

doi: 10.11835/j.issn.1000-582X.2023.265

# 基于物理信息神经网络的非线性瞬态热传导 正/反问题研究

陈豪龙, 唐欣越, 柳兆涛, 周焕林

(合肥工业大学 土木与水利工程学院 合肥 230009)

**摘要:** 基于物理信息神经网络(physics-informed neural networks, PINN)求解非线性瞬态热传导问题并识别随温度变化的导热系数。首先, 基于热传导问题的控制方程, 利用初始条件和边界条件, 构建损失函数。然后, 应用自动微分算法求解控制方程中温度的偏导数。使用梯度下降算法, 更新网络参数, 最小化损失函数, 实现热传导正问题的求解, 并讨论了不同隐藏层数、神经元数量和域内数据点数量对计算结果的影响。最后, 采用 PINN 识别随温度变化的导热系数, 利用控制方程、测量温度和计算温度的残差构建损失函数, 通过梯度下降算法, 更新网络参数和导热系数, 使其逼近于精确解, 并比较了不同的测点数量和测量误差对计算结果的影响。结果表明, PINN 能够有效求解非线性瞬态热传导问题并识别与温度相关的导热系数。

**关键词:** 反问题; 热传导问题; 导热系数识别; 物理信息神经网络; 自动微分算法

中图分类号: O411.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-582X(2024)12-124-13

## Solving nonlinear transient heat conduction forward/inverse problem using physics-informed neural networks

CHEN Haolong, TANG Xinyue, LIU Zhaotao, ZHOU Huanlin

(School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, P. R. China)

**Abstract:** This study proposes a physics-informed neural networks (PINN) approach to solve transient nonlinear heat conduction problems and estimate the temperature-dependent thermal conductivity. First, a loss function is formulated using the residuals of partial differential equation, initial conditions, and boundary conditions specific to heat conduction. Then, automatic differentiation is applied to compute the temperature's partial derivatives within the equation. The heat conduction problem is solved by minimizing the loss function through a gradient descent algorithm, which updates the network parameters. The influences of varying the number of hidden layers, neurons and interior collection points on the results are also examined. Finally, the PINN is applied to identify temperature-dependent thermal conductivities by formulating a loss function that includes residuals from the governing equation, measured temperature, and computed temperature. The network parameters and thermal conductivity values are updated by gradient descent algorithm to approximate the true solution. Additionally, the

收稿日期: 2023-06-13 网络出版日期: 2023-11-01

基金项目: 国家自然科学基金(12002181); 中央高校基本科研业务费(JZ2022HGQA0165, JZ2022HGTB0243)。

Supported by National Natural Science Foundation of China (12002181) and Fundamental Research Funds for the Central Universities (JZ2022HGQA0165, JZ2022HGTB0243).

作者简介: 陈豪龙(1989—), 男, 博士, 讲师, 主要从事计算力学方向研究, (E-mail) chenhl@hfut.edu.cn。

通信作者: 周焕林(1973—), 男, 博士, 教授, (E-mail) zhoulh@hfut.edu.cn。

influences of different measurement points and errors on the results are compared. The findings show that the proposed method effectively solves transient heat conduction problems and accurately estimates temperature-dependent thermal conductivity.

**Keywords:** inverse problems; heat conduction; thermal conductivity estimation; physics-informed neural networks; automatic differentiation

目前,复合材料吸引了越来越多人的关注,并将其应用于产品制造领域。为了充分描述产品的发热过程,需要求解得到产品的温度分布,即为正问题;为了更好地设计材料的导热性能,需要确定材料的导热系数,即为反问题。如何对正问题进行建模是求解反问题的基础。有限元法(finite element method, FEM)<sup>[1]</sup>、有限体积法和边界元法等数值方法是求解热传导正问题常用的方法。然而,这些数值方法需要对求解域进行网格离散,而网格的划分对计算结果的精度有较大的影响。

物理信息神经网络(physics-informed neural networks, PINN)将物理守恒定律和先验的物理知识编码到人工神经网络(artificial neural network, ANN)中,并用于解决许多物理问题<sup>[2-3]</sup>。这种方法将偏微分方程(partial differential equation, PDE)中的偏导数直接通过自动微分算法进行数值近似<sup>[4]</sup>。因此,PINN与传统的数值方法不同,其不需要对求解域进行离散处理,仅需在域内布置数据点。此外,采用PINN求解正问题时,对样本量的需求大大减少,甚至不需要训练样本。

反演算法可以分为2类:基于梯度的算法和元启发式优化算法<sup>[5]</sup>。Mohebbi等<sup>[6]</sup>识别了随空间和温度变化的导热系数。Cui等<sup>[7-8]</sup>通过基于梯度的可变松弛因子优化方法识别了与温度相关的导热系数。Mera等<sup>[9]</sup>识别了各向异性介质中二维热传导问题的导热系数和边界条件。周换林等<sup>[10-11]</sup>采用改进的布谷鸟搜索算法识别了瞬态热传导问题的导热系数和热扩散系数。吴秀壮等<sup>[12]</sup>利用布谷鸟搜索算法优化目标函数,实现了动载荷的反演。Sun等<sup>[13]</sup>使用改进的磷虾群算法识别了与温度相关的热物性参数。Wang等<sup>[14]</sup>利用人工鱼群算法求解了界面的传热系数。但是,这些方法都没有充分利用历史数据信息。

近年来,数据驱动模型受到计算机科学发展的极大推动,被广泛应用于求解各类工程问题<sup>[15]</sup>。Chen等<sup>[16]</sup>通过ANN和有效热导率来识别管道内边界的几何形状。他们还使用深度学习模型,通过测量皮肤表面温度来识别肿瘤的热物理性质<sup>[17]</sup>。Li等<sup>[18]</sup>提出了一种改进的PINN识别了热扩散系数。汤卓超等<sup>[19]</sup>基于PINN求解了曲面上的对流扩散方程。Cai等<sup>[20]</sup>采用PINN求解了多种热传导问题。陆至彬等<sup>[21]</sup>基于软边界和硬边界2种设定方法构建PINN,求解了二维热传导问题。然而,PINN针对非线性瞬态热传导正问题和反问题的研究还不充分。

笔者采用PINN求解了非线性瞬态热传导问题并识别了随温度变化的导热系数。在热传导正问题中,损失函数由PDE、初始条件和边界条件的残差表示。然后将求解PDE的问题转化为求解损失函数的极值问题,并比较了不同隐藏层数和神经元个数对计算结果的影响。对于导热系数识别问题,建立了以PDE、测量温度和计算温度的残差表示的损失函数,通过梯度下降算法,更新网络参数和导热系数,使其逼近于精确解,实现对导热系数的识别,并讨论了不同测点数量和测量误差对计算结果的影响。

## 1 问题设置

### 1.1 热传导正问题

考虑非线性瞬态热传导问题,其控制方程可以表示为

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda(T) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right) = \rho c \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \quad (1)$$

