

doi: 10.11835/j.issn.1000-582X.2024.270

引用格式:张泽轩,张亮,葛艺芃,等.后屈曲张拉整体超材料的建模和优化设计[J].重庆大学学报,2025,48(4): 1-11.



后屈曲张拉整体超材料的建模和优化设计

张泽轩,张亮,葛艺芃,章俊

(重庆大学 航空航天学院,重庆 400044)

摘要:如何在获得低频带隙的同时实现较高的负载能力是超材料设计中值得关注的问题。通过利用杆件的后屈曲变形,提出了一种新型张拉整体超材料。后屈曲的引入使结构刚度发生软化,在有较高承载能力的同时,实现了低频隔振功能。利用椭圆积分法计算杆件后屈曲变形可以快速得到张拉整体单元的刚度。结合弹簧-质量双原子链模型,在周期性边界条件下利用 Bloch 定理对带隙进行计算。为了平衡带隙和负载能力,通过基于数据驱动的双目标优化方法获得了极限载荷和带隙下限的帕累托边界。经过优化设计后的超材料带隙频率可以低至 3 Hz,承载能力超过 100 N。与其他低频隔振超材料相比,在相同带隙频率下可以将极限承载能力提高 3.6 倍以上。

关键词:后屈曲变形;张拉整体超材料;带隙下限;极限载荷;多目标优化

中图分类号:O328

文献标志码:A

文章编号:1000-582X(2025)04-001-11

Modeling and optimization design of post-buckling tensegrity metamaterial

ZHANG Zexuan, ZHANG Liang, GE Yipeng, ZHANG Jun

(College of Aerospace Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

Abstract: Achieving a balance between low-frequency bandgaps and high load capacity is a critical challenge in metamaterial design. Leveraging the post-buckling behavior of bars, this study proposes a novel tensegrity metamaterial where post-buckling induces a reduction in structural stiffness, thereby enabling low-frequency vibration isolation while enhancing load-bearing capacity. The elliptic integral method is employed to rapidly compute post-buckling deformations and determine the stiffness of the tensegrity unit. Bandgap frequencies are calculated using Bloch's theorem under periodic boundary conditions, combined with a spring-mass diatomic chain model. To optimize both band gap and load capacity, a data-driven, dual-objective optimization method is employed, yielding the Pareto frontier for the metamaterial's ultimate load and lower bandgap limit. The results demonstrate that the optimized structure can achieve bandgap frequency as low as 3 Hz, with a load capacity exceeding 100 N. Compared to existing low-frequency vibration isolation metamaterials, the ultimate load capacity is increased by over 3.6 times at the same bandgap frequency.

Keywords: post-buckling deformation; tensegrity metamaterial; lower bandgap limit; ultimate load; multi-objective optimization

收稿日期:2024-03-12 网络出版日期:2024-05-31

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12272068)。

Supported by National Natural Science Foundation of China (12272068).

作者简介:张泽轩(1997—),男,硕士研究生,主要从事张拉整体超材料方向研究,(E-mail)zhangzx@cqu.edu.cn。

通信作者:葛艺芃,男,助理教授,(E-mail)y.ge@cqu.edu.cn。

在日常生活中,几赫兹至几十赫兹的低频振动普遍存在^[1-2],并对生产生活安全构成显著影响。作为一种特殊的人工结构,超材料特有的带隙特性^[3]使其在振动与噪声控制领域^[4-5]有着广泛的应用前景。如何设计用于低频隔振的超材料受到广泛关注,Oh等^[6]通过铰链连接质量块构造的低频带隙超材料,可以在不考虑承载力的情况下打开1 Hz的低频带隙。Zhou等^[7]通过正刚度元件和负刚度元件结合提出了准零刚度局域振子的概念,Cai等^[8]在此基础上利用屈曲梁和折叠梁设计了一种准零刚度局域共振超材料,在具有一定承载能力的情况下打开了超低频带隙。尽管低频隔振超材料的研究已经取得了显著进展,但目前仍然存在承载能力较低或无法承载、低频带隙调控困难、结构设计复杂等问题^[9]。

张拉整体作为一种性能优异的特殊结构^[10],具有重量轻、刚度可调、结构多样等特点,如何利用张拉整体设计超材料逐渐受到研究者关注。目前关于张拉整体超材料的研究包括预应力对带隙范围的影响^[11-12]、局部缺陷对带隙的影响^[13-14],以及非对称弹性波的传播^[15]等。上述研究都集中在结构的弹性阶段。然而,当外部载荷超过屈曲临界载荷时,结构会发生弯曲变形进入屈曲阶段^[16],研究表明屈曲的发生在提高结构的缓振能力和设计超材料方面都有显著积极影响。Rimoli等^[17]在模拟张拉整体机器人抗冲击性能时发现杆件的屈曲可以大幅提高结构抗冲击能力。Nan等^[18]利用后屈曲框架制作的亥姆霍兹谐振器可以实时调节低频吸声特性,由此可见,合理利用结构屈曲为超材料设计开拓了新的可能性。

基于数据驱动的优化方法是一种通过利用大量试验或仿真数据,结合机器学习和优化算法等实现系统设计和参数调整的高效优化方法,该方法已经在各领域获得了广泛的应用^[19-21]。在设计低频隔振超材料时,低频带隙和承载能力是2个需要同时关注的因素。低频带隙对实现良好的低频隔振效果至关重要,同时,具有一定的承载能力使超材料在实际应用中能够承受预期的载荷而不发生损毁。通过优化设计,可以在兼顾低频带隙和承载能力的情况下获得最佳的设计参数。

通过引入杆件后屈曲变形,笔者提出了一种后屈曲张拉整体超材料,能够在具有一定承载能力的情况下打开30 Hz以内的低频带隙。首先,通过椭圆积分法求解杆件后屈曲变形,结合张拉整体轴压平衡方程获得后屈曲张拉整体的静力学特性。然后,利用弹簧-质量双原子链模型,在周期性边界条件下利用Bloch定理对后屈曲张拉整体超材料的带隙进行计算。最后,为平衡承载和低频隔振能力,利用基于数据驱动的双目标优化对超材料进行优化设计,得到了极限载荷和带隙下限的帕累托边界,以此获得了一组最佳设计参数。

