

doi: 10.11835/j.issn.1000-582X.2024.268

引用格式: 刘俊, Feodor M. Borodich, 吕鼎, 等. 双材料含椭圆热夹杂的平面应变问题解析解[J]. 重庆大学学报, 2025, 48(4): 40-53.



双材料含椭圆热夹杂的平面应变问题解析解

刘俊^{1a}, Feodor M. Borodich^{1a}, 吕鼎², 金晓清^{1a,1b}

(1. 重庆大学 a. 航空航天学院; b. 机械传动国家重点实验室, 重庆 400044;

2. 韦恩州立大学 生物医学工程系 底特律 48201)

摘要: 以含椭圆热夹杂的结合双材料为研究对象, 对其平面应变问题进行解析求解和算例讨论。根据 Eshelby 提出的夹杂分析方法, 推导了椭圆夹杂受热本征应变作用引起的弹性场封闭解析解。受 Dundurs 参数启发, 当前解析解引入了 1 个新的材料参数(范围 -1~1)和 5 个类张量表达式来简洁表达, 使之便于实际应用。针对典型的圆形夹杂问题, 解析解在形式上可以得到极大简化, 且根据得到的解析解给出了双材料界面上位移、应变和应力的跳跃条件。通过调整双材料的杨氏模量和泊松比, 当前解可以退化为全平面或半平面含椭圆热夹杂的解析解。本文的数值解与已发表文献中的数值解的一致性证实了所推导解析解的正确性。

关键词: 椭圆热夹杂; 完美结合界面; 双材料; 解析解

中图分类号: O34

文献标志码: A

文章编号: 1000-582X(2025)04-040-14

A closed-form solution to an elliptic cylindrical thermal inclusion in a bi-material under plane strain

LIU Jun^{1a}, Feodor M. Borodich^{1a}, LYU Ding², JIN Xiaoqing^{1a,1b}

(1a. College of Aerospace Engineering; 1b. State Key Laboratory of Mechanical Transmissions, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China; 2. Department of Biomedical Engineering, Wayne State University, Detroit 48201, America)

Abstract: This article addresses the plane strain problem of a bi-material system containing an elliptical cylindrical thermal inclusion. Using Eshelby's inclusion analysis method, we derive closed-form analytical solutions for the elastic field induced by the thermal inclusion. Inspired by Dundurs' parameters, we introduce a new material parameter (ranging from -1 to 1) and five tensorially structured expressions to succinctly represent the analytical solution, facilitating its practical applications. For circular inclusion scenarios, the analytical solution simplifies significantly, and we derive explicit jump conditions for displacement, strain, and stress at the bonded interface of the bi-material. By adjusting the Young's moduli and Poisson's ratios of the bi-material, the solution can reduce to cases of a full or half-plane containing a thermal elliptical inclusion. The accuracy of the proposed solution is validated through consistency with previously published analytical results and by matching

收稿日期: 2024-04-23 网络出版日期: 2024-06-03

基金项目: 超常环境非线性力学全国重点实验室开放基金项目。

Supported by Opening Fund of State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics.

作者简介: 刘俊(1997—), 男, 硕士研究生, 主要从事固体力学方向的研究, (E-mail) 2654107140@qq.com。

通信作者: 金晓清, 男, 博士, 教授, (E-mail) jinxq@cqu.edu.cn。

numerical solutions from the literature, confirming the correctness and reliability of the derived analytical expressions.

Keywords: elliptic thermal inclusion; perfect bonded interface; bi-material; closed-form solution

双材料问题的研究在许多工程实际中有重要应用,例如,芯片传感器^[1]、压电层和压磁层^[2-3]。双材料的理论研究经常使用Dundurs参数^[4],即 α 和 β 。Dundurs指出,双材料的应力和应变解可以通过Dundurs参数的组合来表示。将双材料中含热夹杂的解析解与Dundurs参数相结合,可以厘清解对材料参数的相关性、简化公式并促进解析解的推广^[5]。

自从Eshelby取得突破性成果以来^[6],关于材料中含夹杂物的各种问题也得到了广泛的研究^[7-8]。然而,大多数研究都集中在全空间的夹杂物上,相较之下,对具有更广泛适用性的双材料的研究相对较少。结合界面周围弹性场的分布随着结合条件的变化而变化,如果考虑到椭球体夹杂的影响,弹性场将变得更加复杂^[9-10]。Mindlin等^[11]借助Galerkin矢量应力函数,获得了无限半空间内含球形热夹杂物的弹性场解析解。1965年,Dundurs等^[12]通过对已知半空间解的叠加,得到了由2个无摩擦接触结合半空间中点力产生的弹性场解。

Chiu^[13]利用了伽辽金矢量法,得到了全空间长方体夹杂应力的三重傅里叶积分表达式,并根据胡克定律和几何方程求出应变场和位移场。基于镜像法,将全空间与镜像空间中的夹杂物分别产生的弹性场进行叠加,再将对称表面上的残余应力消除,即获得半空间长方体夹杂的应力场和表面位移场^[14]。Ju等^[15]通过引入共焦虚拟椭球的外单位法向量,推导出了全空间椭球夹杂外场点的Eshelby张量。2022年,李璞等^[16]等利用数值等效夹杂算法与快速傅里叶变换求解了全空间内夹杂物与刃型位错的交互能。谢东东^[17]研究了半平面矩形夹杂弹性场的基本单元解,通过结合叠加原理和FFT算法可求解出半平面含任意夹杂的数值解。即使是矩形夹杂解的二重积分结果也很复杂,为了更加简洁明了地呈现出最终的单元解,谢东东在推导半平面矩形夹杂基本单元解时引入了金晓清等^[18]2016年提出的一种单元解的记号方法。