式中: $x_i$ 是在空间坐标系下 $\mathbf{x} \in \Omega$ 的第*i*个分量, $\lambda(T)$ 为与温度相关的导热系数。 $T(\mathbf{x}, t)$ 为温度, $t$ 为时间, $\rho$ 为密度, $c$ 为比热。

初始条件为

$$T(\mathbf{x}, t) \Big|_{t=0} = T_0, \quad (2)$$

式中,  $T_0$  为已知函数。边界条件为

$$T(\mathbf{x}, t) = \bar{T}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (3)$$

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} = \bar{q}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (4)$$

式中:  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ ,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$ 。 $\bar{T}(\mathbf{x}, t)$  和  $\bar{q}(\mathbf{x}, t)$  分别表示已知的边界温度和热流。

## 1.2 导热系数识别问题

如图 1 所示, 在导热系数识别问题中, 初始条件、边界条件和测点温度均已知, 而导热系数未知。反问题的目的就是通过测量表面或域内测点的温度来识别未知的导热系数。

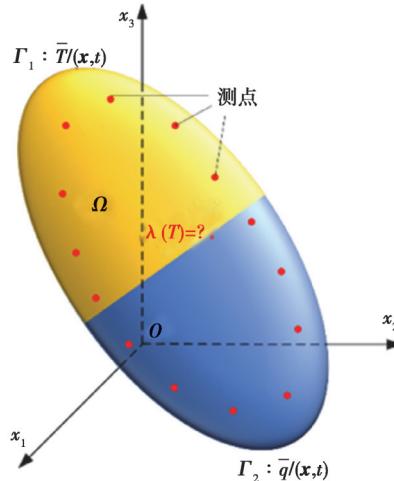


图 1 导热系数识别问题

Fig. 1 The thermal conductivity identification problem

## 2 物理信息神经网络

### 2.1 人工神经网络

人工神经网络(artificial neural network, ANN)是一种受自然启发、模仿生物神经网络运作的计算模型。它由许多神经元组成, 如图 2 所示。这些神经元以层的方式分组, 前一层和后一层神经元通过权重相互连接, 权重决定了连接传递的信号强度。

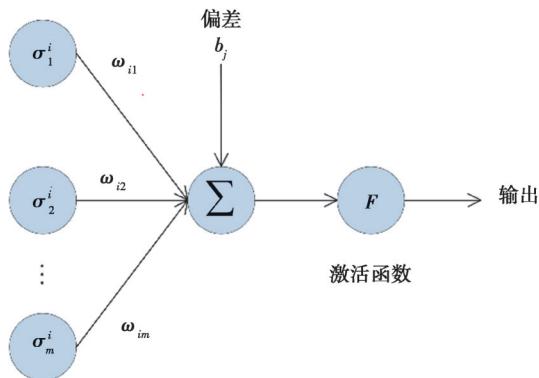


图 2 神经元的数学模型

Fig. 2 The mathematical model of a neuron

输入元素  $\sigma_m^i$  和权重  $\omega_{im}$  的乘积输送到求和节点, 并与神经元的偏差  $b_j$  相加, 可以表示为

$$X = \left( \sum_{j=1}^m \omega_{ij} \sigma_j^i \right) + b_j. \quad (5)$$

$X$  通过激活函数  $F$ , 可以产生输出

$$F(X) = F \left[ \left( \sum_{j=1}^m \omega_{ij} \sigma_j^i \right) + b_j \right]. \quad (6)$$

选择 Sigmoid 函数作为激活函数, 其输出介于 0 和 1 之间, 可以写为

$$F(X) = \frac{1}{1 + e^{-X}}. \quad (7)$$

当输入层和输出层为负值时, 使用双曲正切函数作为激活函数

$$F(X) = \frac{e^X - e^{-X}}{e^X + e^{-X}}. \quad (8)$$

ANN 由 3 种类型的层组成: 输入层、隐藏层和输出层。ANN 需要通过相应的输入和输出(训练集)来学习输入和输出之间的关系, 这个过程称为训练。在训练过程中使用梯度下降算法, 更新网络的权重和偏差。

## 2.2 PINN 求解热传导正问题

针对所研究的热传导问题, PINN 的输入为自变量(坐标和时间等), 输出为温度值。PINN 的基本思想是利用自动微分算法来求解温度对自变量的偏导数, 并使用 ANN 中的梯度下降算法优化网络参数。最后, 通过最小化损失函数实现热传导正问题的求解。

在 PINN 中, 根据控制方程式(1), 定义函数  $g$ ,

$$g = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda(T) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x_i} \right) - \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}, \quad (9)$$

式中,  $T(x, t)$  由时间  $t$  和坐标  $x_i$  通过使用 ANN 近似得到。损失函数  $L$  由 PDE( $L_{\text{PDE}}$ )、初始条件( $L_{\text{IC}}$ )和边界条件( $L_{\text{BC}}$ )的残差表示

$$L_{\text{PDE}} = \frac{1}{N_f} \sum_{j=1}^{N_f} |g(x_i^j, t^j)|^2, \quad (10)$$

$$L_{\text{IC}} = \frac{1}{N_u} \sum_{j=1}^{N_u} |T^j(x_i^j, t^j) - T_0^j|^2, \quad (11)$$

$$L_{\text{BC}} = \frac{1}{N_b} \sum_{j=1}^{N_b} |T^j(x_i^j, t^j) - \bar{T}^j|^2, \quad (12)$$

式中:  $N_f$  为域内数据点个数;  $N_u$  和  $N_b$  分别表示初始条件训练数据点数和边界条件训练数据点数;  $T_0^j$  和  $\bar{T}^j$  分别表示第  $j$  个数据点的初始温度和边界温度。将损失函数  $L$  表示为

$$L = L_{\text{PDE}} + L_{\text{IC}} + L_{\text{BC}}. \quad (13)$$

图 3 为 PINN 求解热传导正问题的流程图。在 PINN 中, 物理信息由 PDE 描述, 时间  $t$  和坐标  $x_i$  作为输入, 通过 Net\_T 网络输出温度  $T$ 。然后, 利用自动微分算法计算温度  $T$  关于输入(即时间  $t$  与空间  $x_i$ )的偏导数, 并代入损失函数中, 通过梯度下降法更新网络参数, 将  $L_{\text{PDE}}$ ,  $L_{\text{IC}}$  和  $L_{\text{BC}}$  逼近最小值, 使得损失函数  $L$  最小。这确保了在所有域内数据点处都满足式(9)所表示的物理定律, 从而实现热传导正问题的求解。

