混沌性。但  $H \geq 2 \left( \frac{m_1}{k_1} + m_2 \right) g l_1$  的混沌阈值依然有一定的预测作用。

前面是在相平面  $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  上求得第 1 个混沌阈值。若对余弦项  $\cos \theta_1$  进行泰勒展开, 做变换  $(\theta_1, \dot{\theta}_1) \rightarrow (I, t)$ , 重复上述步骤, 也可以得到相似的结论: 当  $\varepsilon$  充分小时, 拟 Hamilton 系统在  $H \geq \frac{2}{k_2} m_2 g l_2$  的能量条件下存在横截同宿点; 对于 Hamilton 系统, 在  $H < \frac{2}{k_2} m_2 g l_2$  时也可能处于混沌状态。对整个系统而言, 无论在任一相平面上, 只要存在横截同宿点就意味着系统处于混沌状态, 因此双摆系统的理论混沌阈值  $H \geq \min \left\{ 2 \left( \frac{m_1}{k_1} + m_2 \right) g l_1, \frac{2}{k_2} m_2 g l_2 \right\}$ 。

### 3 数值仿真验证混沌条件

本节将通过数值方法讨论双摆系统理论混沌阈值的适用条件, 并且  $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$  特指初始时刻的系统参数。

#### 3.1 仅考虑动能的混沌条件数值模拟验证

观察 Hamilton 函数式与混沌条件  $H \geq \min \left\{ 2 \left( \frac{m_1}{k_1} + m_2 \right) g l_1, \frac{2}{k_2} m_2 g l_2 \right\}$  可知, 双摆系统的 Hamilton 量由  $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, m_1, m_2, l_1, l_2)$  8 个物理量构成, 而混沌条件仅包含  $(m_1, m_2, l_1, l_2)$ , 因此可以推测, 在  $(\theta_1, \theta_2, m_1,$

$m_2, l_1, l_2$ ) 相同的参数条件下,  $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$  越大, 越有可能超越混沌阈值。

为验证上述推测, 本节选取均质杆进行验证, 均质杆可以看作非均质杆取  $k_1 = k_2 = 2, a = b = \frac{1}{3}$  的特殊情况, 可以用来初步验证所求阈值的正确性。以  $\dot{\theta}_2$  为变量, 取  $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, m_1, m_2, l_1, l_2) = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$  代入混沌条件, 可得阈值为  $\dot{\theta}_2^2 \geq 6g$ , 即  $|\dot{\theta}_2| \geq 7.67$ , 上述条件下, 图 2 为以  $\dot{\theta}_2$  为分岔参数的分岔图, 可见当  $\dot{\theta}_2 = 0$  时, 系统始终静止, 因此分岔图以  $(0, 0)$  为中心; 图中正、负半轴近乎对称, 可见速度的方向并不会影响系统的状态; 在摆的质量确定的情况下, 速度的大小决定动能的大小, 也从侧面反映能量才是决定系统混沌与否的关键。随着  $|\dot{\theta}_2|$  不断增大, 分岔图由清晰、连续的线转变为模糊、离散的点, 但无法确定具体的混沌阈值。图 3 为上述条件下系统的 Poincaré 截面图,  $|\dot{\theta}_2| = 7.6$  时, Poincaré 截面图依然是封闭的曲线, 表现出拟周期的特征; 而  $|\dot{\theta}_2| = 7.7$  时, Poincaré 截面图已经变为杂乱无序的点, 显现混沌的特征。图 4 为  $|\dot{\theta}_2| = 7.6$  和  $|\dot{\theta}_2| = 7.7$  时的第二摆上 P 点运动轨迹图,  $|\dot{\theta}_2| = 7.6$  时运动轨迹有明显的区域范围,  $|\dot{\theta}_2| = 7.7$  时运动轨迹则杂乱无序、十分复杂, 说明由 Melnikov 法获得的混沌阈值可靠。