双材料中存在的热夹杂往往会影响其机械性能,从而影响整体的可靠性和疲劳寿命。因此,推导双材料含热夹杂的解析解可以从微观力学角度理解此类材料的潜在失效机制,并为优化相应的材料性能提供理论基础^[19-20]。早期的学者们研究并推导了在2个完全结合或无摩擦接触结合半空间中由热膨胀引起的弹性场的解^[21-23],这些解相较于Mindlin推导出的半空间基本解更为复杂。Yu等^[24]推导了2个完全结合半空间的Galerkin矢量应力函数,并使用势函数及其导数来简化位移和应力的隐式表达式。另外,Walpole^[25]推导出了双材料中均匀夹杂物产生的弹性场的隐式解析解。

2016年,Wang等^[26]推导出了2个完全结合半空间之一中含有基本立方体夹杂的弹性场的解析解,Yu等^[10]推导出了2个无摩擦结合半空间之一中含基本立方体夹杂物的弹性场的解析解。Li等^[27-28]已经得到了在2个不完全结合半空间中由均匀立方体夹杂引起的弹性场的解析解。最近,Lyu等^[29]推导出了由2个完全结合的半空间之一中含椭球热夹杂引起的弹性场应力、应变和位移的解析解。目前,关于双材料中由夹杂引起的弹性场解析解主要是集中在三维条件下研究的,相应解析解表达式比较复杂,也不便于应用。对于双材料的热夹杂物问题,现有文献并没有针对平面应变情况下相关解析解的报道。事实上,平面应变条件下的解析解能够以封闭形式给出,更加便于应用,同时也具有重要的理论意义。

笔者在平面应变条件下,推导出了双材料中位移、应力和应变场的显式解析解。同时,通过引入取值范围为-1~1的新型材料参数和5个类张量表达式,能以更为紧凑统一的形式表示最终的解析解,也为深入探索双材料的力学性能与材料组合参数之间的内在联系提供了重要的理论支撑。

1 双材料中含椭球热夹杂的解析解

考虑双材料含椭球热夹杂区域为 Ω ,边界为

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{(x_3 - c)^2}{a_3^2} \leq 1, \quad (c \geq a_3), \quad (1)$$

式中: a_i ($i = 1, 2, 3$) 是以 $(0, 0, c)$ 为中心的椭球热夹杂的半轴。如图 1 所示, 椭球夹杂 Ω 具有均匀的本征应变, 即 $\varepsilon_{11}^* = \varepsilon_{22}^* = \varepsilon_{33}^* = \varepsilon^*$, $\varepsilon_{12}^* = \varepsilon_{13}^* = \varepsilon_{23}^* = 0$, 并嵌入在半空间 I 中。在连接界面, 2 个完全结合半空间的边界条件表示为 $u_p^I = u_p^U$ 和 $\sigma_{3p}^I = \sigma_{3p}^U$ ($p = 1, 2, 3$)。

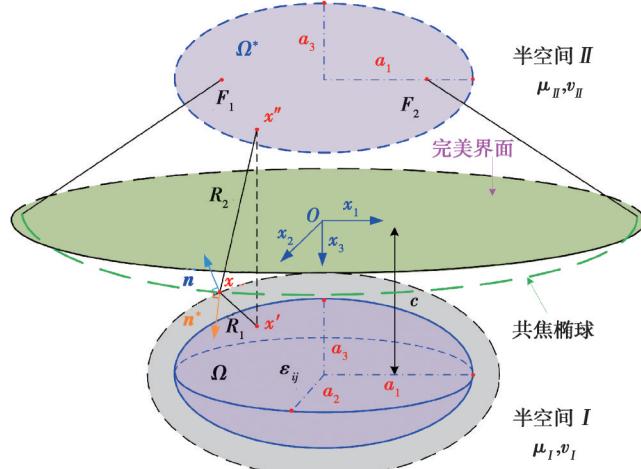


图 1 嵌入在双材料中椭球体、虚构的共焦椭球体及其椭球的外法向量的示意图

Fig. 1 Illustration of an ellipsoidal inclusion embedded in bi-material and outward-unit normal vectors of ellipsoids and fictional confocal ellipsoid

对于位于半空间 I 中的响应点, 二阶位移 Eshelby 张量 \mathbf{W}_{pq} 的显式表达式是通过对 Wang 等^[27]2016 年提出的本征应变解的每个分量进行分类和积分来获得的。可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{pq}^I(x) = & \frac{2\nu_I\phi_{,p} + 4(1-\nu_I)\delta_{pq}\phi_{,Q} - \psi_{,pqQ}}{1+\kappa_I\Gamma} + \\ & \frac{2(1-\Gamma)x_3}{1+\kappa_I\Gamma} \left[-\psi_{,3pqQ}^* + x_3\phi_{,pqQ}^* + 2\nu_I\phi_{,3p}^* + (4-4\nu_I)\delta_{3Q}\phi_{,pq}^* - (2-4\nu_I)\delta_{3p}\phi_{,qQ}^* \right] + \\ & (1-2\delta_{3p})\frac{1-\Gamma}{1+\kappa_I\Gamma} \left[(4-4\nu_I)\delta_{pq}\phi_{,p}^* + \frac{\kappa_I^2-1}{2}(2\delta_{3q}\phi_{,p}^* + \theta_{,pqQ}^*) + \kappa_I(2\nu_I\phi_{,p}^* - \psi_{,pqQ}^*) \right] - \\ & \frac{(\kappa_I^2-1)(1-\Gamma)\Gamma}{2(1+\kappa_I\Gamma)(1+\Gamma)} \left[2(\delta_{3q}-\delta_{pq})\phi_{,p}^* + (1-2\delta_{3p})\theta_{,pqQ}^* \right] - \frac{(4-4\nu_I)\Gamma}{1+\Gamma} \left(\frac{1-2\nu_I}{1+\kappa_I\Gamma} - \frac{1-2\nu_H}{\Gamma+\kappa_H} \right) \theta_{,pqQ}^*, \end{aligned} \quad (2)$$