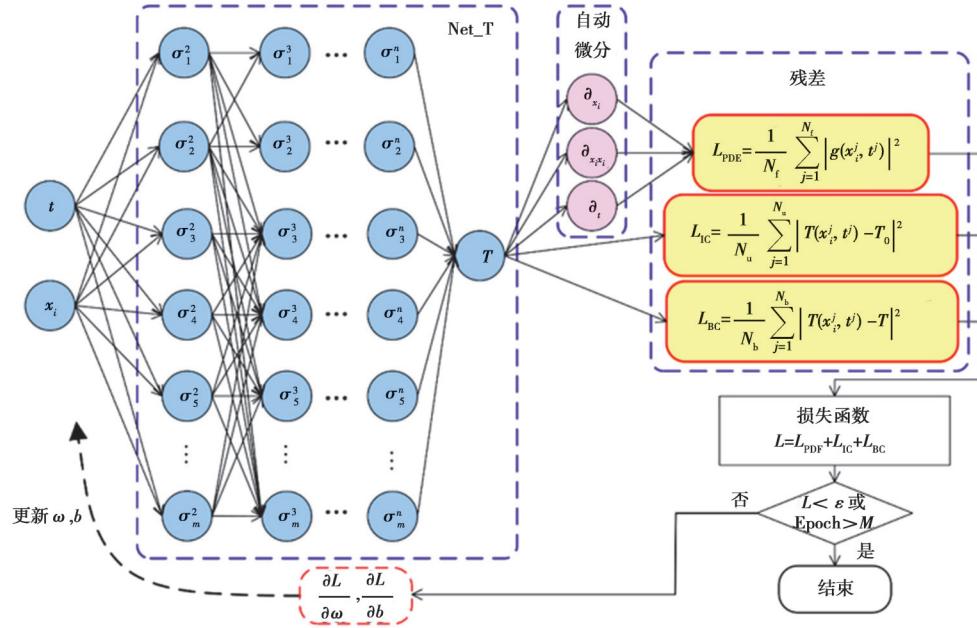


Fig. 3 The schematic diagram of the PINN for solving the heat conduction problem

### 2.3 PINN 识别与温度相关的导热系数

采用 PINN 来识别与温度相关的导热系数。与正问题不同, 热传导反问题的损失函数( $L_{\text{IHCP}}$ )由 PDE ( $L_{\text{PDE}}$ )和测量温度与计算温度的残差( $L_{\text{MP}}$ )表示

$$L_{\text{IHCP}} = L_{\text{PDE}} + L_{\text{MP}}, \quad (14)$$

式中, 测量温度与计算温度的残差为

$$L_{\text{MP}} = \sum_{j=1}^N |T_{\text{mea}}^j - T^j(x_i^j, t^j)|^2, \quad (15)$$

式中:  $N$  为测点个数;  $T_{\text{mea}}^j$  和  $T^j$  分别为第  $j$  个测点的测量温度和计算温度;  $T^j$  可以通过 Net\_T 求解得到。

图 4 为 PINN 识别导热系数的流程图。

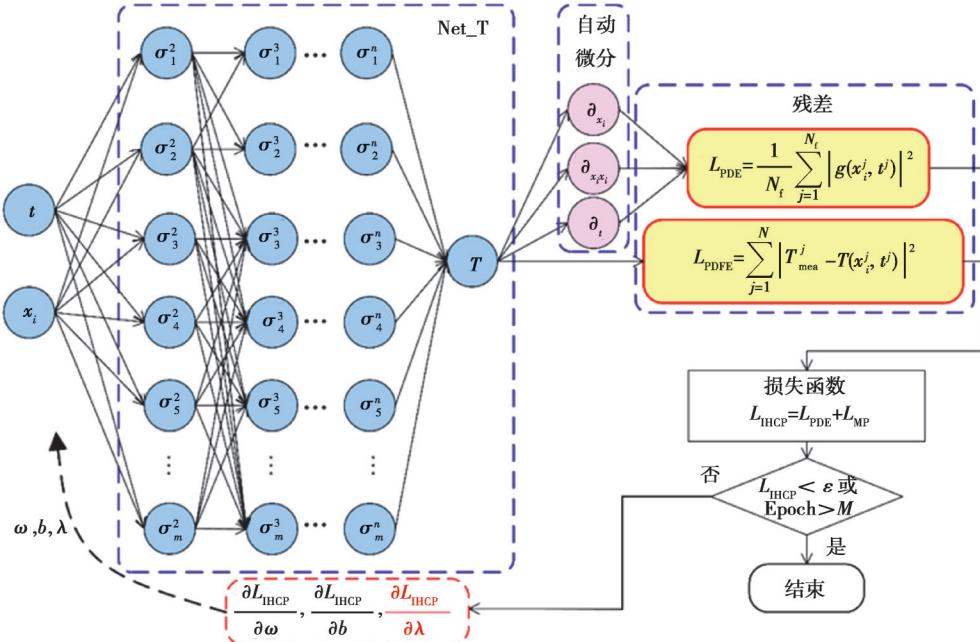


图 4 PINN 识别导热系数的流程图

Fig. 4 The schematic diagram of PINN for estimating the thermal conductivity

与 PINN 求解热传导正问题的流程非常相似, 都以时间  $t$  和坐标  $x_i$  作为输入, 并通过梯度下降法调整网络参数。与正问题不同的是, 在求解过程中导热系数是未知的, 即 PDE 未知, 但是域内数据点的测量温度已知。因此, 损失函数  $L_{\text{IHP}}$  是导热系数  $\lambda$  的函数。 $\lambda$  随着损失函数  $L_{\text{IHP}}$  的最小化不断调整, 最终逼近其精确值。

### 3 数值算例

本节中给出了一些数值算例, 包括非线性瞬态热传导正问题和导热系数识别问题, 以验证所提方法的准确性和有效性。并计算了平均绝对误差(MAE)

$$\text{MAE} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |T^i - T_{\text{exa}}^i|, \quad (16)$$

式中,  $T^i$  和  $T_{\text{exa}}^i$  分别为第  $i$  个域内数据点由 PINN 和 FEM 计算得到的温度。  $m$  为域内数据点个数。

用相对误差( RE )来验证计算结果的精度

$$\text{RE} = \left| \left( k_{\text{est}}^i - k_{\text{exa}}^i \right) / k_{\text{exa}}^i \right| \times 100\%, \quad (17)$$

式中:  $k_{\text{est}}^i$  和  $k_{\text{exa}}^i$  分别为导热系数的第  $i$  个参数的估计值和精确值。

#### 3.1 PINN 求解热传导正问题

##### 3.1.1 二维热传导问题

如图 5 所示, 考虑 1 个  $\pi \times \pi$  的方板。边界条件为  $T(x_1, 0, t) = T(\pi, x_2, t) = T(x_1, \pi, t) = T(0, x_2, t) = 0, 0 \leq t \leq 1$ 。

1. 初始条件给定为  $T_0 = \sin x_1 \sin x_2$ 。

导热系数可以表示为

$$\lambda(T) = 0.8T^2 + 0.5T + 1. \quad (18)$$

在方板的边界上均匀分布 400 个点, 在板内均匀分布 9 801 个点, 取时间步长  $\Delta t = 0.01$ , 时间步数为 100。即  $N_u = 9801, N_b = 400 \times 100 = 40000$ 。在板内随机抽取 5 000 个点作为数据点。训练次数  $M = 20000$ 。