1 后屈曲张拉整体超材料

1.1 后屈曲张拉整体的静力学分析

以张拉整体三棱柱为基本构型。该张拉整体由3根斜杆**b**、3根斜拉索**s**和6根水平索**l**组成,其上下平面均为由水平索围成的正三角形,如图1所示。 h 表示张拉整体轴向高度, θ 表示上下平面的相对扭转角度,考虑竖直方向的单轴载荷。使用的材料和几何参数如表1所示。

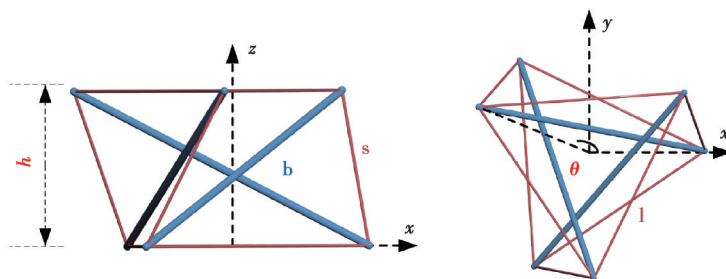


图1 张拉整体结构示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the tensegrity

表1 张拉整体材料和几何参数

Table 1 Tensegrity material and geometric parameters

l_s^0/cm	l_l^0/cm	R_b/cm	R_s/cm	E_b/GPa	E_s/GPa
5.00	7.00	0.35	0.05	0.40	1.80

l_s^n 和 l_l^n 分别表示斜拉索和水平索的自然长度, R_b 和 R_s 分别表示杆件和绳索的截面半径, E_b 和 E_s 分别表示杆件和绳索的弹性模量。杆件假定为玻璃纤维杆, 该类材料制成的杆件常用于制作雨伞伞骨、鱼竿等, 具有很高的柔韧性, 最大变形量可达原长的 30%, 远高于本文中张拉整体中所产生的屈曲变形, 可以避免结构在屈曲过程中出现破坏或失效。张拉整体是一种特殊的自平衡结构, 需要为其提供预应力来实现平衡状态。本文中张拉整体自平衡所需的内力由斜拉索的预伸长提供。以斜拉索预应变水平 P 来表征结构不同的自平衡状态。预应变水平定义为绳索伸长量与自然长度的比值, 即

$$P = \frac{l_s^0 - l_s^n}{l_s^n}, \quad (1)$$

式中: l_s^0 是施加预应变后的斜拉索长度, 同理, l_l^0 、 l_b^0 分别是水平索和斜杆受预应变后的长度。张拉整体在受到轴向加载时, 各个节点具有相同的受力情况。根据 Fraternali 等^[22]提出的轴向加载张拉整体几何非线性模型理论计算方法, 任选一个节点列出其平衡方程为

$$\begin{cases} x: \frac{l}{6} \left(2\sqrt{3}(x_s + 3x_l - x_b) + \sqrt{3}(x_s + 2x_b)\cos(\theta) - 3x_s\sin(\theta) \right) = 0, \\ y: \frac{l}{6} \left(\sqrt{3}(x_s + 2x_b)\sin(\theta) - 3x_s\cos(\theta) \right) = 0, \\ z: h(x_b - x_s) - \frac{F}{3} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

式中: x_s 、 x_l 、 x_b 分别表示斜拉索、水平索和杆件的力密度; F 是受到的轴向载荷的值, 将绳索受拉时的力密度定义为正, 杆件受压时的力密度定义为正。为获得各个构件在轴向压缩过程中的受力情况和位移变化, 在平衡方程的基础上添加一个由高度控制加载的控制方程。张拉整体轴向压缩理论计算方程为

$$\begin{cases} g_1 = f_1(l, h, \theta), \\ g_2 = f_2(l, h, \theta), \\ g_3 = f_3(l, h, \theta, F), \\ g_4 = h_0 - h. \end{cases} \quad (3)$$

将 h_0 作为自平衡状态下的张拉整体高度, 通过给定张拉整体当前高度 h , 以自平衡状态作为初始条件, 使用 Newton-Raphson 迭代法求解在当前高度 h 下斜拉索长度 l 、扭转角度 θ 和轴向压力 F 。具体参数的求解可参考 Fraternali 等^[22]的研究, 此处不再赘述。

为获得杆件屈曲后的力学特性, 使用椭圆积分法^[23]对杆件后屈曲变形进行计算。对于一个原长为 l_b^n 的杆件, 在轴向载荷 F_b 的作用下发生屈曲。屈曲后轴向长度为 l_b^0 , 轴向位移为 Δl_b , 起点转角为 a , 最大挠度为 δ , 如图 2 所示。

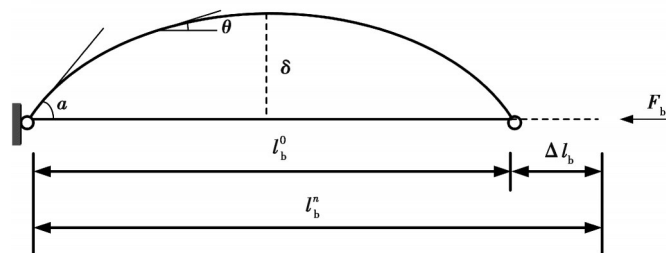


图2 杆件后屈曲变形示意图

Fig. 2 Schematic diagram of post-buckling deformation of a bar

通过椭圆积分法, 可以将构件原长表示为与载荷有关的第一类完全椭圆积分, 即

$$l_b^n = \frac{2}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2(\varphi)}} = \frac{2}{k} K(p), \quad (4)$$

式中: $k^2 = F_b/E_b I$, $p = \sin(a/2)$, $\sin(\theta/2) = p \sin(\varphi)$ 。由式(4)可知, 积分 K 只与 p 有关, 即起点转角 a 。当 a 和 l_b^n 确定时, 即可获得 k^2 的值, 从而得到此时的轴向载荷大小 F_b 。

进一步得到杆件最大挠度

$$\delta = \frac{2p}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi) d\varphi = \frac{2p}{k} \quad (5)$$