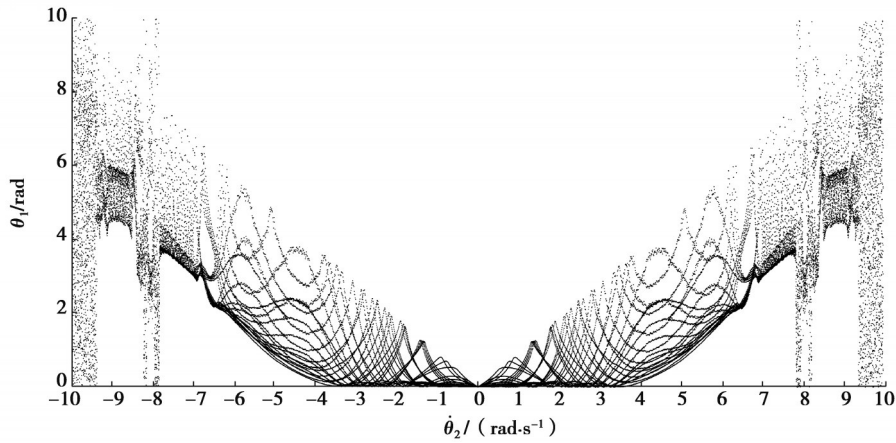


图 2 以  $\dot{\theta}_2$  为分岔参数的分岔图

Fig. 2 Bifurcation diagrams with  $\dot{\theta}_2$  as bifurcation parameter

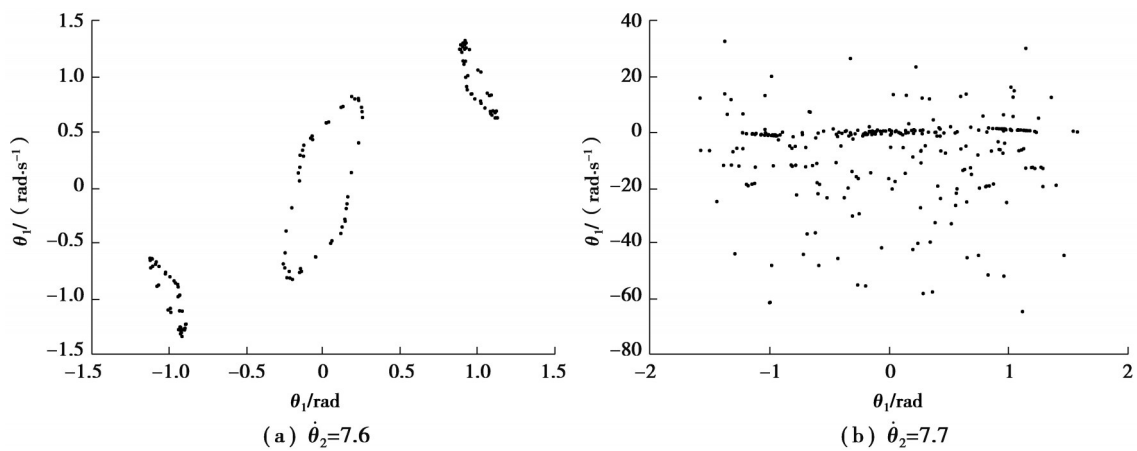
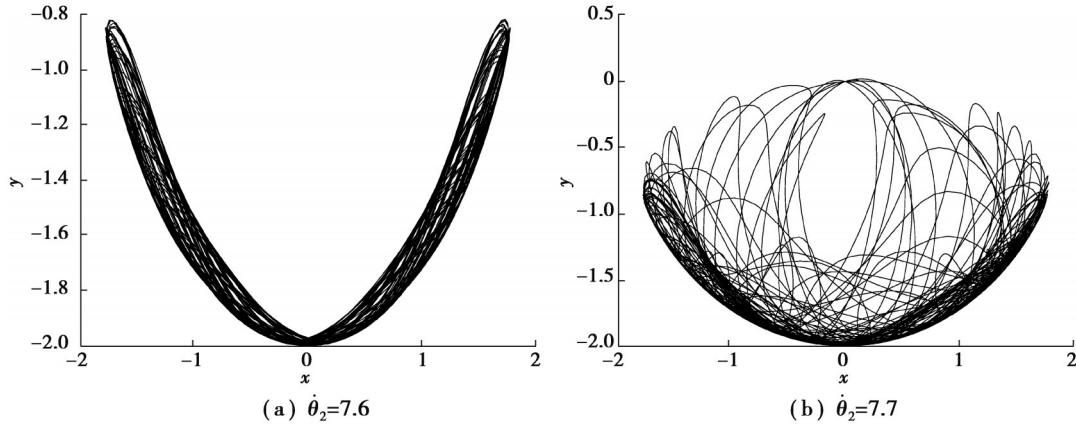


图 3  $\dot{\theta}_2 = 7.6$  和  $\dot{\theta}_2 = 7.7$  时的 Poincaré 截面图

Fig. 3 Poincaré sections when  $\dot{\theta}_2 = 7.6$  and  $\dot{\theta}_2 = 7.7$

图4  $\dot{\theta}_2=7.6$ 和 $\dot{\theta}_2=7.7$ 时的P点运动轨迹图Fig. 4 Trajectory diagrams of point P when  $\dot{\theta}_2=7.6$  and  $\dot{\theta}_2=7.7$ 

### 3.2 仅考虑势能的混沌条件数值模拟验证

假定双摆系统无初速度,同时考虑 $2\left(\frac{m_1}{k_1} + m_2\right)gl_1$ 和 $\frac{2}{k_2}m_2gl_2$ 2个阈值,有

$$\begin{cases} H \geq 2\left(\frac{m_1}{k_1} + m_2\right)gl_1 \\ H \geq \frac{2}{k_2}m_2gl_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(k_1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\frac{l_1k_2}{k_1l_2} \leq \frac{1 - \cos \theta_2}{1 + \cos \theta_1}, \\ \left(k_1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\frac{l_1k_2}{k_1l_2} \leq \frac{1 + \cos \theta_2}{1 - \cos \theta_1}. \end{cases} \quad (13)$$

将式(13)简化为式(14)

$$\begin{cases} (k_1 + m)L \leq \frac{1 - \cos \theta_2}{1 + \cos \theta_1}, \\ (k_1 + m)L \geq \frac{1 + \cos \theta_2}{1 - \cos \theta_1}. \end{cases} \quad (14)$$