图 6 展示了  $t=0.1, 0.5, 1.0, x_1 = \pi/2$  时, PINN 和 FEM 计算结果的对比。表 1 列出了  $t = 1.0$  时不同隐藏层数和神经元个数计算结果的 MAE。此外, 分别使用了 Leaky-ReLu、Sigmoid、Tanh 这 3 种激活函数。表 2 给出了使用不同激活函数时计算结果的 MAE。

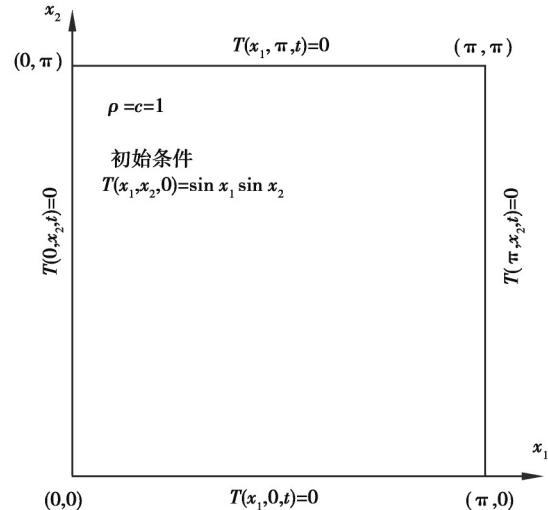


图 5 方板模型

Fig. 5 The square plate model

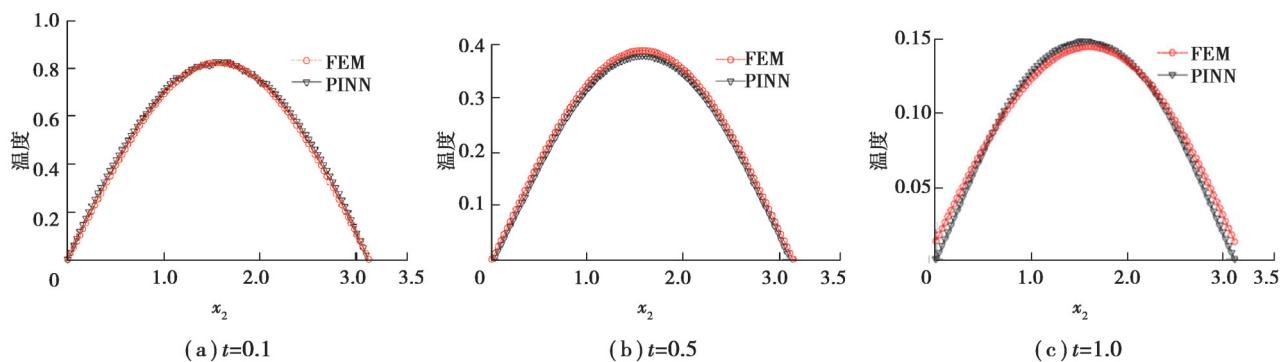


图 6 沿线  $x_1 = \pi/2$  的 PINN 和 FEM 计算结果对比

Fig. 6 Comparison of the PINN and FEM results along the line  $x_1 = \pi/2$

图 6 表明, PINN 与 FEM 的计算结果较为吻合, 这表明 PINN 能够有效的求解非线性瞬态热传导问题。从表 1 可以看出, 随着隐藏层数的增加, 计算结果的 MAE 减小。当隐藏层数取 3 和 5 时, 计算结果随着神经元数量的增加变得更加准确。当隐藏层数为 7, 每层神经元数为 20 时, MAE 最小, PINN 性能最好。因此, 在后

续的算例中, PINN模型中隐藏层数取为7, 每层含有20个神经元。由表2可以看出, 不同的激活函数对预测结果有较大影响, 使用Sigmoid激活函数时, MAE最小, PINN性能最好。因此, 在后续的算例中, 均采用Sigmoid作为激活函数。

表1  $t=1.0$ 时, 不同隐藏层数和神经元个数计算结果的MAE

Table 1 The MAE with different number of hidden layers and neurons at  $t=1.0$

层数	10 神经元	20 神经元	40 神经元
3层	$2.0037 \times 10^{-2}$	$1.6834 \times 10^{-2}$	$1.2660 \times 10^{-2}$
5层	$1.2301 \times 10^{-2}$	$1.1865 \times 10^{-2}$	$1.0333 \times 10^{-2}$
7层	$1.1813 \times 10^{-2}$	$8.2533 \times 10^{-3}$	$9.7927 \times 10^{-3}$

表2  $t=1.0$ 时, 含有20个神经元和7个隐藏层, 不同激活函数计算结果的MAE

Table 2 The MAE with different activation functions of 7 hidden layers and 20 neurons at  $t=1.0$

计算结果	Leaky-ReLU	Sigmoid	Tanh
MAE	$2.1217 \times 10^{-1}$	$8.2533 \times 10^{-3}$	$5.4005 \times 10^{-2}$

### 3.1.2 三维热传导问题

如图7(a)所示, 考虑一个 $1 \times 1 \times 1$ 的立方体。上表面边界条件为 $q = -1$ , 四周和底面的边界条件为 $T = 10t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , 初始条件为 $T_0 = 0$ 。导热系数为

$$\lambda(T) = 1 + 0.01T \quad (19)$$

在立方体表面均匀分布15 000个点, 取时间步长 $\Delta t=0.01$ 。在求解域内随机抽取2 000个点作为数据点, 训练次数 $M=20\,000$ 。同样该问题也采用FEM进行求解, 有限元模型如图7(b)所示, 采用125 000个六面体单元。

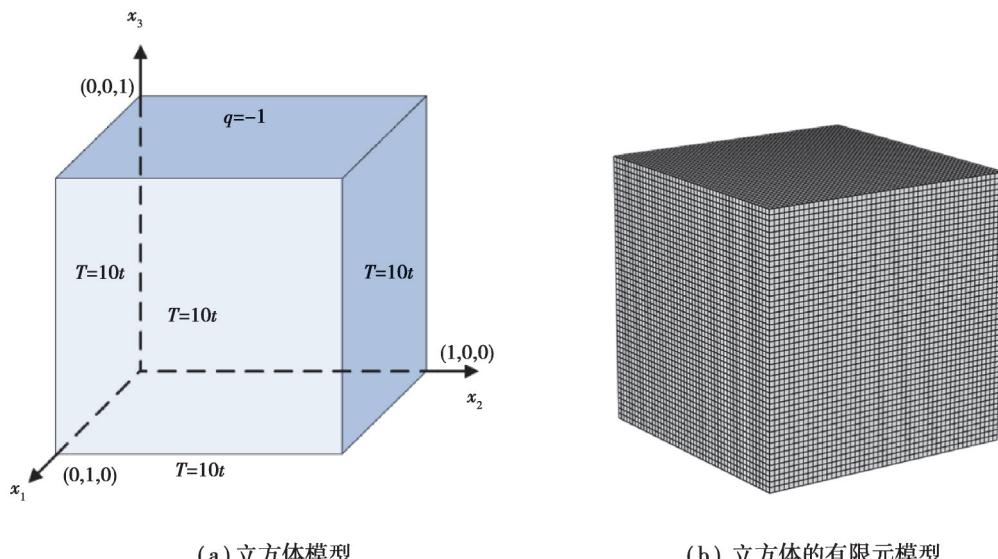


图7 三维热传导问题模型

Fig. 7 The model of 3D heat conduction problem

训练过程中, 损失函数 $L$ 、 $L_{\text{PDE}}$ 、 $L_{\text{IC}}$ 、 $L_{\text{BC}}$ 的收敛趋势如图8所示。图9~10分别展示了 $t=0.5$ 和 $t=1.0$ 时, 在 $x_1 = 0.1, 0.5, 0.9$ 处, PINN和FEM的计算结果和相对误差。