式中: $p, q = 1, 2, 3$; δ_{pq} 是克罗内克 delta (Kronecker delta); κ 是 Kolosov 常数; $\Gamma = \mu_H/\mu_I$; $\kappa_I = 3 - 4\nu_I$; $\kappa_H = 3 - 4\nu_H$; μ_I 和 ν_I 是半空间 I 中的剪切模量和泊松比; μ_H 和 ν_H 是半空间 II 中相对应的参数。带有逗号的下标表示关于 x 的导数, 这里使用了 Mura 求和约定, 重复的小写指标 1~3 求和, 而大写指标采用相应的小写指标但不求和。公式(2)右侧的双下划线部分表示全空间中含椭球热夹杂的位移 Eshelby 张量, 其中 ϕ 、 ϕ^* 、 ψ 、 ψ^* 、 θ^* 是势函数, 这些势函数的表达式定义为

$$\phi = \int_{\Omega} 1/R_1 dx', \quad \psi = \int_{\Omega} R_1 dx', \quad \phi^* = \int_{\Omega} 1/R_2 dx', \quad \psi^* = \int_{\Omega} R_2 dx', \quad (3)$$

$$\theta^* = \int_{\Omega} \left[R_2 - (x_3 + x'_3) \ln(R_2 + (x_3 + x'_3)) \right] dx'. \quad (4)$$

如图 1 所示, F_1 和 F_2 分别表示镜像椭圆的焦点, 激励点 x' 响应点 x 之间的距离表示为 R_1 , 镜像激励点 x'' 与响应点 x 之间的距离表示为 R_2 , 即

$$R_1 = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}, \quad R_2 = \sqrt{(x_1 - x''_1)^2 + (x_2 - x''_2)^2 + (x_3 + x''_3)^2}. \quad (5)$$

对于位于半空间 II 中的响应点, 二阶位移 Eshelby 张量 \mathbf{W}_{pq} 的显式表达式为

$$\frac{\mathbf{W}_{pq}^H}{2(1-v_I)\Gamma} = \frac{2}{1+\kappa_I\Gamma} \left[-\psi_{,pqQ} + 2v_I\phi_{,p} + 4(1-v_I)\delta_{pq}\phi_{,p} \right] + \left(\frac{\kappa_I}{1+\kappa_I\Gamma} - \frac{\kappa_H}{\Gamma+\kappa_H} \right) \delta_{3q}\phi_{,p} - \\ \left(\frac{2}{1+\kappa_I\Gamma} - \frac{2}{\Gamma+\kappa_H} \right) x_3 \xi_{,pqQ} + \frac{2}{1+\Gamma}(1-2v_I) \frac{1-\Gamma}{1+\kappa_I\Gamma} \left[(1-\delta_{3Q})\theta_{,pqQ} - 2\delta_{pq}\phi_{,p} \right] + \\ \frac{2}{1+\Gamma}(1-\delta_{3q}-2\delta_{3p}) \left[\frac{(1-2v_H)\Gamma}{\Gamma+\kappa_H} - \frac{(1-2v_I)\Gamma}{1+\kappa_I\Gamma} \right] \theta_{,pqQ}, \quad (6)$$

式(6)中, ξ 和 θ 的表达式为

$$\xi = \int_{\Omega} \ln(R_1 - (x_3 - x'_3)), \quad \theta = \int_{\Omega} R_1 + (x_3 - x'_3) \ln(R_1 - (x_3 - x'_3)) dx'. \quad (7)$$

$I(\lambda)$ 通常是计算椭圆积分的函数, 正如 2011 年 Jin 等^[30]在论文中的详细讨论, 其定义为

$$I_l(\lambda) = \frac{1}{2} a_1 a_2 a_3 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\eta}{(a_l^2 + \eta) \Theta(\eta)}, \quad (8)$$

$$I_l(\lambda^*) = \frac{1}{2} a_1 a_2 a_3 \int_{\lambda^*}^{\infty} \frac{d\eta}{(a_l^2 + \eta) \Theta(\eta)}.$$

式中: λ 和 λ^* 分别为 $\frac{y_i y_i}{a_i^2 + \lambda} = 1$ 和 $\frac{z_i z_i}{a_i^2 + \lambda^*} = 1$ 的最大正根。此外, η 表示积分变量, 并且

$$\Theta(\eta) = \sqrt{(a_1^2 + \eta)(a_2^2 + \eta)(a_3^2 + \eta)}. \quad (9)$$

y 和 z 向量的分量分别定义为

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3 - c, \quad (10)$$

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_3 + c. \quad (11)$$

为了表示这些势函数的导数, 图 1 中点 x 处的原始椭圆单位外法向量和共焦椭圆的单位外法向量定义为

$$\mathbf{n}_p = \frac{y_p}{(a_p^2 + \lambda) \sqrt{H(\lambda)}}, \quad \mathbf{n}_q^* = \frac{z_q}{(a_q^2 + \lambda^*) \sqrt{H(\lambda^*)}}, \quad (12)$$