由式(14)可知,影响系统混沌的并非摆的总长 $l_1$ 、 $l_2$ ,而是铰接处到重心的长度 $L_1$ 、 $L_2$ ;代表第一摆质心位置的 $k_1$ 可以单独对系统产生影响,而代表第二摆重心位置的 $k_2$ 必须与 $l_2$ 组合成 $L_2$ 来影响系统,可见第一摆重心位置对系统混沌性的影响要大一些。随角度参数 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 的取值不同,会出现两种假设情况,一是 $\frac{1 - \cos \theta_2}{1 + \cos \theta_1} \geq \frac{1 + \cos \theta_2}{1 - \cos \theta_1}$ ,即 $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 \leq 0$ ,无论 $(k_1 + m)L$ 取何值,双摆系统都为混沌运动;二是 $\frac{1 - \cos \theta_2}{1 + \cos \theta_1} < \frac{1 + \cos \theta_2}{1 - \cos \theta_1}$ ,即 $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 > 0$ ,此时 $(k_1 + m)L$ 在某一范围内,系统存在拟周期运动,其余为混沌运动。

#### 3.2.1 完全混沌

本节取 $(\theta_1, \theta_2) = (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 和 $(\theta_1, \theta_2) = (\frac{5\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ ,此时无论 $(k_1 + m)L$ 取何值,双摆系统都应为混沌运动。同样选择均质物理双摆系统进行分析,图5为 $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, L) = (0, 0, \frac{2}{9})$ 时,随参数 $m$ 变化的最大Lyapunov指数图,图6为在 $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, m) = (0, 0, 1)$ 时,随参数 $L$ 变化的最大Lyapunov指数图。最大Lyapunov指数也始终大于0,表明系统与理论推测相同,处于混沌运动。两图中(b)图的Lyapunov指数显然大于(a)图的Lyapunov指数,表明在(b)图的参数条件下,系统在相邻相轨道间发散得更加严重,系统混沌程度更深。

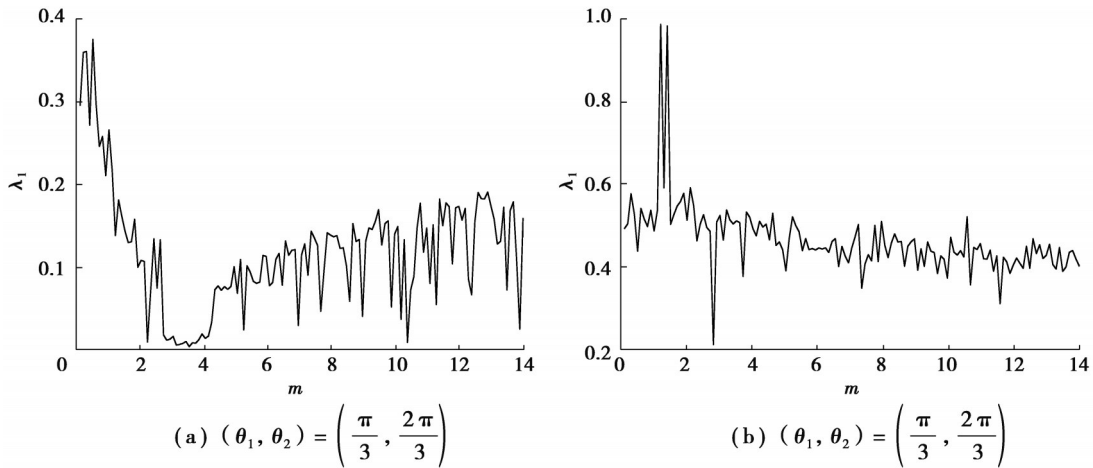


图 5 随参数  $m$  变化的最大 Lyapunov 指数图

Fig. 5 The graph of the largest Lyapunov exponent that varies with the parameter  $m$

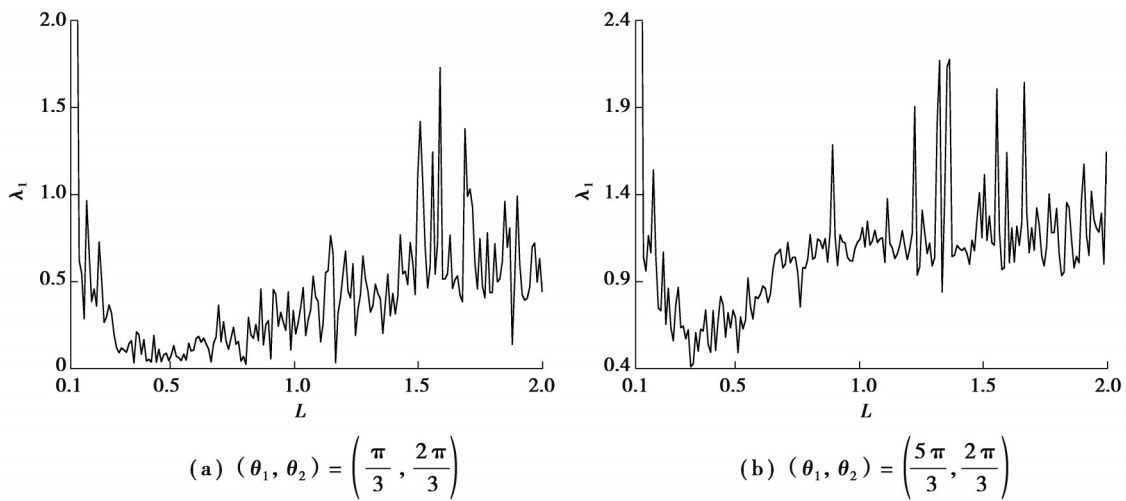


图 6 随参数  $L$  变化的最大 Lyapunov 指数图

Fig. 6 The graph of the largest Lyapunov exponent that varies with the parameter  $L$