最后可以得到杆件屈曲后轴向位移 Δl_b 为

$$\Delta l_b = 2l_b^n - \frac{2}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - k^2 \delta^2 \sin^2(\varphi)} d\varphi, \quad (6)$$

式中: k^2 和 δ 均为已知量。通过式(6)可以求出杆件屈曲后的载荷与位移的关系, 如图3所示。

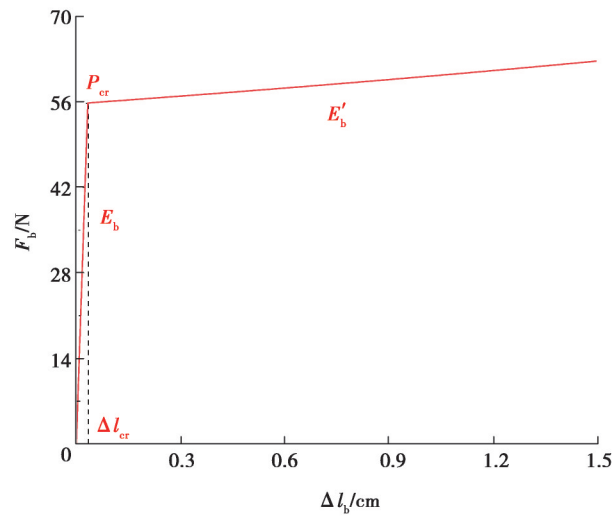


图3 杆件载荷-位移曲线

Fig. 3 Load-displacement curve of the bar

当杆件轴向载荷到达屈曲临界载荷 P_{cr} 时, 杆件进入屈曲状态, 此时轴向位移为 Δl_b 。由图3发现杆件屈曲后的载荷与位移的变化仍近似为线性关系, 故将杆件视为双线性本构关系。屈曲前阶段弹性模量为 E_b , 屈曲后阶段的弹性模量等效为 E'_b , 即

$$E_b = \begin{cases} E_b = \frac{F_b/A_b}{\Delta l_{cr}/l_b^n}, & F_b < P_{cr}, \\ E'_b = \frac{(F_b - P_{cr})/A_b}{(\Delta l_b - \Delta l_{cr})/l_b^n}, & F_b \geq P_{cr}, \end{cases} \quad (7)$$

将由式(7)所得杆件等效弹性模量代入到式(3)的杆件力密度 x_b 中, 通过迭代求解即可获得后屈曲张拉整体的静力学特性。杆件屈曲的临界载荷 P_{cr} 由压杆失稳的欧拉方程式(8)给定。

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_b I}{(l_b^n)^2} \quad (8)$$

通过上述方法, 以预应变水平 $P=0.005$ 的张拉整体为例, 绘制轴向载荷-位移曲线, 并使用 ABAQUS 建立有限元模型进行验证, 结果如图4(a)所示。在结构发生屈曲前, 张拉整体结构的轴向刚度较高, 且由于几何非线性的存在, 随着载荷的增加, 轴向刚度会小幅上升。而当杆件内力超过屈曲临界载荷时, 张拉整体进入后屈曲阶段, 张拉整体结构在压缩过程中扭转程度会增大, 当扭转角 θ 超过 180° 时, 杆件中部会发生接触^[22]。在计算过程中, 发现在所设定的参数范围内, 结构屈曲始终发生于杆件接触之前。在后屈曲阶段, 张拉整体的轴向刚度大幅下降, 但仍然为正刚度。这一特性为设计低频隔振张拉整体超材料提供了依据。

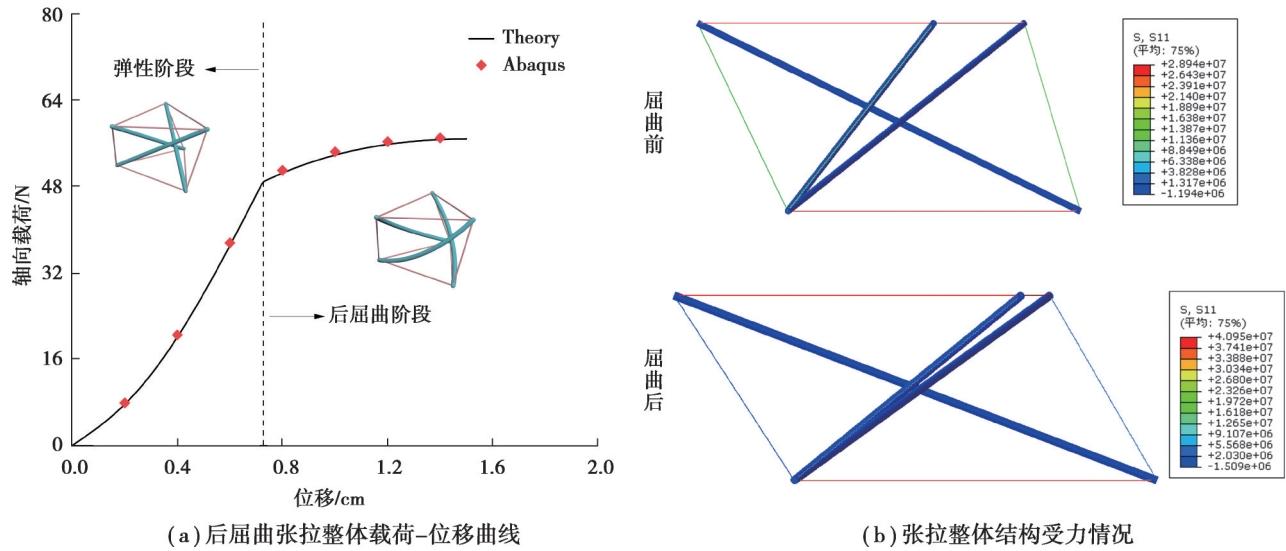


图 4 载荷-位移曲线和应力云图

Fig. 4 Load-displacement curve and stress cloud diagram

1.2 后屈曲张拉整体建模

本文所设计的张拉整体超材料如图 5 所示。虚线框中为一个周期单胞,由 2 个不同预应变水平的张拉整体和质量为 $M=0.2$ kg 的刚性圆盘组成。张拉整体为超材料提供刚度,刚性圆盘提供质量,并且假设扭矩不会由张拉整体传递至圆盘^[11]。为简化计算过程,将该超材料简化为图 5 所示的弹簧-质量双原子链模型^[24]。