其中

$$H(\lambda) = \frac{y_p y_p}{(a_p^2 + \lambda)^2}, \quad H(\lambda^*) = \frac{z_p z_p}{(a_p^2 + \lambda^*)^2}. \quad (13)$$

Lyu 等^[29]2022 年对双材料中含椭球热夹杂的所有解析解进行了详细推导分析, 其结果可在其论文中获取。

2 双材料中含椭圆热夹杂的解析解

椭圆夹杂实际上是使椭球的一个相应半轴趋于无穷大($a_2 \rightarrow \infty$), 使其成为平面应变问题。椭圆夹杂的区域定义为

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{(x_3 - c)^2}{a_3^2} \leq 1, \quad (c \geq a_3). \quad (14)$$

通过将 $a_2 \rightarrow \infty$ 代入第 1 节中的公式(8)(12)中, 可以推导出椭圆夹杂相应的结果

$$I_1(\lambda) = \frac{a_3 \rho_1^2 \rho_3}{a_1 \rho_3 + a_3 \rho_1}, \quad I_3(\lambda) = \frac{a_1 \rho_1 \rho_3^2}{a_1 \rho_3 + a_3 \rho_1}, \quad I_2(\lambda) = 0, \quad n_2 = 0, \quad n_2^* = 0, \quad (15)$$

其中

$$\rho_I = \frac{a_I}{\sqrt{a_I^2 + \lambda}}, \quad \rho_I^* = \frac{a_I}{\sqrt{a_I^2 + \lambda^*}}, \quad \rho_{123} = \rho_1 \rho_2 \rho_3, \quad \rho_{123}^* = \rho_1^* \rho_2^* \rho_3^*. \quad (16)$$

在椭圆夹杂中可求出 λ 的具体表达式为

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[y_1^2 + y_3^2 - a_1^2 - a_3^2 + \sqrt{(y_1^2 + y_3^2 - a_1^2 - a_3^2)^2 + 4(a_1^2 - a_3^2)y_3^2} \right]. \quad (17)$$

双材料含椭圆热夹杂的所有解析解都可以通过将公式(15)~(17)代入椭球夹杂的解来推导。然而, 椭圆夹杂的最终解析解非常繁琐, 并且一些相同的表达式在许多地方反复出现。为了简化最终解的表达式, 引

入了5个类张量表达式。同时,通过引入这些类张量表达式,可以使本文封闭解的表达式更加紧凑美观。

$$\begin{cases} L_{pq} = \varepsilon^* [\rho_{123} \mathbf{n}_p \mathbf{n}_q - \delta_{pq} I_p(\lambda)], I_{pq} = \varepsilon^* [\rho_{123}^* \mathbf{n}_p^* \mathbf{n}_q^* - \delta_{pq} I_p(\lambda^*)], C_p = \varepsilon^* I_p(\lambda), \\ D_p = \varepsilon^* I_p(\lambda^*), U_{pq} = \varepsilon^* \rho_{123}^* \left[\frac{x_3}{\sqrt{H(\lambda^*)}} \left(\frac{\delta_{3p} \mathbf{n}_q^*}{a_3^2 + \lambda^*} + \frac{\delta_{3q} \mathbf{n}_p^*}{a_3^2 + \lambda^*} + \frac{\delta_{pq} \mathbf{n}_3^*}{a_p^2 + \lambda^*} \right) - M_{pq}(\lambda^*) \right], \end{cases} \quad (18)$$

其中

$$M_{pq}(\lambda^*) = \left(\frac{1 - 4\mathbf{n}_1^* \mathbf{n}_1^*}{a_1^2 + \lambda^*} + \frac{1 - 4\mathbf{n}_3^* \mathbf{n}_3^*}{a_3^2 + \lambda^*} + \frac{2}{a_p^2 + \lambda^*} + \frac{2}{a_Q^2 + \lambda^*} + \frac{2}{a_3^2 + \lambda^*} \right) \frac{x_3 \mathbf{n}_3^* \mathbf{n}_p^* \mathbf{n}_q^*}{\sqrt{H(\lambda^*)}}. \quad (19)$$

Dundurs先前证明^[4],双材料的应力场可以用2个Dundurs参数(α, β)来表示。此外, α 和 β 的值被限制在一个范围较小的平行四边形中,而 μ_H/μ_I 的原始值从零到无穷大不等。这极大地简化了最终解析解和减少了验证最终解析解所需的工作量。Dundurs参数定义为

$$\alpha = \frac{\mu_H(\kappa_I + 1) - \mu_I(\kappa_H + 1)}{\mu_H(\kappa_I + 1) + \mu_I(\kappa_H + 1)}, \beta = \frac{\mu_H(\kappa_I - 1) - \mu_I(\kappa_H - 1)}{\mu_H(\kappa_I + 1) + \mu_I(\kappa_H + 1)}. \quad (20)$$

式(20)中,平面应力下, $\kappa_I = (3 - \nu_I) / (1 + \nu_I)$,平面应变下, $\kappa_I = 3 - 4\nu_I$ 。

从Dundurs参数中汲取灵感,定义了1个新的材料参数,以减少最终解析解对材料参数的依赖性,使其适用于双材料含椭圆热夹杂的解析解。该材料参数表示为

$$\gamma_I = \frac{\mu_I - \delta_{II} \mu_H - \delta_{III} \mu_I}{\mu_I + \delta_{II} \kappa_I \mu_H + \delta_{III} \kappa_I \mu_I}. \quad (21)$$