从图8可以看出, 随着训练次数的增加, 损失函数逐渐减小。经过20 000次训练后, 损失函数达到极小值。从图9~10可以看出, 采用PINN求解得到的温度场与FEM的计算结果非常接近, 相对误差较小。计算结果表明, PINN构造了关于温度的先验信息, 并将物理守恒定律和先验物理信息编码到人工神经网络中, 保证了计算结果的精度。

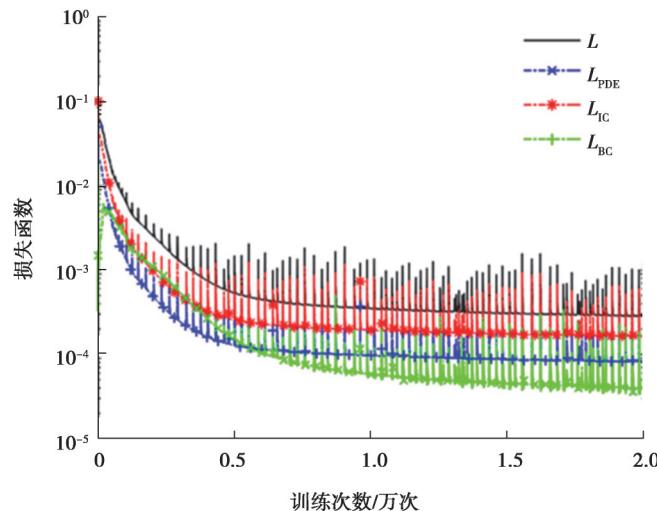
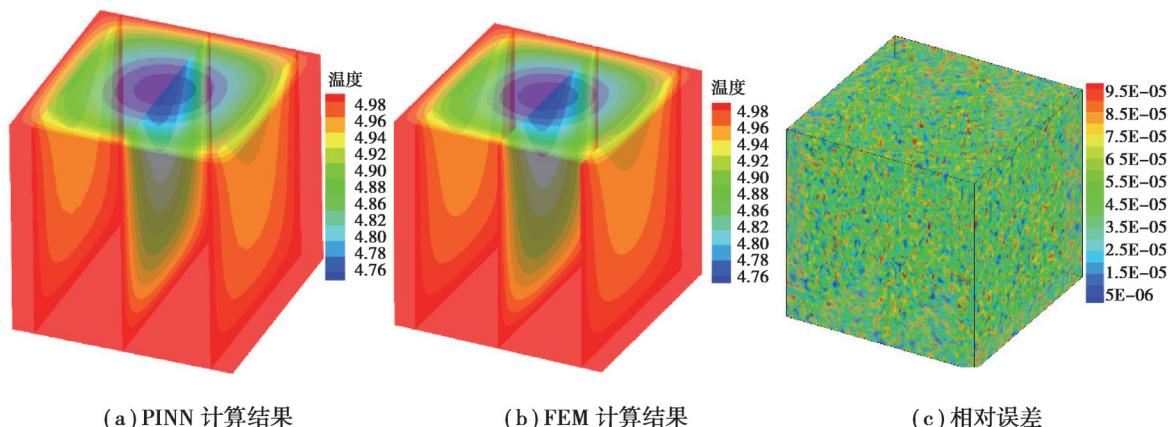
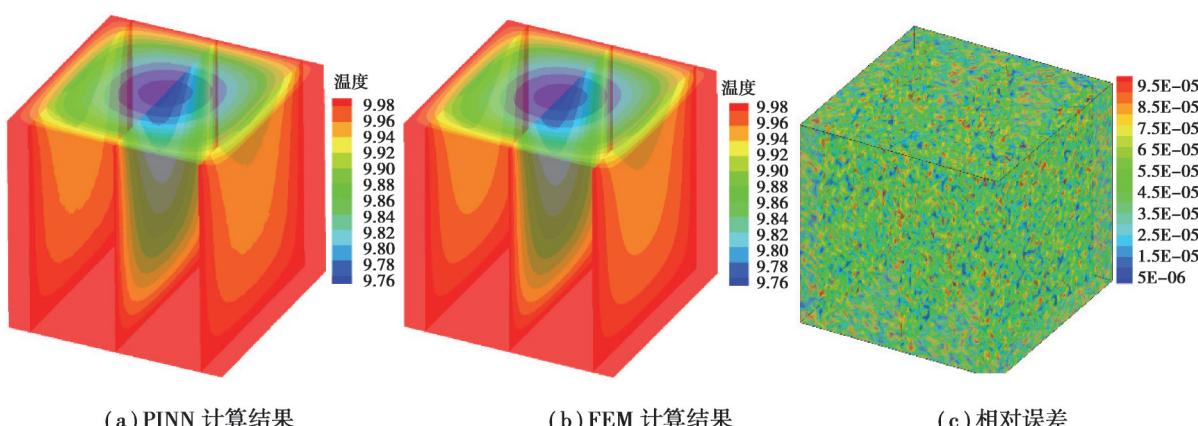


图 8 三维热传导正问题的损失函数

Fig. 8 The loss function for the 3-dimensional direct heat conduction problem

图 9  $t=0.5$  时,  $x_i=0.1, 0.5, 0.9$  的计算结果Fig. 9 The results on  $x_i=0.1, 0.5$  and 0.9 at  $t=0.5$ 图 10  $t=1.0$  时,  $x_i=0.1, 0.5, 0.9$  的计算结果Fig. 10 The results on  $x_i=0.1, 0.5$  and 0.9 at  $t=1.0$ 

### 3.2 PINN 识别与温度相关的导热系数

采用 PINN 识别非线性瞬态热传导问题的导热系数。需要注意的是, 测量温度  $T_{\text{mea}}^i$  包含测量误差, 可表示为

$$T_{\text{mea}}^i = T_{\text{exa}}^i + w\sigma, \quad (20)$$

式中:  $T_{\text{exa}}^i$  为精确温度,  $\sigma$  为标准差。 $w$  是在区间  $[-1, 1]$  上由 MATLAB 的 RAND 子程序生成的随机数。上标  $i$  为测点编号。

### 3.2.1 二维热传导反问题

如图 11 所示, 考虑一个带孔板, 边界条件为

$$\begin{cases} T = 10t, & \text{on } \Gamma_1, \\ T = 0, & \text{on } \Gamma_2, \\ q = 0, & \text{on } \Gamma_3. \end{cases} \quad (21)$$