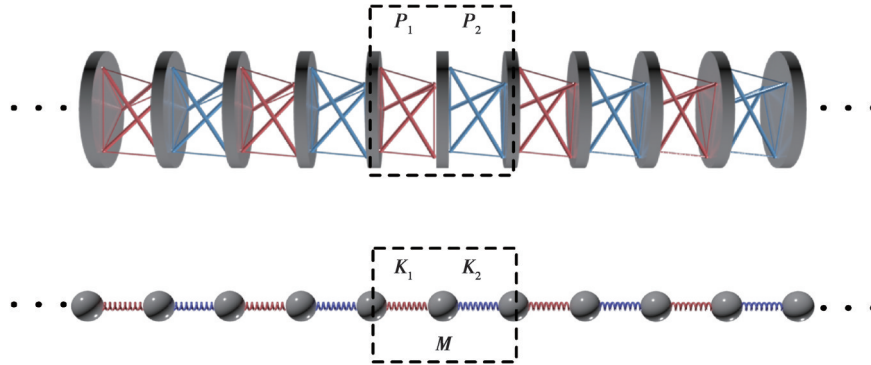


图 5 张拉整体超材料及双原子链模型示意图

Fig. 5 Schematic diagram of tensegrity metamaterial and diatomic chain model

考虑小振幅情况下沿超材料链传播的纵波,任取一个周期列出其运动学方程。

$$\begin{cases} M \frac{d^2 u_{1,n}}{dt^2} = K_1 (u_{2,n-1} - u_{1,n}) - K_2 (u_{1,n} - u_{2,n}), \\ M \frac{d^2 u_{2,n}}{dt^2} = K_2 (u_{1,n} - u_{2,n}) - K_1 (u_{2,n} - u_{1,n+1}), \end{cases} \quad (9)$$

式中: K_1 和 K_2 表示一个周期单胞中的 2 个张拉整体结构的等效刚度。表达式为

$$K = -\frac{3}{V_{33}^{-1}(l, h, \theta)}. \quad (10)$$

式(10)中的 V_{33} 来自式(3)计算所得的雅可比矩阵 V 。根据 Bloch 理论^[25]列出相邻周期间的位移关系

$$\begin{cases} u_{2,n-1} = e^{ika} u_{2,n}, \\ u_{1,n+1} = e^{-ika} u_{1,n}, \end{cases} \quad (11)$$

式中: a 表示一个单胞的长度,即晶格常数; K_1 和 K_2 表示张拉整体的轴向刚度。运动方程的谐波解^[26]

$$\begin{cases} u_{1,n} = A_1 e^{-i(\omega t - nka)}, \\ u_{2,n} = A_2 e^{-i(\omega t - (n+\frac{1}{2})ka)}, \end{cases} \quad (12)$$

式中: ω 表示振动波的频率; k 表示 Bloch 波矢; A_1, A_2 表示 2 个圆盘的振幅。联立式(9)~(12)得

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_1 - K_2 & K_1 e^{\frac{ika}{2}} + K_2 e^{-\frac{ika}{2}} \\ K_1 e^{-\frac{ika}{2}} + K_2 e^{\frac{ika}{2}} & -K_1 - K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

求解该特征值方程得

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{K_1 + K_2}{M} - \frac{1}{M} \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2K_1 K_2 \cos ka}, \\ \omega_2^2 = \frac{K_1 + K_2}{M} + \frac{1}{M} \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2K_1 K_2 \cos ka}. \end{cases} \quad (14)$$

式(14)描述了角频率与波矢 k 的关系,即超材料的色散关系。令波矢 k 在不可约布里渊区内取值计算即可获得该超材料的带隙。当波矢 k 取值在不可约布里渊区边界时($k = \pi/a$),频率将达到 2 个极限值,即带隙上限和带隙下限,由式(15)表示,在这 2 个频率之间的弹性波不能传播。

$$\begin{cases} f_{\text{upper}} = \frac{\omega_{\text{upper}}}{2\pi} = \sqrt{\frac{2K_2}{M}} / 2\pi, \\ f_{\text{lower}} = \frac{\omega_{\text{lower}}}{2\pi} = \sqrt{\frac{2K_1}{M}} / 2\pi. \end{cases} \quad (15)$$

根据 1.1 节中的后屈曲张拉整体载荷-位移特性和 1.2 节中的带隙表达式(15),以由 $P_1=0.005$ 和 $P_2=0.015$ 的张拉整体组成的超材料为例,分析其带隙和承载能力。

图 6(a)为超材料单个周期的载荷-位移曲线。由于 2 个不同预应变水平的张拉整体存在,随着载荷的增加,单胞中的 2 个张拉整体先后进入后屈曲。第 1 个张拉整体屈曲发生在约 35 N 的载荷下,第 2 个张拉整体屈曲发生在承载 49 N 时。图 6(b)为带隙范围随载荷的变化情况。在第 1 个张拉整体屈曲前,带隙下限会随着载荷的增加而逐渐提高,带隙的宽度也逐渐减小。第 1 个张拉整体屈曲发生后,带隙下限随着载荷的增加开始降低,而且带隙宽度也逐渐增大。结合图 6(a)发现,在第 2 个张拉整体屈曲后,带隙上下限几乎一致,基本失去隔振能力。但载荷仍然可以继续增加,说明该结构具有较好的稳定性,在超过极限载荷后仍未失效。