### 3.2.2 局部拟周期

当  $\frac{1 - \cos \theta_2}{1 + \cos \theta_1} < \frac{1 + \cos \theta_2}{1 - \cos \theta_1}$  时,系统应存在拟周期运动,这里通过数值仿真,改变第一摆质心位置  $k_1$

与质量比  $m$  的取值来验证理论阈值的正确性。取固定参数  $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, L, a, b) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0, 0, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ , 图 7 为在不同  $k_1$  下,以  $m$  为分岔参数的分岔图。图 7(a) 中  $k_1=1.4$ , 图中  $m \leq 1.48$  处离散点完全发散,说明系统在  $(m+k_1) \leq 2.88$  的区域做混沌运动,略小于理论值;分岔图在  $1.48 \leq m \leq 7$  处为十几条清晰的线相互纠缠在一起,系统做拟周期运动;在  $7 \leq m \leq 7.6$  处清晰的线逐渐转变为离散点,但没有发散,可见系统处于拟周期态到混沌态的过渡阶段;在  $m=7.6$  处离散点第一次发散,可见系统在  $(m+k_1) \geq 9$  时开始进行混沌运动,与理论相符合。图 7(b) 中  $k_1=1.7$ , 图中  $m \leq 1.5$  与  $m \geq 7.2$  处离散点完全发散,说明系统在  $(m+k_1) \leq 3.2$  与  $(m+k_1) \geq 8.9$  的区域做混沌运动,混沌区域略大于理论值。图 7(c) 中  $k_1=2$ , 此即均质双摆,图中  $m \leq 1.55$  与  $m \geq 5.67$  处离散点完全发散,说明系统在  $(m+k_1) \leq 3.55$  与  $(m+k_1) \geq 7.67$  处做混沌运动,混沌区域虽略大于理论值,但在理论区域确实是做混沌运动。图 7(d) 中  $k_1=2.2$ , 系统在  $(m+k_1) \leq 3.8$  时做混沌运动,在  $(m+k_1) \geq 7.2$  时出现离散点并开始向混沌态过渡,直到  $(m+k_1) \geq 7.5$  时开始做混沌运动。



事实表明,当  $\frac{1 - \cos \theta_2}{1 + \cos \theta_1} < \frac{1 + \cos \theta_2}{1 - \cos \theta_1}$  时,系统存在拟周期态,且当摆的质心越接近摆尾,即  $k_1$  越小时,系统的拟周期运动区域越大。

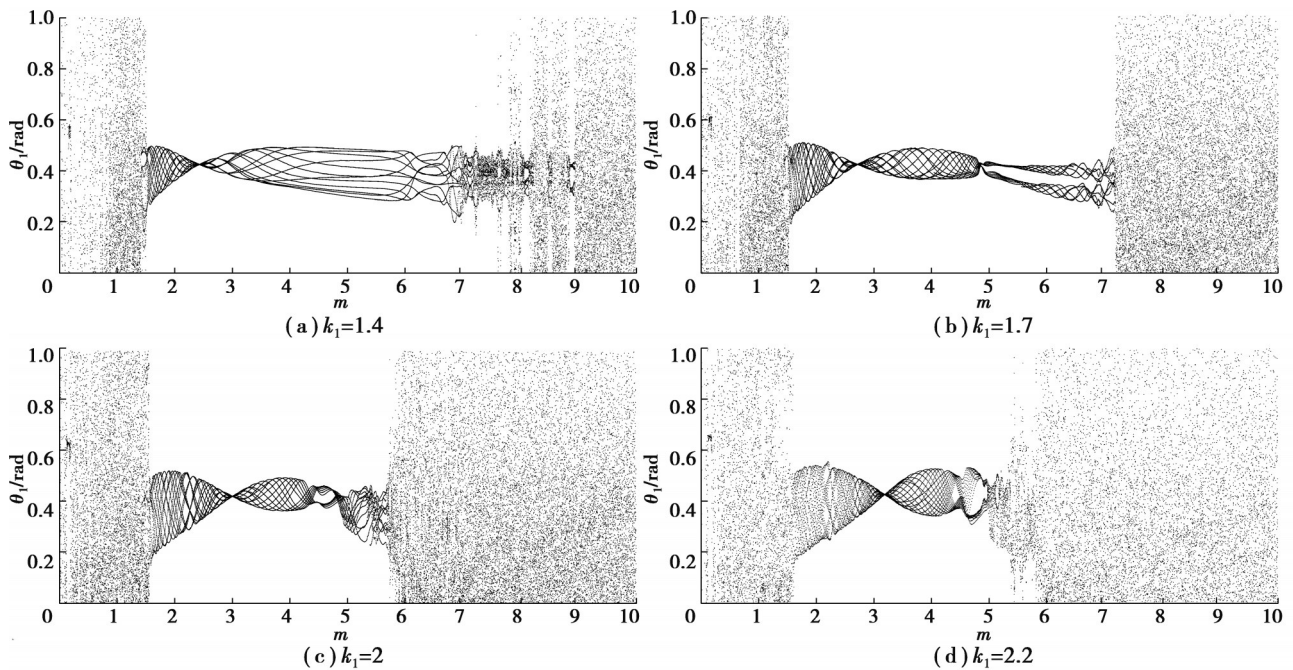


图7  $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, L, a, b) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0, 0, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  时以  $m$  为分岔参数的分岔图