初始条件为  $T_0 = 0, 0 \leq t \leq 1$ 。假设板的密度和比热恒定, 且  $\rho = c = 1$ 。随温度变化的导热系数可以表示为

$$\lambda(T) = e^{(k_1 T + k_2)}. \quad (22)$$

导热系数的精确参数为  $k_1 = -0.5, k_2 = 1.0$ 。通过测量域内的测点温度来识别未知参数  $k_1$  和  $k_2$ 。

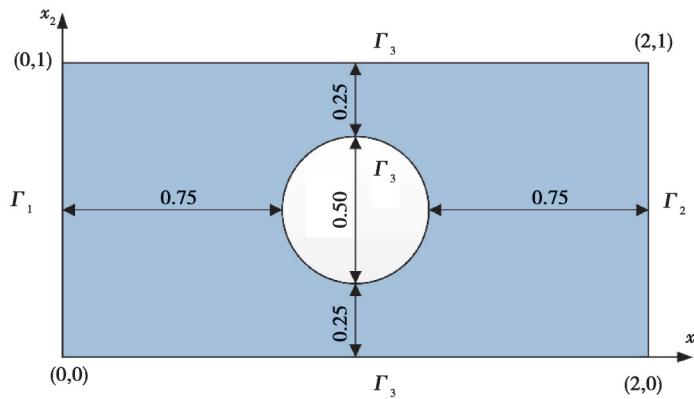


图 11 带孔板模型

Fig. 11 The model of the plate with a hole

首先, 讨论不同测点数量对计算结果的影响。在求解域内分别选取 3 000、5 000 和 7 000 个数据点作为测点。图 12 展示了选取不同测点数量时, 训练过程中损失函数的变化趋势。表 3 列出了选取不同测点数量时, 计算结果的相对误差。导热系数的识别结果如图 13 所示。

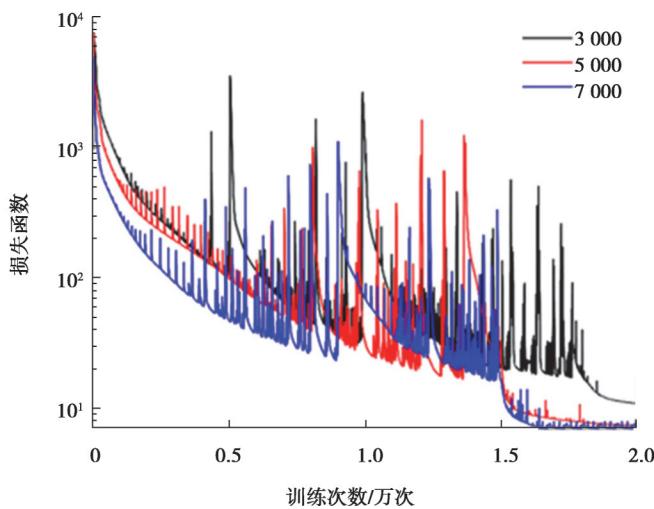


图 12 不同测点数量的损失函数

Fig. 12 The loss function with different measurement points

表 3 不同测点数量时未知参数的计算结果

Table 3 The results of unknown parameters with different measurement points

未知参数	3 000	RE/%	5 000	RE/%	7 000	RE/%
$k_1 = -0.5$	-0.504 3	0.86	-0.502 0	0.40	-0.501 1	0.22
$k_2 = 1.0$	1.026 1	2.61	1.011 4	1.14	1.024 2	2.42

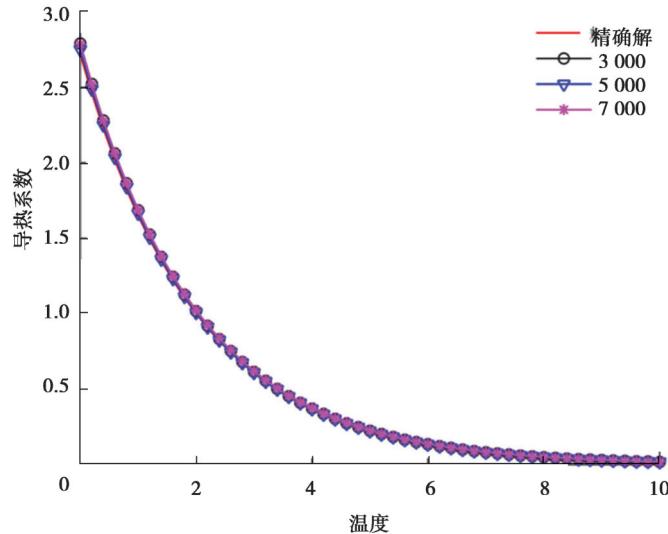


图 13 不同测点数量时导热系数的识别结果

Fig. 13 The estimated results of thermal conductivity with different measurement points

图 12 表明, 虽然损失函数的值在初始训练时较大, 但在训练过程中收敛较快。损失函数在训练 20 000 次后趋于稳定, 并收敛于固定值, 选取 7 000 个测点时的损失函数最小。由表 3 可知, 随着测点数量的增加, 反演结果更加精确。图 13 表明, 计算结果与精确解较为吻合, 相对误差较小。结果表明, PINN 能够有效识别未知的导热系数。

### 3.2.2 三维热传导反问题

如图 14 所示, 考虑一个带孔立方体, 其上、下表面的边界条件分别给定为  $T = 0$  和  $T = 10e^{-t}$ , 其余表面的边界条件为  $q = 0$ ,  $0 \leq t \leq 1$ 。

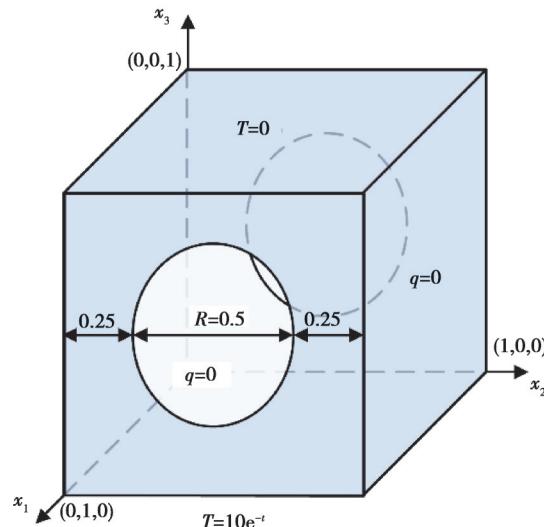


图 14 三维热传导反问题模型

Fig. 14 The model of 3D inverse heat conduction problem

假设导热系数为分段函数,可以表示为

$$\lambda(T) = \begin{cases} k_1 + k_2 T, & 0 \leq T \leq 5, \\ k_3 e^{k_4 T}, & T > 5. \end{cases} \quad (23)$$

已知导热系数的精确参数为  $k_1 = 1.0$ ,  $k_2 = -0.01$ ,  $k_3 = 1.0$ ,  $k_4 = -0.1$ 。在求解域内选取 2 000 个数据点作为测点,训练次数  $M=50\,000$ 。