这个新材料参数的取值范围为-1~1, γ_I 的表达式可以从上式得到

$$\gamma_I = \frac{\beta - \alpha}{\beta + 1} = \frac{\mu_I - \mu_H}{\mu_I + \kappa_I \mu_H}. \quad (22)$$

通过将新的材料参数和5个类张量表达式代入椭圆热夹杂的解析解中,半平面I的最终位移解析解表示为

$$u_p^I(x) = \frac{(7 - \kappa_I)}{(1 + \kappa_I)} \left\{ \underline{\underline{y_p C_p}} + \gamma_I \left[z_p \kappa_I D_p (1 - 2\delta_{3p}) - 2x_3 I_{p3} \right] \right\}, \quad (23)$$

式中:右侧的双下划线项表示全平面中相应的热夹杂物的解。

半平面I中椭圆热夹杂外部点的应变分量可以表示为

$$\varepsilon_{pq}^{I\text{ext}}(x) = \frac{(7 - \kappa_I)}{(1 + \kappa_I)} \left\{ \underline{\underline{-L_{pq}}} + \gamma_I \left[(\kappa_I - 1)(\delta_{3p} + \delta_{3q}) I_{pq} - \kappa_I I_{pq} - 2U_{pq} \right] \right\}. \quad (24)$$

在椭圆夹杂内部的点, λ 的值为0。通过代入,内部点的应变分量可以表示为

$$\varepsilon_{pq}^{I\text{int}}(x) = \frac{(7 - \kappa_I)}{(1 + \kappa_I)} \left\{ \underline{\underline{\delta_{pq} C_p}} + \gamma_I \left[(\kappa_I - 1)(\delta_{3p} + \delta_{3Q}) I_{pq} - \kappa_I I_{pq} - 2U_{pq} \right] \right\}, \quad (25)$$

式中:上标“ext”表示位于椭圆夹杂物外部的外部点;上标“int”表示位于椭圆夹杂物内的内部点。

与应变类似,在半平面I中椭圆夹杂外部点的应力分量可以表示为

$$\sigma_{pq}^{I\text{ext}}(x) = \frac{(7 - \kappa_I)}{(1 + \kappa_I)} \left\{ \underline{\underline{-L_{pq}}} + \gamma_I \left[(\kappa_I - 1)(\delta_{3p} + \delta_{3Q}) I_{pq} + (3 - \kappa_I) \delta_{pq} I_{33} - \kappa_I I_{pq} - 2U_{pq} \right] \right\}. \quad (26)$$

椭圆夹杂物内部点的应力分量可表示为

$$\sigma_{pq}^{I\text{int}}(x) = \frac{(7 - \kappa_I)}{(1 + \kappa_I)} \left\{ \underline{\underline{\delta_{pq} C_p}} + \gamma_I \left[(\kappa_I - 1)(\delta_{3p} + \delta_{3Q}) I_{pq} + (3 - \kappa_I) \delta_{pq} I_{33} - \kappa_I I_{pq} - 2U_{pq} \right] \right\}. \quad (27)$$

半平面II中的应力、应变和位移表达式可以表示为

$$u_p^{II}(x) = \frac{(7 - \kappa_I)(\gamma_I \kappa_I + 1)}{(\kappa_I + 1)} y_p C_p, \quad (28)$$

$$\varepsilon_{pq}^{II}(x) = \frac{(\kappa_I - 7)(\gamma_I \kappa_I + 1)}{(\kappa_I + 1)} L_{pq}, \quad (29)$$

$$\frac{\sigma_{pq}^H(x)}{2\mu_H} = \frac{(\kappa_I - 1)(\gamma_I \kappa_I + 1)}{(\kappa_I + 1)} L_{pq} = \varepsilon_{pq}^H(x)。 \quad (30)$$

需要指出的是,在公式(18)中, $I_{11} + I_{33} = 0$ 、 $U_{11} + U_{33} = 0$ 、 $L_{11} + L_{33} = 0$ 、 $C_1 + C_3 = \varepsilon^*$,代入正应变和正应力的表达式时,得到

$$\varepsilon_{11}^H(x) + \varepsilon_{33}^H(x) = \sigma_{11}^H(x) + \sigma_{22}^H(x) + \sigma_{33}^H(x) = 0。 \quad (31)$$

从公式(31)可以看出,双材料含椭圆热夹杂的正应力之和与正应变之和在半平面II中为零。

注意到应力在量纲上与应变和位移不一致,故将最终应力解用应力除以剪切模量来表示。若如此,对双材料含椭圆热夹杂的问题,有一个突破性的发现,不仅应力和应变解可以用2个材料参数表示,而且位移解也可以用2个材料参数表示。综上,双材料含椭圆热夹杂的所有解析解都可以用 κ_I 和 γ_I 完全表示。此外,当椭圆夹杂物位于半平面II中时,用 κ_H 、 γ_H 代替 κ_I 、 γ_I 可以快速获得相应的解析解。

3 分析解析解及其在特定案例中的应用

讨论了4个相关主题,第1个主题介绍了双材料含圆形热夹杂的解析解;第2个主题报告了在双材料结合界面处的跳跃条件;在第3小节中,通过将双材料的弹性模量之比设置为1、0或无穷大,研究了双材料的3种特定组合(即全平面、半平面和刚性基体);第4个主题使用参数算例来研究双材料的材料参数组合对弹性场解的影响。