Fig. 7 Bifurcation diagram with  $m$  as bifurcation parameter when  $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, L, a, b) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0, 0, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

## 4 模型局限性分析

### 4.1 $k_1 \approx \frac{1 - \cos \theta_2}{(1 + \cos \theta_1)L}$ 或 $k_1 > \frac{1 - \cos \theta_2}{(1 + \cos \theta_1)L}$

图8为取参数  $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, L, a, b) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0, 0, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  时以  $m$  为分岔参数的分岔图,此时  $\frac{1 - \cos \theta_2}{(1 + \cos \theta_1)L} = 3$ 。图8(a)中  $k_1=2.8$ ,按照理论计算,系统应在  $m \leq 0.2$  与  $m \geq 6.2$  的区域内做混沌运动,图中  $0.06 \leq m \leq 0.2$  时系统做拟周期运动,与理论预测不符,但依然满足  $m \geq 6.2$  的混沌条件。图8(b)中  $k_1=3.2$ ,图中  $5.8 \leq m \leq 6.93$  时系统做拟周期运动,与系统应在  $m \geq 5.8$  时做混沌运动不相符,说明第一摆质心位置的  $k_1$  在数值上接近  $\frac{1 - \cos \theta_2}{(1 + \cos \theta_1)L}$  时,理论阈值只能正确预测  $(k_1 + m)L \geq \frac{1 + \cos \theta_2}{1 - \cos \theta_1}$  的部分,当  $k_1$  越  $\frac{1 - \cos \theta_2}{(1 + \cos \theta_1)L}$  时,理论阈值将完全不适用。

### 4.2 $m_1 \gg m_2$

图9为取参数  $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, k_1, a, b) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0, 0, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  时以  $m$  为分岔参数的分岔图,该图表明,若  $m$  较大时,在  $l_1 \gg l_2$  的情况下,第一摆的能量占系统总能量的绝大部分,第二摆对系统的影响很小;而在  $l_2 \gg l_1$  时,两摆间难以产生较大的影响,此时可以将系统看作为1个单摆系统加上1个第二摆产生的微小扰动。因此,在这2种条件下系统在参数  $m$  较大的区域进行拟周期运动,而非混沌运动。

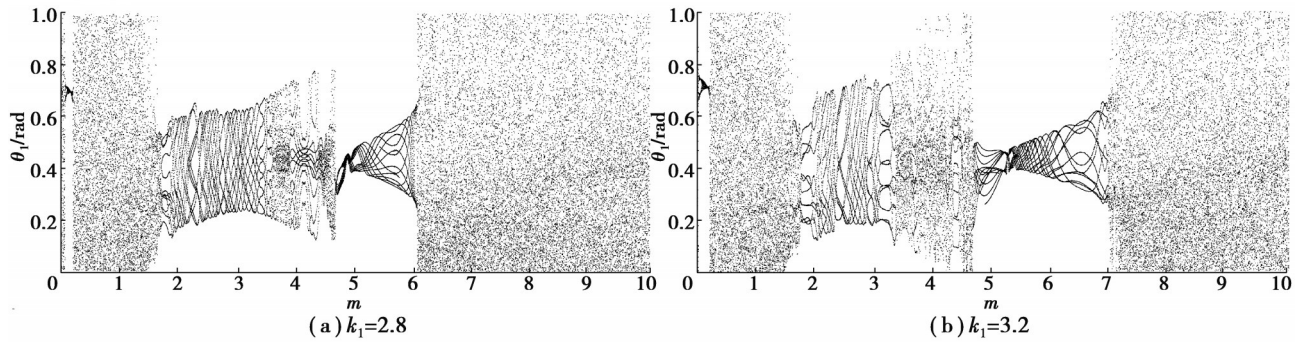


图 8  $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, L, a, b) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0, 0, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  时以  $m$  为分岔参数的分岔图

Fig. 8 Bifurcation diagram with  $m$  as bifurcation parameter when  $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, L, a, b) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0, 0, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

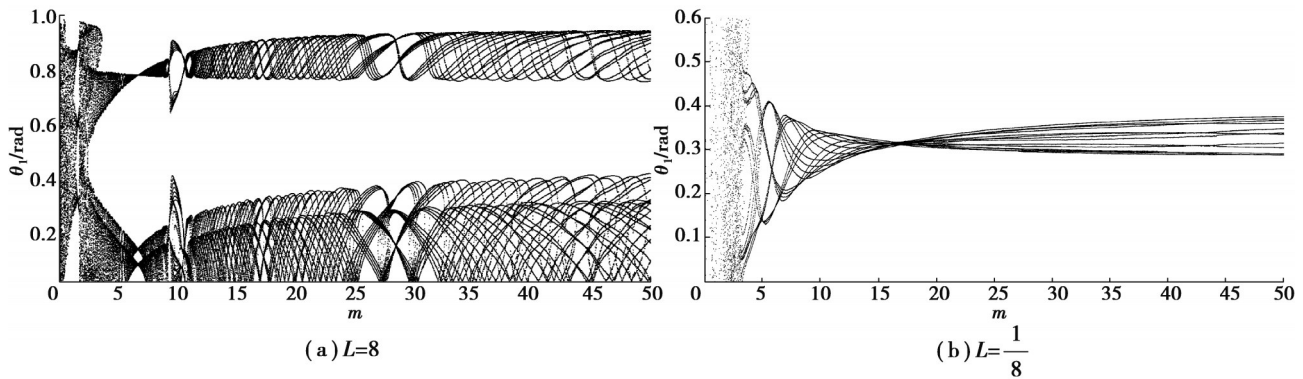


图 9  $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, k_1, a, b) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0, 0, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  时以  $m$  为分岔参数的分岔图