讨论不同测量误差对计算结果的影响,测量误差分别取为 1%、3% 和 5%。图 15 展示了 4 个未知参数在不同测量误差下的计算过程。表 4 给出了不同测量误差下,PINN 的计算结果。识别的导热系数如图 16 所示。

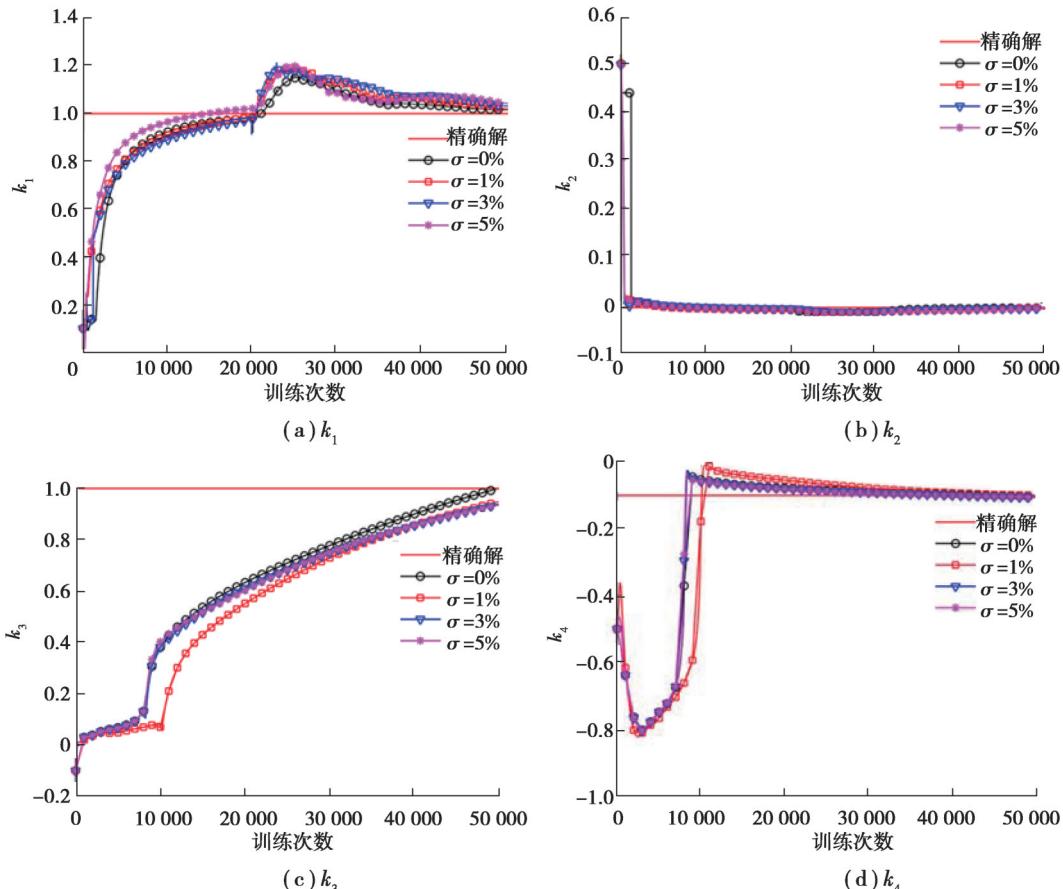


图 15 不同测量误差时未知参数的计算过程

Fig. 15 The calculation progress of unknown parameters with different measurement errors

表 4 不同测量误差时未知参数计算结果

Table 4 The results of unknown parameters with different measurement errors

未知参数	0%	RE/%	1%	RE/%	3%	RE/%	5%	RE/%
$k_1=1.0$	1.016 0	1.60	1.017 0	1.70	1.031 0	3.10	1.042 0	4.20
$k_2=-0.01$	-0.010 5	5.00	-0.010 9	9.00	-0.012 2	22.00	-0.012 4	24.00
$k_3=1.0$	1.001 0	0.10	0.987 5	1.25	0.976 3	3.37	0.956 3	5.37
$k_4=-0.1$	-0.100 6	0.60	-0.105 5	5.50	-0.106 3	6.30	-0.106 5	6.50

从图 15 可以看出,在训练过程中,随着训练次数的增加,未知参数收敛到一个固定值。由于测量误差的影响,收敛曲线会产生波动。同一参数在不同测量误差下的曲线不同,但曲线的变化趋势相同。由表 4 可知,随着测量误差的增大,计算结果的相对误差变大。从图 16 可以看出,计算结果与精确解吻合较好,当测量误差取为 5% 时,仍可得到较为精确的反演结果。这里需要指出,由于  $k_2$  精确解的数值较小,使得反演结果的相对误差较大,但是从图 16 依然可以看出,反演结果与精确解较为吻合。

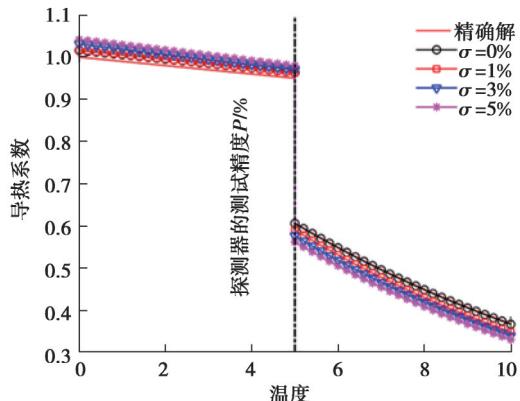


图 16 不同测量误差时导热系数的识别结果

Fig. 16 The estimated results of thermal conductivity with different measurement errors

## 4 结 论

基于 PINN 求解了非线性瞬态热传导问题并识别了随温度变化的导热系数。扩展了数据驱动方法的应用范围。

对于非线性瞬态热传导正问题, PINN 引入了关于温度的先验信息, 并将物理守恒定律和先验信息编码到人工神经网络中, 保证了求解精度。讨论了不同隐藏层数、神经元数量和域内数据点数量对计算结果的影响。数值算例表明, PINN 能够有效求解非线性瞬态热传导问题。随着隐藏层数、神经元数量和域内数据点数量的增加, 计算结果变得更加准确。

对于导热系数识别问题, 分别考虑了由指数函数和分段函数表示的与温度相关的导热系数, 并讨论了不同测点数量和测量误差对计算结果的影响。计算结果表明, PINN 能够有效的识别随温度变化的导热系数。随着测点数量的增加和测量误差的减小, 计算结果变得更加准确。