3.1 双材料含圆形热夹杂的所有封闭解

通过将 $a_1 = a_3$ 代入第3节中的相应等式中,可以快速获得具有完美界面双材料含圆形热夹杂的所有解。其全平面的结果可以与已发表文献中的解析解进行对比^[30-31]。当圆形夹杂的半径为 a 时,通过代入第2节中的相应方程,可以快速获得所有解。

$$\begin{cases} \lambda = R_1^2 - a^2, \quad I_P(\lambda) = \frac{a^2}{2R_1^2}, \quad \rho_{123} = \frac{a^2}{R_1^2}, \quad H(\lambda) = \frac{1}{R_1^2}, \quad \mathbf{n}_p = \frac{\mathbf{y}_p}{R_1}, \\ \lambda^* = R_2^2 - a^2, \quad I_P(\lambda^*) = \frac{a^2}{2R_2^2}, \quad \rho_{123}^* = \frac{a^2}{R_2^2}, \quad H(\lambda^*) = \frac{1}{R_2^2}, \quad \mathbf{n}_p^* = \frac{\mathbf{z}_p}{R_2}, \\ M_{pq}(\lambda^*) = \frac{4x_3 z_3 z_p z_q}{R_2^4}。 \end{cases} \quad (32)$$

第2节中引入的5个类张量表达式可以推导为

$$\begin{cases} L_{pq} = \frac{\varepsilon^* a^2}{R_1^2} \left[\frac{y_p y_q}{R_1^2} - \frac{\delta_{pq}}{2} \right], \quad I_{pq} = \frac{\varepsilon^* a^2}{R_2^2} \left[\frac{z_p z_q}{R_2^2} - \frac{\delta_{pq}}{2} \right], \quad C_p = \frac{\varepsilon^* a^2}{2R_1^2}, \\ D_p = \frac{\varepsilon^* a^2}{2R_2^2}, \quad U_{pq} = \frac{\varepsilon^* x_3 a^2}{R_2^4} \left[(\delta_{3p} y_q + \delta_{3q} y_p + \delta_{3q} y_p) - \frac{4z_3 z_p z_q}{R_2^2} \right]。 \end{cases} \quad (33)$$

圆形热夹杂的所有解可以通过结合公式(33)与公式(23)~(30)获得,这些解的形式仍然与第2节中椭圆夹杂解析解的形式相同,但5个类张量表达式发生了相应的变化。这些类张量表达式便于编程验证最终解,通过编程验证,在全平面中含圆形夹杂的解析解在数值上与已发表文献中的解相同^[30-31]。此验证也证明了本文所呈现解析解的正确性。

3.2 结合界面处的跳跃条件

研究了结合界面处位移、应变和应力的跳跃条件,这可以从微观力学角度解释和预测完美界面处的失效机制及能量耗散。结合界面上的点存在以下关系: $y_1 = z_1$ 、 $y_2 = z_2 = 0$ 、 $y_3 + z_3 = 0$ 、 $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1^*$ 、 $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2^* = 0$ 、 $\mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_3^* = 0$ 、 $x_3 = 0$ 、 $\rho_{123} = \rho_{123}^*$ 和 $\lambda = \lambda^*$ 。因此,对于结合界面上的点,5个类张量表达式推导为

$$L_{pq} = \varepsilon^* [\rho_{123} \mathbf{n}_p \mathbf{n}_q - \delta_{pq} I_P(\lambda)], \quad I_{pq} = \varepsilon^* [\rho_{123}^* \mathbf{n}_p^* \mathbf{n}_q^* - \delta_{pq} I_P(\lambda)], \quad C_p = D_p = \varepsilon^* I_P(\lambda), \quad U_{pq} = 0。 \quad (34)$$

需要注意的是,椭圆柱夹杂是一个平面应变问题。因此,与2方向相关的应变解为0(即 $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{23} = 0$),以及与2方向相关的应变的跳跃量为0(即 $\Delta\varepsilon_{12} = \Delta\varepsilon_{22} = \Delta\varepsilon_{32} = \Delta\varepsilon_{21} = \Delta\varepsilon_{23} = 0$)。结合界面上位移、应变和应力的跳跃条件为

$$\Delta u_p(x) = u_p^I - u_p^H, \quad \Delta \varepsilon_{pq}(x) = \varepsilon_{pq}^I - \varepsilon_{pq}^H, \quad \Delta \sigma_{pq}(x) = \sigma_{pq}^I - \sigma_{pq}^H, \quad (35)$$

式中: Δ 表示完全界面上相应解的跳跃量;上标I和II分别表示从半平面I和II侧接近结合界面的值。

结合界面处的位移跳跃量可以表示为

$$\Delta u_p(x) = \frac{(7-\kappa_I)}{(1+\kappa_I)} \gamma_I \kappa_I C_p (z_p(1-2\delta_{3p}) - y_p) = 0, \quad (36)$$

公式(36)表明双材料(其一含椭圆夹杂)的位移解是连续的。

结合界面处的应变跳跃量可以表示为

$$\Delta \varepsilon_{pq}(x) = \frac{(7-\kappa_I)}{(1+\kappa_I)} \gamma_I [(\kappa_I-1)(\delta_{3p} + \delta_{3q}) I_{pq} - \kappa_I I_{pq} + \kappa_I L_{pq}] = 0. \quad (37)$$

通过公式(37)结合公式(34)可以推导出除了 $\Delta \varepsilon_{13}(x)$, $\Delta \varepsilon_{31}(x)$ 和 $\Delta \varepsilon_{33}(x)$ 之外,其他的应变跳跃量都等于0(即 $\Delta \varepsilon_{11} = \Delta \varepsilon_{12} = \Delta \varepsilon_{21} = \Delta \varepsilon_{22} = \Delta \varepsilon_{23} = \Delta \varepsilon_{32} = 0$)。