Fig. 9 Bifurcation diagram with  $m$  as bifurcation parameter when  $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, k_1, a, b) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0, 0, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

4.3  $J_2 \gg J_1$  或  $J_1 \gg J_2$

图 10 为取参数  $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, L, k_1) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0, 0, \frac{2}{9}, 1.7)$  时以  $m$  为分岔参数的分岔图, 在此参数条件下系统将在  $m \leq 1.3$  与  $m \geq 7.3$  的区域做混沌运动, 此时  $\frac{J_1}{J_2} = \frac{4am}{81b}$ 。

当  $J_2 \gg J_1$  即  $b \gg a$  时, 如图 10(a)(b) 中分别取  $(a, b) = (0.1, 0.4)$  和  $(a, b) = (0.1, 0.8)$ , 系统在  $0 \leq m \leq 10$  内由混沌态转为拟周期态后, 没有再出现明确的混沌区阈值, 表明当第二摆转动惯量远大于第一摆转动惯量时, 随着双摆质量比  $m$  的增加, 系统将出现趋于稳定的拟周期运动, 其原因是在双摆运动过程中, 转动惯量会影响系统的动能, 根据机械能守恒定理知, 第二摆的转动惯量越大, 速度就会越小, 此时可以把第二摆的运动看做在单摆系统上加一个微小的扰动, 因此系统会趋于拟周期运动。

当  $J_2 \approx J_1$  时, 如图 10(c) 中取  $(a, b) = (0.3, 0.3)$  时, 系统在  $0 \leq m \leq 1.63$  时为混沌运动, 在  $1.63 \leq m \leq 5.76$  时为拟周期运动, 在  $5.76 \leq m \leq 10$  时为混沌运动, 虽然实际混沌区域大于理论预测, 但在理论预测的区域确实做混沌运动。如图 10(d) 中取  $(a, b) = (0.6, 0.3)$  时, 系统在  $0 \leq m \leq 1.3$  时为混沌运动, 在  $1.3 \leq m \leq 6.73$  时为拟周期运动, 在  $6.73 \leq m \leq 10$  时为混沌运动, 此时理论阈值具有很好的适用性。

当  $J_1 \gg J_2$  时, 如图 10(e)(f) 中分别取  $(a, b) = (0.8, 0.1)$  和  $(a, b) = (0.9, 0.1)$ , 此时系统在  $0 \leq m \leq 10$  内作由混沌态转变为拟周期态又转变为混沌态的循环往复的运动。这说明当第一摆的转动惯量远大于第二摆的转动惯量时, 系统的运动将受到两摆质量比的影响而出现极其复杂的运动。对比六次仿真结果可知, 系统在运动过程中, 转动惯量会对系统的动能产生影响从而改变系统混沌条件, 当两摆的转动惯量差距过大时, Melnikov 法得出的能量阈值不再适用。