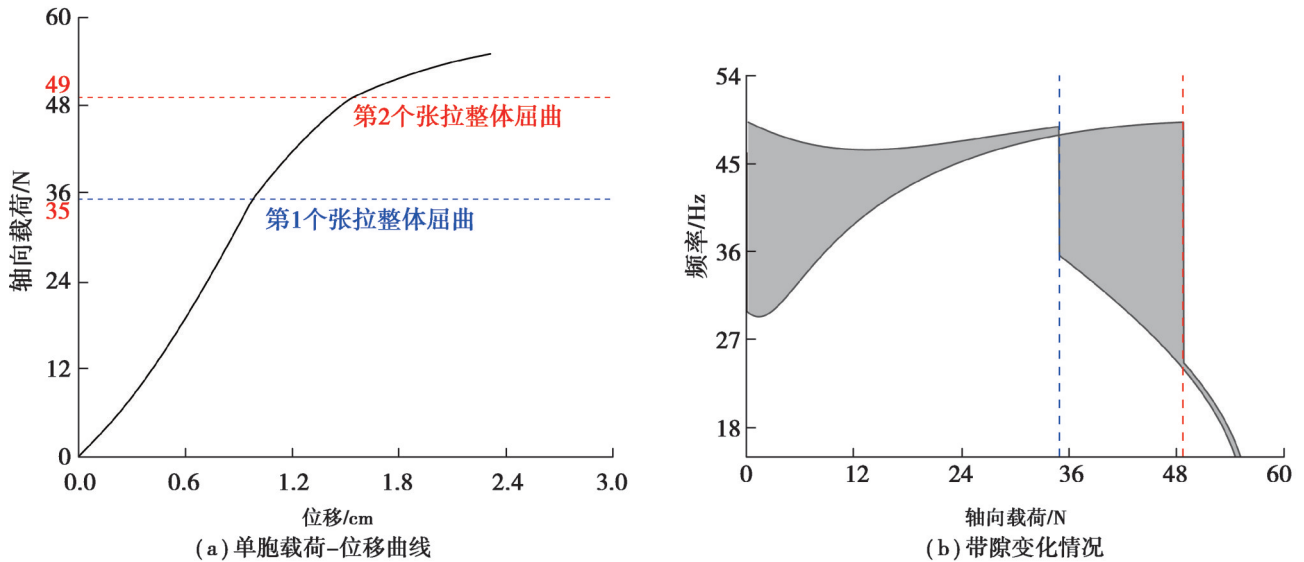


图 6 单胞载荷-位移曲线和超材料带隙图

Fig. 6 Load-displacement curve of unit cell and bandgap of metamaterial

为兼顾超材料的承载和隔振能力,以第 2 个张拉整体即将屈曲的临界状态作为极限状态,此时的载荷作为极限载荷,如图 7 所示。2 次屈曲之间的范围即为所提出的后屈曲张拉整体超材料。通过引入杆件的后屈曲变

形,可以在降低带隙频率的同时兼顾较高的承载能力,并且带隙宽度相较于未发生屈曲时也会有所增加。

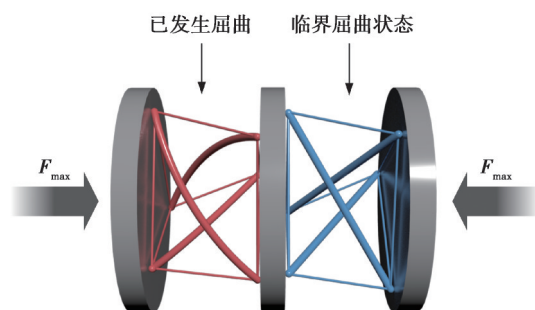


图 7 极限状态示意图

Fig. 7 Schematic diagram of ultimate load

2 带隙与极限载荷的优化设计

2.1 双目标优化框架

超材料的低频带隙对实现良好的低频隔振效果至关重要,同时具有一定的承载能力使超材料在实际应用中能够承受预期的载荷而不发生损毁。为使超材料能够兼顾低频隔振能力和极限承载能力,需要对其进行双目标优化。

基于数据驱动的优化方法是一种通过利用大量试验或仿真数据,结合机器学习和优化算法等实现系统设计和参数调整的高效优化方法。文献[20]将基于数据驱动的优化框架应用于张拉整体机械臂的设计,实现了机械臂的精确驱动,具体优化方法可参考该研究。建立该优化框架包括:实验设计、计算分析、机器学习和双目标优化。实验设计需要确定所关注的目标变量以及与之相关的因素,将其作为设计变量。然后,根据前文所得到的理论计算分析,生成样本进行机器学习。最后,优化得到更好的设计方案。优化流程如图 8 所示。