## 参考文献

- [ 1 ] Reddy J N. Introduction to the Finite Element Method, Fourth Edition[M]. 4th ed. New York: McGraw-Hill Education, 2019.
- [ 2 ] Raissi M, Perdikaris P, Karniadakis G E. Physics-informed neural networks: a deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations[J]. Journal of Computational Physics, 2019, 378: 686-707.
- [ 3 ] Karniadakis G E, Kevrekidis I G, Lu L, et al. Physics-informed machine learning[J]. Nature Reviews Physics, 2021, 3(6): 422-440.
- [ 4 ] Baydin A G, Pearlmutter B A, Radul A A, et al. Automatic differentiation in machine learning: a survey[J]. Journal of Machine Learning Research, 2018, 18: 1-43.
- [ 5 ] Yu Z B, Li K, Liu J, et al. An equivalent identification method for dynamic loads acting on nonlinear structures[J]. International Journal of Computational Methods, 2021, 18: 2150037.
- [ 6 ] Mohebbi F, Sellier M. Identification of space- and temperature-dependent heat transfer coefficient[J]. International Journal of Thermal Sciences, 2018, 128: 28-37.
- [ 7 ] Cui M, Zhao Y, Xu B B, et al. A new approach for determining damping factors in Levenberg-Marquardt algorithm for solving an inverse heat conduction problem[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2017, 107: 747-754.
- [ 8 ] Cui M, Zhao Y, Xu B B, et al. Inverse analysis for simultaneously estimating multi-parameters of temperature-dependent thermal conductivities of an Inconel in a reusable metallic thermal protection system[J]. Applied Thermal Engineering, 2017, 125: 480-488.
- [ 9 ] Mera N S, Elliott L, Ingham D B, et al. An iterative BEM for the Cauchy steady state heat conduction problem in an anisotropic medium with unknown thermal conductivity tensor[J]. Inverse Problems in Engineering, 2000, 8(6): 579-607.
- [ 10 ] 周焕林, 严俊, 余波, 等. 识别含热源瞬态热传导问题的热扩散系数[J]. 应用数学和力学, 2018, 39(2): 160-169.  
Zhou H L, Yan J, Yu B, et al. Identification of thermal diffusion coefficients for transient heat conduction problems with heat sources[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2018, 39(2): 160-169. (in Chinese)
- [ 11 ] 周焕林, 严俊, 余波, 等. 基于改进布谷鸟算法识别瞬态热传导问题的导热系数[J]. 计算物理, 2018, 35(2): 212-220.

- Zhou H L, Yan J, Yu B, et al. Identification of thermal conductivity for transient heat conduction problems by improved cuckoo search algorithm[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2018, 35(2): 212-220. (in Chinese)
- [12] 吴秀壮, 周焕林, 陈豪龙. 基于布谷鸟搜索算法的弹性力学边界条件识别[J]. 重庆大学学报, 2020, 43(6): 40-49.
- Wu X Z, Zhou H L, Chen H L. Identification of elasticity boundary conditions based on cuckoo search algorithm[J]. Journal of Chongqing University, 2020, 43(6): 40-49. (in Chinese)
- [13] Sun S C, Qi H, Yu X Y, et al. Inverse identification of temperature-dependent thermal properties using improved Krill Herd algorithm[J]. International Journal of Thermophysics, 2018, 39: 1-21.
- [14] Wang X W, Li H P, Li Z C. Estimation of interfacial heat transfer coefficient in inverse heat conduction problems based on artificial fish swarm algorithm[J]. Heat and Mass Transfer, 2018, 54(10): 3151-3162.
- [15] Li X, Ning S W, Liu Z L, et al. Designing phononic crystal with anticipated band gap through a deep learning based data-driven method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 361: 112737.
- [16] Chen H L, Wang K J, Du Z B, et al. Predicting the thermophysical properties of skin tumor based on the surface temperature and deep learning[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2021, 180: 121804.
- [17] 陈豪龙, 柳占立. 基于数据驱动模型求解热传导反问题[J]. 计算力学学报, 2021, 38(3): 272-279.
- Chen H L, Liu Z L. Solving the inverse heat conduction problem based on data driven model[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2021, 38(3): 272-279. (in Chinese)
- [18] Li X, Chen H L, Liu Z L, et al. Identifying varying thermal diffusivity of inhomogeneous materials based on a hybrid physics-informed neural network[J]. International Journal of Applied Mechanics, 2022, 14: 2250027.
- [19] 汤卓超, 傅卓佳. 基于物理信息的神经网络求解曲面上对流扩散方程[J]. 计算力学学报, 2023, 40(2): 216-222.
- Tang Z C, Fu Z J. Physics-informed Neural Networks for solving convection-diffusion equations on surfaces[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2023, 40(2): 216-222. (in Chinese)
- [20] Cai S Z, Wang Z C, Wang S F, et al. Physics-informed neural networks for heat transfer problems[J]. Journal of Heat Transfer, 2021, 143(6): 060801.
- [21] 陆至彬, 瞿景辉, 刘桦, 等. 基于物理信息神经网络的传热过程物理场代理模型的构建[J]. 化工学报, 2021, 72(3): 1496-1503.
- Lu Z B, Qu J H, Liu H, et al. Surrogate modeling for physical fields of heat transfer processes based on physics-informed neural network[J]. CIESC Journal, 2021, 72(3): 1496-1503. (in Chinese)

(编辑 郑洁)

---

## 上接第 44 页

- [9] 杜晖, 赵维钢. 重庆市某矿山地质环境问题及土地复垦研究[J]. 能源与环保, 2022, 44(12): 101-105, 112.
- Du H, Zhao W G. Study on geological environmental problems and land reclamation of a mine in Chongqing[J]. China Energy and Environmental Protection, 2022, 44(12): 101-105, 112. (in Chinese)
- [10] 周连兄, 包美春, 李丹雄. 北京市生产建设项目余方处理现状及管理对策[J]. 水土保持通报, 2017, 37(6): 209-213, 219.
- Zhou L X, Bao M C, Li D X. Treatment status of spare earthworks and its management countermeasure in municipal production and construction projects of Beijing city[J]. Bulletin of Soil and Water Conservation, 2017, 37(6): 209-213, 219. (in Chinese)
- [11] 陈鹏, 胡玉祥, 尹相宝, 等. 土石方工程多手段测量及计算方法对比分析[J]. 测绘与空间地理信息, 2022, 45(11): 213-216.
- Chen P, Hu Y X, Yin X B, et al. Comparative analysis of multi-means measurement and calculation methods in earthwork engineering[J]. Geomatics & Spatial Information Technology, 2022, 45(11): 213-216. (in Chinese)
- [12] 李树逊, 罗攀, 庞晓明, 等. 建筑垃圾资源化利用状况及其生命周期评价[J]. 复旦学报(自然科学版), 2013, 52(6): 817-821, 828.
- Li S X, Luo P, Pang X M, et al. Current status of reclamation and life cycle assessment in construction waste[J]. Journal of Fudan University (Natural Science), 2013, 52(6): 817-821, 828. (in Chinese)
- [13] 李建明, 王志刚, 张长伟, 等. 生产建设项目弃土弃渣特性及资源化利用潜力评价[J]. 水土保持学报, 2020, 34(2): 1-8.
- Li J M, Wang Z G, Zhang C W, et al. Evaluation of characteristics and resource utilization potential of residues in production and construction projects[J]. Journal of Soil and Water Conservation, 2020, 34(2): 1-8. (in Chinese)

(编辑 郑洁)