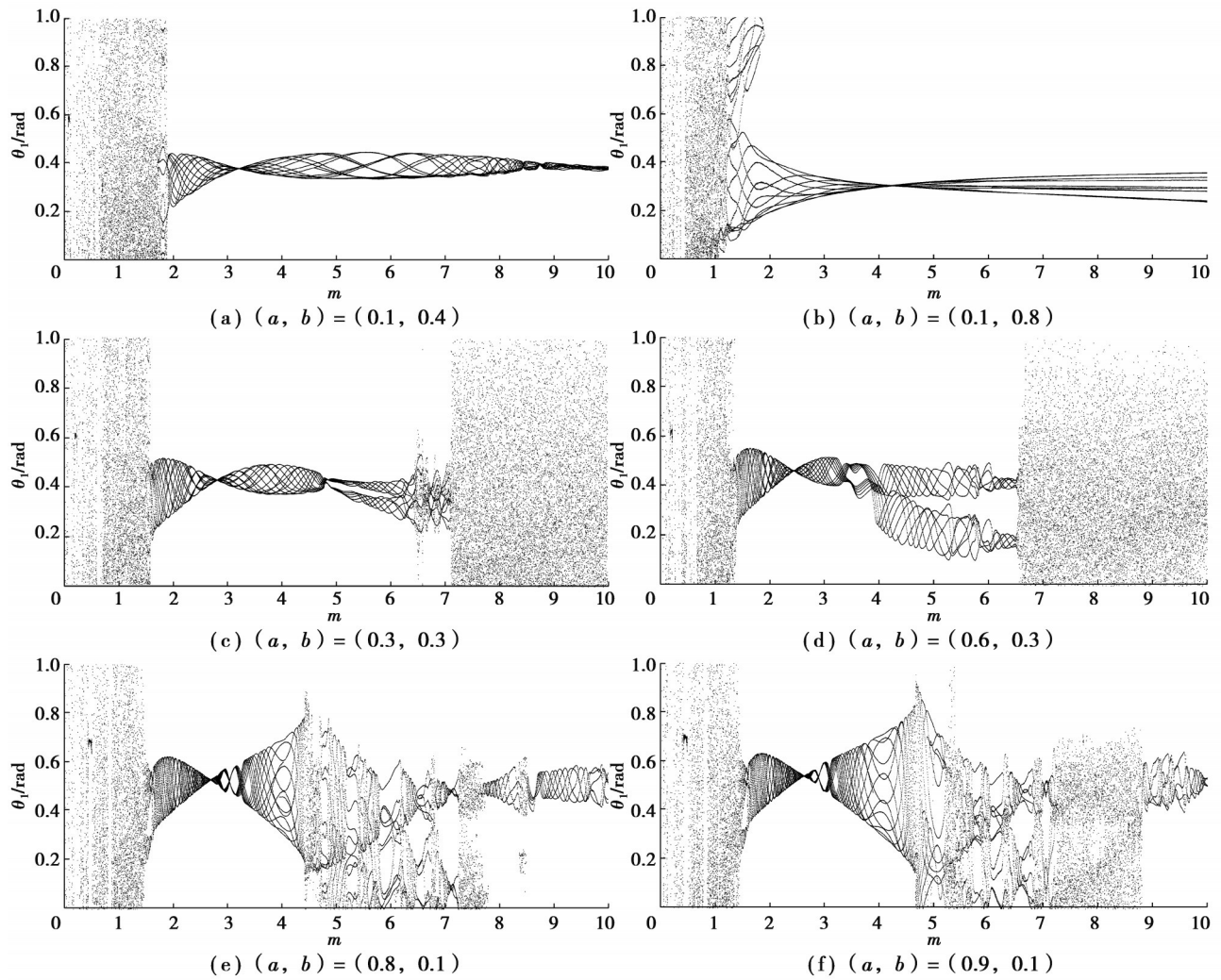


图10  $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, L, k_1) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0, 0, \frac{2}{9}, 1.7)$  时以  $m$  为分岔参数的分岔图

Fig. 10 Bifurcation diagram with  $m$  as bifurcation parameter when  $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, L, k_1) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0, 0, \frac{2}{9}, 1.7)$

## 5 结论

建立了非均质物理双摆运动的拟Hamilton模型,根据双自由度的Melnikov法提出了拟Hamilton系统发生混沌的能量阈值,得到了一般情况下系统发生混沌的条件。通过改变双摆模型中的质心位置、摆长比以及转动惯量来体现双摆非均质的特点,再根据不同参数下系统的分岔图、Poincaré截面图对理论阈值进行验证,给出了模型的适用条件,并完成了局限性分析。基于本研究,可得出以下结论:

1)分析非均质物理双摆混沌的理论阈值,发现影响系统混沌的并非双摆的摆长 $l_1, l_2$ ,而是双摆质心到铰接处的距离 $L_1, L_2$ ,并且在双摆质量和长度确定的情况下, $L_1, L_2$ 越大,系统发生混沌所需要的能量就越大。

2)分析双摆质心位置对系统混沌特性的影响,发现第一摆的质心位置 $k_1$ 可以直接影响系统混沌特性,而第二摆的质心位置 $k_2$ 则不能单独对系统的混沌特性产生影响。利用数值仿真改变 $k_1$ 的大小,从而进一步得到了第一摆质心位置对理论阈值的适用性,发现当 $k_1$ 在数值上接近 $\frac{1 - \cos \theta_2}{(1 + \cos \theta_1)L}$ 时,理论阈值的适用性变

差,当 $k_1$ 大于 $\frac{1 - \cos \theta_2}{(1 + \cos \theta_1)L}$ 时,理论阈值将完全不适用。

3)分析双摆转动惯量对系统混沌特性的影响,发现双摆通过转动惯量的改变使得运动时动能发生改变,

进而影响系统的混沌阈值,并且知道当第二摆的转动惯量远大于第一摆的转动惯量时,系统将趋于拟周期运动;当第一摆的转动惯量远大于第二摆时,系统作混沌态、拟周期态循环往复的复杂运动;当双摆的转动惯量相似时,系统能很好地在理论阈值区域内做混沌运动。表明在极限条件下,理论阈值存在一定的局限。

4)非均质双摆系统的混沌特性研究对类似系统的混沌抑制有着重要的启示作用。具体来说,可以通过研究双摆系统的混沌控制方法来抑制类似系统的混沌特性,实现系统的稳定控制。例如,对于机器人肩部和腿部的运动,通过控制双摆系统的摆臂长度和摆锤重量比等参数,可以实现关节运动的控制和规划。另外,在航空航天领域中,太阳能帆板的展开涉及到杆件和轴承的不确定性,容易导致非线性振动和失稳现象的发生,因此可以通过研究双摆混沌控制方法来控制太阳能帆板的展开过程,实现太阳能帆板的准确展开。总之,通过研究非均质物理双摆系统的混沌特性,在工程实际中可以针对类似系统的混沌特性进行控制和抑制,提高系统的稳定性和控制精度。