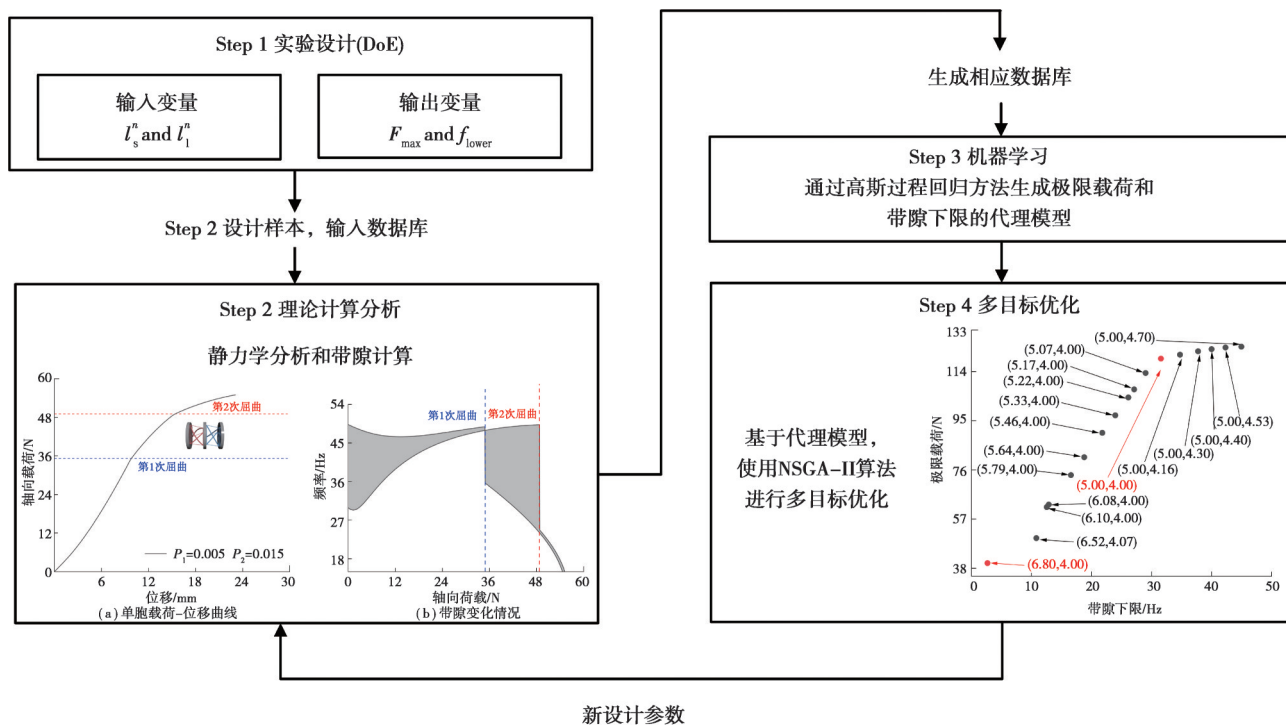


Fig. 8 Flowchart of multi-objective optimization

多目标优化是在给定约束条件下找到一组解,这些解在多个目标方向上都是尽可能好的,Bessa等^[27]在研究中曾综合对比了多种多目标优化算法。本文的优化目标是一个黑盒函数,无法直接获得其梯度信息。Deb等^[28]提出的非支配排序遗传算法 II(NSGA-II)是一种非梯度的优化算法,可以很方便地解决难以获得梯度的优化问题,并且 NSGA-II 在处理多目标优化问题时具有很强的通用性和很高的计算效率,这里采用该算法进行优化。

NSGA-II 算法通过非支配排序和拥挤度距离策略,在搜索中寻找均匀分布的高质量解集。NSGA-II 算法的具体步骤为:首先,创建初始种群,对当前种群进行快速非支配排序,确定个体优劣,在每个前沿内计算个体拥挤距离,通过选择、交叉和变异操作生成新的种群;然后,将父代种群和子代种群合并,对合并后的种群再次进行快速非支配排序,根据非支配排序和拥挤距离选择下一代种群;最后,循环上述操作直至满足终止条件(即达到最大迭代次数)。该算法可以在 Python 程序中调用 pymoo 库实现,在计算过程中需要设定的基本参数有种群大小、交叉概率、变异概率、迭代次数等。选择合适的种群大小可以避免陷入局部最优,交叉概率和变异概率的合理选择有助于维持种群多样性,设置足够的迭代次数可以使算法有足够的迭代空间,确保解的收敛。NSGA-II 算法的相关参数设置如表 2 所示。

表 2 NSGA-II 算法相关参数
Table 2 Related parameters of NSGA-II algorithm

相关参数	种群大小	迭代次数	交叉概率	变异概率
参数值	20	100	0.9	0.9

2.2 参数设计与代理模型建立

当 l_s^n 和 l_l^n 确定时,根据平衡方程式(2)和几何关系可以求出杆长,从而确定张拉整体构型,故将 l_s^n 和 l_l^n 作为优化设计变量。设计空间为

$$l_l^n = [4, 10] \text{ cm}, l_s^n = [5, 10] \text{ cm}. \quad (16)$$

优化目标为带隙下限 f_{lower} 和极限载荷 F_{max} 。为避免超材料的晶格常数过大,控制单个周期的长度,对组成超材料的张拉整体自平衡状态下轴向高度进行约束。综上所述,可以写出该多目标优化问题的优化列式为

$$\begin{cases} \max F_{\text{max}} = q_1^*(l_l^n, l_s^n), \\ \min f_{\text{lower}} = q_2^*(l_l^n, l_s^n), \\ \text{s.t. } h = \sqrt{(l_s^n)^2 + \frac{(\sqrt{3}-2)}{3} (l_l^n)^2} \leq 8 \text{ cm}, \end{cases} \quad (17)$$

式中, q_1^* 和 q_2^* 为极限载荷和带隙下限的代理模型。多目标优化需要多次重复计算获得最优解,而通过建立代理模型可以极大节省多次重复计算的时间成本。

为建立代理模型,需要生成用于训练的数据库 $[(\mathbf{x}^1, \mathbf{q}^1), (\mathbf{x}^2, \mathbf{q}^2), \dots, (\mathbf{x}^N, \mathbf{q}^N)]$, 其中 $\mathbf{x} = [x_1, x_2] = [l_l^n, l_s^n]$, $\mathbf{q} = [F_{\text{max}}, f_{\text{lower}}]$ 。 F_{max} 用于训练 q_1^* , 可以通过式(1)~(8)计算求得。 f_{lower} 用于训练 q_2^* , 可由式(14)求得。用于训练数据代理模型 q_1^* 和 q_2^* 的数据库大小均为 $N=200$ 。由于带隙下限 f_{lower} 和极限载荷 F_{max} 的代理模型计算过程相同,均采用高斯过程回归方法^[29],此处仅以极限载荷 F_{max} 的代理模型为例,其模型表示为

$$q_1^* = f[\mathbf{x}^*] + \epsilon^*, \quad (18)$$

式中: $f[\mathbf{x}^*]$ 是 \mathbf{x}^* 由高斯过程回归近似的未知函数值; ϵ^* 为依赖于输入点 \mathbf{x}^* 的标准差为 σ 的加性高斯噪声。预测值与已知数据点的关系可以写为如下所示的多元高斯分布形式。

$$\begin{bmatrix} q \\ \hat{q}_1^* \end{bmatrix} \sim N \left(0, \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{R} & \mathbf{k}^* \\ \mathbf{k}^{*\top} & k[\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*] \end{bmatrix} \right), \quad (19)$$

式中: $\mathbf{k}^* = \{k[\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^*], \dots, k[\mathbf{x}^N, \mathbf{x}^*]\}$ 为所有由训练点和新点 \mathbf{x}^* 组成的核函数向量; \mathbf{K} 为训练点的核矩阵; \mathbf{R} 为对角

噪声矩阵;每一项包含各自输入点处感兴趣量 q 的方差。由此,可写出新点的兴趣量 q_i^* 的预测均值和方差分别为

$$\text{mean}[\hat{q}_i^*] = \mathbf{k}_i^T (\mathbf{K} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{q}, \quad (20)$$

$$\text{cov}[\hat{q}_i^*] = k[\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*] - \mathbf{k}_i^T (\mathbf{K} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{k}_i. \quad (21)$$