结合界面处的应力跳跃量可以表示为

$$\frac{(1+\kappa_I) \Delta \sigma_{pq}(x)}{2(7-\kappa_I) \mu_I \gamma_I} = -L_{pq} + [(\kappa_I-1)(\delta_{3p} + \delta_{3q}) I_{pq} + (3-\kappa_I) \delta_{pq} I_{33} - \kappa_I I_{pq}] = 0. \quad (38)$$

通过公式(38)结合公式(34)可以推导出除了 $\Delta \sigma_{11}(x)$ 和 $\Delta \sigma_{22}(x)$ 之外,其他的应力跳跃量都等于0。

在全平面中,由于2个剪切模量(μ_I 和 μ_{II})相等,因此, γ_I 为0。故结合界面处的所有位移、应变和应力跳跃量均为0。这与全平面的物理意义一致,也从侧面证实了推导的跳跃条件的正确性。

3.3 当前解析解与已知解析解之间的对比分析和比较验证

通过改变双材料的弹性模量比为1,0和无穷大,研究了双材料的3种特定组合,即全平面、半平面和刚性基体。提出了3个基准示例,以比较和分析当前的解析解与相应文献中已发表的解析解^[30-32]。在这3个示例中,椭圆热夹杂嵌入在半平面I中,以(0,3)为中心,椭圆的2个半轴的长度分别为3.0和2.0。表1提供了有关椭圆夹杂物的其他几何信息。

表1 双材料中椭圆夹杂物的几何参数

Table 1 The configuration of elliptical inclusion in bi-material

| 参数 | 值 |
|--|--|
| 椭圆中心位置 c/mm | (0.0, 3.0) |
| 椭圆夹杂尺寸 $(a_1, a_3)/\text{mm}$ | (3.0, 2.0) |
| 观测线 $(x_1, x_2, x_3)/\text{mm}$ | (0.5, 0.0, -2.0~8.0) |
| 本征应变分量 $[\varepsilon_{11}^* \varepsilon_{22}^* \varepsilon_{33}^* \varepsilon_{23}^* \varepsilon_{13}^* \varepsilon_{12}^*]^T$ | $[\varepsilon^*] = 10^{-3} \times [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ |

表2列出了在3种条件下双材料的材料参数。在3种情况下,半平面I的杨氏模量定义为320 GPa。在全平面、半平面和刚性基体情况下,半平面II的杨氏模量分别定义为320、0、320 000 GPa。在这3种情况下,除第2种情况下半平面II的泊松比为0外,其余泊松比为0.3。在编程验证过程中,为了保证数值解的高精度,使用FORTRAN语言对最终解析解进行双精度编程。先前发表文献中的解析解被用于验证本文研究中获得的解析解的正确性。

表2 3种验证案例中双材料的材料参数

Table 2 The material parameters of bi-material for three validation cases

| 示例 | 半平面I | | 半平面II | |
|------|-----------------------|-------------|--------------------------|----------------|
| | 杨氏模量 E_I/GPa | 泊松比 ν_I | 杨氏模量 E_{II}/GPa | 泊松比 ν_{II} |
| 全平面 | 320 | 0.3 | 320 | 0.3 |
| 半平面 | 320 | 0.3 | 0 | 0 |
| 刚性基体 | 320 | 0.3 | 320 000 | 0.3 |

3.3.1 全平面

通过设置 $\mu_I = \mu_{II} = \mu$ 和 $v_I = v_{II} = v$, 将双材料问题转换为全平面问题。将 $\gamma_I = 0$ 代入公式(23)~(30), 得到全平面含椭圆热夹杂弹性场的所有解析解。使用先前已发表的解析解^[30-31]来验证当前的解析解。如图2(b)~(d)所示, 椭圆夹杂内点的位移与坐标呈线性关系, 而应力和应变值与点的位置无关并保持不变。在椭圆夹杂外部, 除2方向上的位移和正应力外, 弹性场的解与坐标呈非线性关系。变量 $u_1, u_2, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}, \sigma_{11}, \sigma_{22}$ 和 σ_{33} 关于 $x_3 = 3$ 轴对称; u_3, ε_{13} 和 σ_{13} 关于(3, 0)点对称。