### 参考文献

- [ 1 ] Petró B, Kiss B, Kiss R M. Analyzing human balance recovery action using calculated torques of a double pendulum model[J]. *Materials Today: Proceedings*, 2019, 12: 431-439.
- [ 2 ] Betzler N, Monk S, Wallace E, et al. From the double pendulum model to full-body simulation: evolution of golf swing modeling[J]. *Sports Technology*, 2008, 1(4/5): 175-188.
- [ 3 ] Youn S H. Double pendulum model for a tennis stroke including a collision process[J]. *Journal of the Korean Physical Society*, 2015, 67(7): 1110-1117.
- [ 4 ] Verduzco F, Alvarez J. Homoclinic chaos in 2-DOF robot manipulators driven by PD controllers[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2000, 21(2): 157-171.
- [ 5 ] 张红巧, 田瑞兰, 陈恩利, 等. 参数激励下均质杆状双摆的周期稳定振动[J]. *振动与冲击*, 2020, 39(16): 231-235.  
Zhang H Q, Tian R L, Chen E L, et al. Periodically stable vibration of homogeneous rod-shaped double pendulum under parametric excitation[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, 39(16): 231-235.(in Chinese)
- [ 6 ] Shi H T, Yao F X, Yuan Z, et al. Research on nonlinear coupled tracking controller for double pendulum gantry cranes with load hoisting/lowering[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 108(1): 223-238.
- [ 7 ] Sun N, Wu Y M, Chen H, et al. An energy-optimal solution for transportation control of cranes with double pendulum dynamics: design and experiments[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, 102: 87-101.
- [ 8 ] Zhang M H, Ma X, Chai H, et al. A novel online motion planning method for double-pendulum overhead cranes[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 85(2): 1079-1090.
- [ 9 ] Kumar R, Gupta S, Ali S F. Energy harvesting from chaos in base excited double pendulum[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 124: 49-64.
- [ 10 ] 王观, 胡华, 伍康, 等. 基于两级摆杆结构的超低频垂直隔振系统[J]. *物理学报*, 2016, 65(20): 200702.  
Wang G, Hu H, Wu K, et al. Ultra-low-frequency vertical vibration isolator based on a two-stage beam structure[J]. *Acta Physica Sinica*, 2016, 65(20): 200702.(in Chinese)
- [ 11 ] 范洪义, 吴泽. 介观电路中量子纠缠的经典对应[J]. *物理学报*, 2022, 71(1): 010302.  
Fan H Y, Wu Z. Classical correspondence of quantum entanglement in mesoscopic circuit[J]. *Acta Physica Sinica*, 2022, 71(1): 010302.(in Chinese)
- [ 12 ] 陈汉军, 黄东卫, 苏永福. 双物理摆的混沌分析[J]. *数学的实践与认识*, 2007, 37(15): 49-53.  
Chen H J, Huang D W, Su Y F. Chaos analysis of the double-body pendulum[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2007, 37(15): 49-53.(in Chinese)
- [ 13 ] Ford J, Ilg M. Eigenfunctions, eigenvalues, and time evolution of finite, bounded, undriven, quantum systems are not chaotic[J]. *Physical Review A*, 1992, 45(9): 6165-6173.
- [ 14 ] Stachowiak T, Okada T. A numerical analysis of chaos in the double pendulum[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, 29(2):

417-422.

- [15] 赵武, 张鸿斌, 孙超凡, 等. 受垂直激励和水平约束的单摆系统亚谐共振分岔与混沌[J]. 物理学报, 2021, 70(24): 240202.  
Zhao W, Zhang H B, Sun C F, et al. Subharmonic resonance bifurcation and chaos of simple pendulum system with vertical excitation and horizontal constraint[J]. *Acta Physica Sinica*, 2021, 70(24): 240202.(in Chinese)
- [16] 刘丁杨, 蹇开林, 张亮. 基于Melnikov法的双摆系统混沌特性研究[J]. 振动与冲击, 2022, 41(14): 92-98.  
Liu D Y, Jian K L, Zhang L. Chaotic characteristics of a double pendulum system based on the Melnikov method[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2022, 41(14): 92-98.(in Chinese)
- [17] Han N, Lu P P. Nonlinear dynamics of a classical rotating pendulum system with multiple excitations[J]. *Chinese Physics B*, 2020, 29(11): 110502.
- [18] Maiti S, Roy J, Mallik A K, et al. Nonlinear dynamics of a rotating double pendulum[J]. *Physics Letters A*, 2016, 380(3): 408-412.
- [19] Bi Q S, Chen Y S. Bifurcation analysis of a double pendulum with internal resonance[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, 21(3): 255-264.
- [20] Martynyuk A A, Nikitina N V. The theory of motion of a double mathematical pendulum[J]. *International Applied Mechanics*, 2000, 36(9): 1252-1258.
- [21] Calvão A M, Penna T P. The double pendulum: a numerical study[J]. *European Journal of Physics*, 2015, 36(4): 045018.
- [22] Oiwa S, Yajima T. Jacobi stability analysis and chaotic behavior of nonlinear double pendulum[J]. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2017, 14(12): 1750176.
- [23] Kovacic I, Zukovic M, Radomirovic D. Normal modes of a double pendulum at low energy levels[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 99(3): 1893-1908.
- [24] Dudkowski D, Wojewoda J, Czołczyński K, et al. Is it really chaos? The complexity of transient dynamics of double pendula[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 102(2): 759-770.
- [25] 李继彬, 陈凤娟. 混沌、Mel'nikov方法及新发展[M]. 北京: 科学出版社, 2012.  
Li J B, Chen F J. *Chaos, Mel'nikov method and its new development*[M]. Beijing: Science Press, 2012.(in Chinese)
- [26] Holmes P J, Marsden J E. Horseshoes in perturbations of Hamiltonian systems with two degrees of freedom[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 1982, 82(4): 523-544.

(编辑 郑洁)