在建立代理模型时采用平方指数核函数,它已经在研究中被广泛使用^[19],该核函数表达式为

$$k[\mathbf{x}', \mathbf{x}'] = \eta^2 \exp \left[\sum_{k=1}^2 -\frac{1}{2\lambda_k^2} (x'_k - x_k)^2 \right]. \quad (22)$$

最后,通过统计学参数 R^2 来判断代理模型的准确性, R^2 的值越接近1则说明代理模型准确性越高。经验证,2个代理模型的 R^2 值分别为0.999 94和0.999 98,准确度已经可以满足后续优化过程。

3 优化结果讨论

将建立的代理模型引入到NSGA-II算法中进行多目标优化,画出后屈曲张拉整体超材料带隙下限和极限载荷的帕累托边界,如图9(a)所示。帕累托边界的下方是所有可行的取值,而边界上则为带隙下限和极限载荷的最优解集。图9(b)为多目标优化迭代次数与超体积的变化情况,纵轴是每次迭代后的超体积。超体积是衡量帕累托边界覆盖程度的指标,当超体积趋于稳定时说明帕累托边界较好地收敛到了全局最优解。如图9(b)所示,在经过约20次迭代后,超体积趋于稳定,说明结果已经收敛。

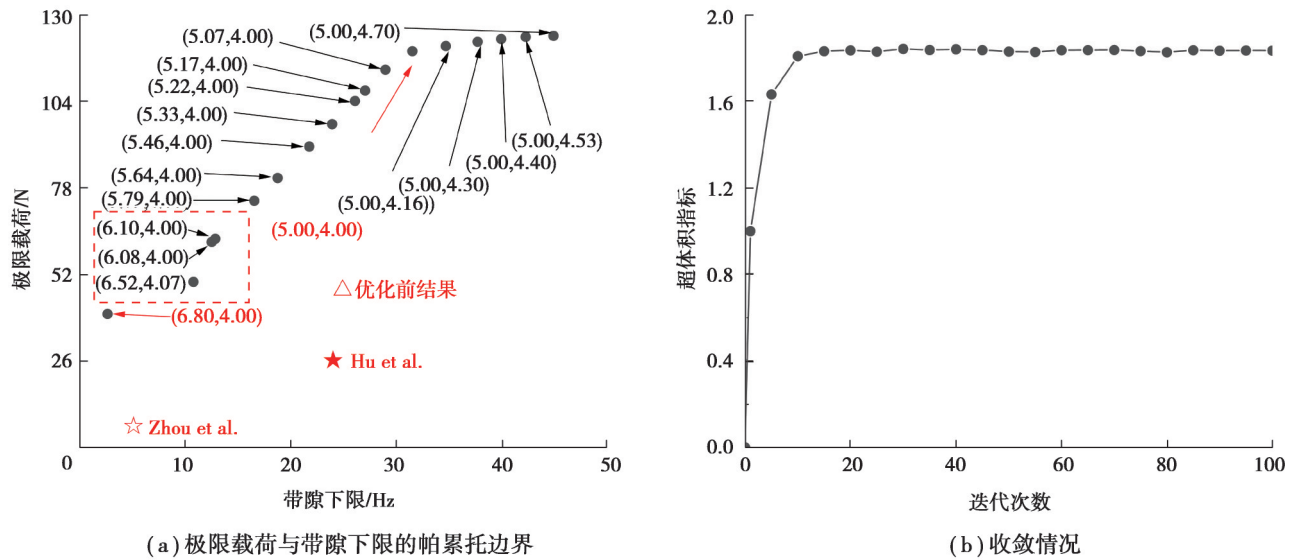


图9 帕累托边界图和收敛曲线

Fig. 9 Pareto frontier graph and convergence curve

当 l_1^n 和 l_s^n 取值为(6.80, 4.00)cm时,该超材料具有低至大约3 Hz的带隙频率,同时具有约40 N的极限载荷;而当 l_1^n 和 l_s^n 取值为(5.00, 4.00)cm时,具有约30 Hz的带隙下限和约120 N的极限载荷。由此可见,通过合理选择结构参数可以实现带隙与承载能力的大范围调节。在设计后屈曲张拉整体超材料时,可以根据目标隔振频率和承载能力,参考帕累托边界,自行选择恰当的几何尺寸。如某设备隔振台,承受到50~70 N的载荷,同时,要求过滤20 Hz以下的振动频率,则可以在帕累托边界上选择满足目标载荷和频率的点,如图9(a)虚线框中所示。

图9(a)中标注了优化后的后屈曲张拉整体超材料的极限载荷和带隙下限的情况,以及一些以往研究所提出的具有承载能力的低频隔振超材料。Zhou等^[30]提出的准零刚度超材料在具有约1.5 N承载能力时可以实现最低5 Hz的隔振频率。Hu等^[31]所设计的超材料在具有约25 N承载能力时可以实现最低25 Hz的隔振频率,具体参数如表3所示。这些结果均在帕累托边界的下方,即通过优化可以在具有以往低频隔振超材料所能实现的隔振频率的同时获得更好的承载能力。以Hu等^[31]所提出的超材料为例进行对比,在具有相同的

带隙下限频率时,本文所提出的超材料经过优化设计后,承载能力提高了约 3.6 倍。

表 3 本文工作与以往研究的相关参数
Table 3 Relevant parameters of this paper and other studies

研究	晶格常数/cm	弹性模量/GPa	载荷/N	带隙下限/Hz
本文工作	7.50	绳索:1.8;杆件:0.4	100.0	25.0
Zhou 等 ^[30]	5.58	3.15	1.5	5.2
Hu 等 ^[31]	6.00	1.72	25.0	25.0

4 结束语

针对可承载低频隔振超材料的设计问题,提出了一种考虑杆件屈曲变形的新型张拉整体超材料。该超材料通过利用屈曲所带来的刚度软化,在具有一定承载能力的情况下,可以打开 30 Hz 以下的极低频带隙。首先,通过对后屈曲张拉整体进行静力学分析,获得其刚度特性;然后,利用基于双原子链的简化模型计算后屈曲张拉整体超材料的带隙特性;最后,将张拉整体的水平索和斜拉索长度作为设计变量,通过基于数据驱动的多目标优化方法优化后屈曲张拉整体超材料的带隙和承载特性。优化后的帕累托边界提供了一组最优结构参数,可以使该超材料在具有较高的承载能力的同时,获得极低的带隙频率。

参考文献

- [1] Berglund B, Hassmén P, Job R F. Sources and effects of low-frequency noise[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1996, 99(5): 2985-3002.
- [2] Griffin M J, Erdreich J. Handbook of human vibration[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1991, 90(4): 2213.
- [3] Lai Y, Zhang X D, Zhang Z Q. Engineering acoustic band gaps[J]. Applied Physics Letters, 2001, 79(20): 3224-3226.
- [4] Romeo F, Luongo A. Vibration reduction in piecewise bi-coupled periodic structures[J]. Journal of Sound Vibration, 2003, 268(3): 601-615.
- [5] Yu D L, Wen J H, Zhao H G, et al. Vibration reduction by using the idea of phononic crystals in a pipe-conveying fluid[J]. Journal of Sound Vibration, 2008, 318(1/2): 193-205.
- [6] Oh J H, Assouar B. Quasi-static stop band with flexural metamaterial having zero rotational stiffness[J]. Scientific Reports, 2016, 6: 33410.
- [7] Zhou J X, Wang K, Xu D L, et al. Local resonator with high-static-low-dynamic stiffness for lowering band gaps of flexural wave in beams[J]. Journal of Applied Physics, 2017, 121(4): 044902.
- [8] Cai C Q, Zhou J X, Wu L C, et al. Design and numerical validation of quasi-zero-stiffness metamaterials for very low-frequency band gaps[J]. Composite Structures, 2020, 236: 111862.
- [9] 王凯,周加喜,蔡昌琦,等. 低频弹性波超材料的若干进展[J]. 力学学报, 2022, 54(10): 2678-2694.
Wang K, Zhou J X, Cai C Q, et al. Review of low-frequency elastic wave metamaterials[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2022, 54(10): 2678-2694. (in Chinese)
- [10] Kan Z Y, Peng H J, Chen B, et al. Nonlinear dynamic and deployment analysis of clustered tensegrity structures using a positional formulation FEM[J]. Composite Structures, 2018, 187: 241-258.
- [11] Amendola A, Krushynska A, Daraio C, et al. Tuning frequency band gaps of tensegrity mass-spring chains with local and global prestress[J]. International Journal of Solids and Structures, 2018, 155: 47-56.
- [12] Wang Y T, Liu X N, Zhu R, et al. Wave propagation in tunable lightweight tensegrity metastructure[J]. Scientific Reports, 2018, 8: 11482.
- [13] Yin X, Zhang S, Xu G K, et al. Bandgap characteristics of a tensegrity metamaterial chain with defects[J]. Extreme Mechanics Letters, 2020, 36: 100668.
- [14] Zhang L Y, Yin X, Yang J, et al. Multilevel structural defects-induced elastic wave tunability and localization of a tensegrity metamaterial[J]. Composites Science and Technology, 2021, 207: 108740.
- [15] Wang Y T, Zhao W J, Rimoli J J, et al. Prestress-controlled asymmetric wave propagation and reciprocity-breaking in tensegrity

- metastructure[J]. *Extreme Mechanics Letters*, 2020, 37: 100724.
- [16] Zhang Q, Jiang B, Xiao Z M, et al. Post-buckling analysis of compressed rods in cylinders by using dynamic relaxation method[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, 159: 103-115.
- [17] Rimoli J J. A reduced-order model for the dynamic and post-buckling behavior of tensegrity structures[J]. *Mechanics of Materials*, 2018, 116: 146-157.
- [18] Nan G, Qu S C, Li J, et al. Harnessing post-buckling deformation to tune sound absorption in soft Helmholtz absorbers[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, 208: 106695.
- [19] Bessa M A, Bostanabad R, Liu Z, et al. A framework for data-driven analysis of materials under uncertainty: countering the curse of dimensionality[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 320: 633-667.
- [20] Ge Y P, He Z G, Li S F, et al. A machine learning-based probabilistic computational framework for uncertainty quantification of actuation of clustered tensegrity structures[J]. *Computational Mechanics*, 2023, 72(3): 431-450.
- [21] Zhao J Y, Dong Y L, Ye C. Optimization of residual stresses generated by ultrasonic nanocrystalline surface modification through analytical modeling and data-driven prediction[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, 197: 106307.
- [22] Fraternali F, Carpentieri G, Amendola A. On the mechanical modeling of the extreme softening/stiffening response of axially loaded tensegrity prisms[J]. *Journal of Mechanics Physics of Solids*, 2015, 74: 136-157.
- [23] 铁摩辛柯 S P, 盖莱 J M. 弹性稳定理论[M]. 张福范, 译. 北京: 科学出版社, 1965.
Timoshenko S P, Gere J M. *Theory of elastic stability*[M]. Zhang F F, trans. Beijing: Science Press, 1965. (in Chinese)
- [24] Meaud J, Che K K. Tuning elastic wave propagation in multistable architected materials[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, 122/123: 69-80.
- [25] Jensen J S. Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass-spring structures[J]. *Journal of Sound Vibration*, 2003, 266(5): 1053-1078.
- [26] Herbold E B, Kim J, Nesterenko V F, et al. Pulse propagation in a linear and nonlinear diatomic periodic chain: effects of acoustic frequency band-gap[J]. *Acta Mechanica*, 2009, 205(1): 85-103.
- [27] Bessa M A, Pellegrino S. Design of ultra-thin shell structures in the stochastic post-buckling range using Bayesian machine learning and optimization[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, 139/140: 174-188.
- [28] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, 6(2): 182-197.
- [29] Lee S, Lim Y, Galdos L, et al. Gaussian process regression-driven deep drawing blank design method[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2024, 265: 108898.
- [30] Zhou J X, Pan H B, Cai C Q, et al. Tunable ultralow frequency wave attenuations in one-dimensional quasi-zero-stiffness metamaterial[J]. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2021, 17(2): 285-300.
- [31] Hu H Y, Hu G K, Wang Y T, et al. Isolating low-frequency vibration via lightweight embedded metastructures[J]. *Scientia Sinica Physica, Mechanica & Astronomica*, 2020, 50(9): 090010.

(编辑 郑洁)