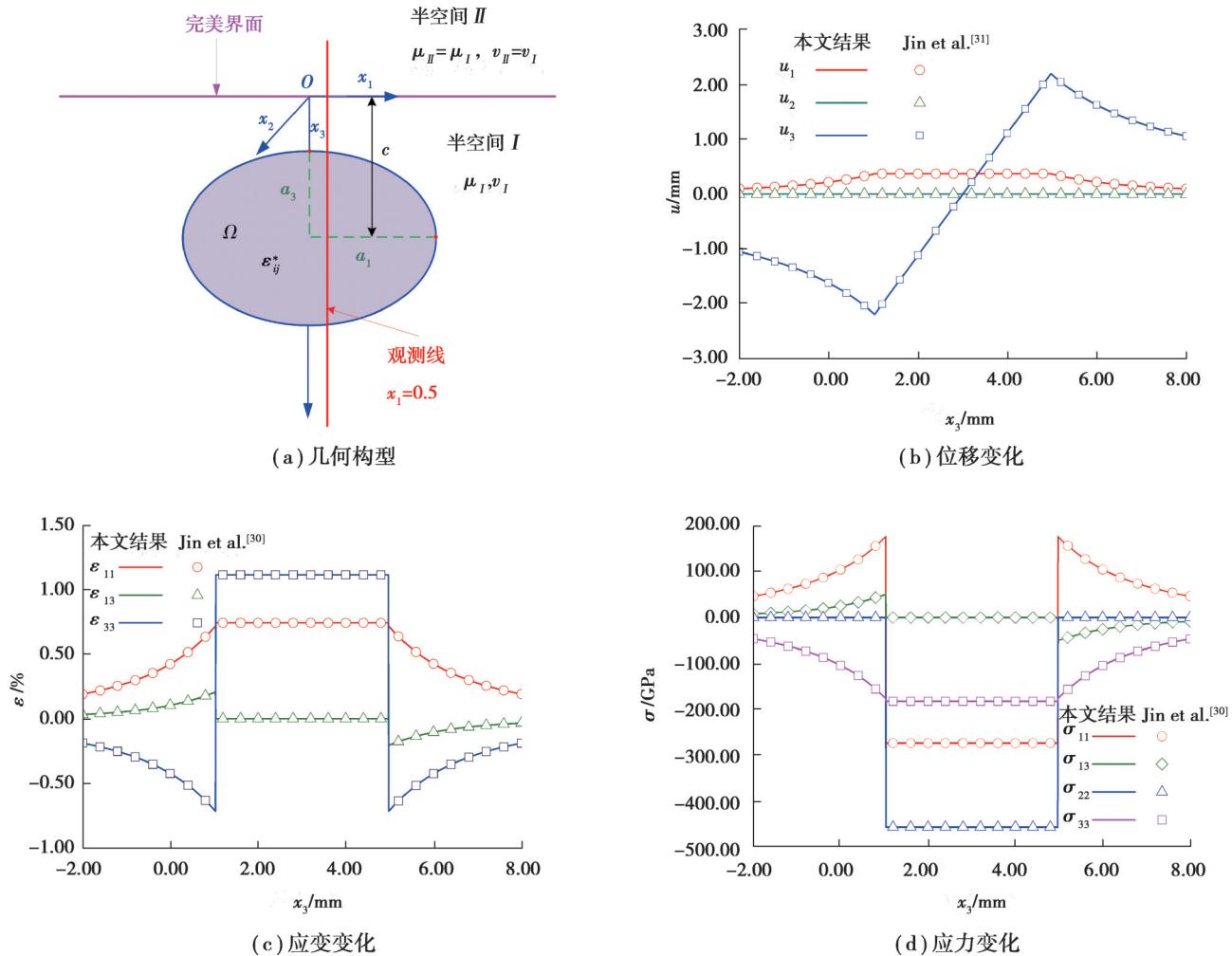


图2 用全平面解析解验证当前解析解

Fig. 2 Verification of the current analytical solution with the full-plane solution

当 $\gamma_I = 0$ 时, 正应变和正应力具有以下关系,

$$\varepsilon_{11}^H(x) + \varepsilon_{33}^H(x) = \varepsilon_{11}^{I\text{ext}}(x) + \varepsilon_{33}^{I\text{ext}}(x) = \sigma_{11}^H(x) + \sigma_{22}^H(x) + \sigma_{33}^H(x) = 0, \quad (39)$$

$$\varepsilon_{11}^{I\text{int}}(x) + \varepsilon_{33}^{I\text{int}}(x) = \frac{(7 - \kappa_I)}{(1 + \kappa_I)} \varepsilon^*, \quad (40)$$

$$\sigma_{11}^{I\text{ext}}(x) + \sigma_{22}^{I\text{ext}}(x) + \sigma_{33}^{I\text{ext}}(x) = 0, \quad (41)$$

$$\sigma_{11}^{I\text{int}}(x) + \sigma_{22}^{I\text{int}}(x) + \sigma_{33}^{I\text{int}}(x) = -4\varepsilon^* \mu_I \frac{(7 - \kappa_I)}{(1 + \kappa_I)}, \quad (42)$$

$$\sigma_{11}^{I\text{int}}(x) + \sigma_{33}^{I\text{int}}(x) = \sigma_{22}^{I\text{int}}(x) = -2\varepsilon^* \mu_I \frac{(7 - \kappa_I)}{(1 + \kappa_I)}. \quad (43)$$

从上述5个方程中可以得出, 全平面中含椭圆热夹杂的正应力之和在椭圆内是恒定的, 而在椭圆外消失。这一结果与1999年Ru^[33]论文中得出的结论一致。此外, 本文研究表明, 上述结论也适用于全平面椭圆

热夹杂正应变的关系。此外,2 方向的正应力是 1 方向的正应力和 3 方向的正应力的总和。

3.3.2 半平面

设置 $\mu_{II} = 0$ 和 $v_{II} = 0$ (即 $\gamma_I = 1$), 将双材料问题转换为半平面问题。将 $\gamma_I = 1$ 代入公式(23)~(30), 得出半平面椭圆夹杂的解析解, 其中, 结合界面可以被视为没有任何牵引力的自由表面。将推导出的半平面椭圆夹杂的解析解与 Lyu 等^[32]推导出的椭球夹杂的解析解进行比较。将椭球的 3 个半轴分别设为 $a_1=3 \text{ mm}$, $a_2=10000 \text{ mm}$ 和 $a_3=2 \text{ mm}$, 并进行数值模拟。结果表明, 椭圆夹杂与椭球夹杂的数值解基本一致。如图 3(b)~(d) 所示, 在椭圆夹杂内, 2 方向和 3 方向上的位移与坐标呈线性关系, 而其余点的位移与坐标呈非线性关系。半平面 II 中的正应变之和为 0, 应力值均为 0。在椭圆夹杂物中, 正应力和正应变都不是恒定的, 而剪切应力和剪切应变均为 0。在完全界面处, 由于材料参数的变化, 应力和应变均有跳变。

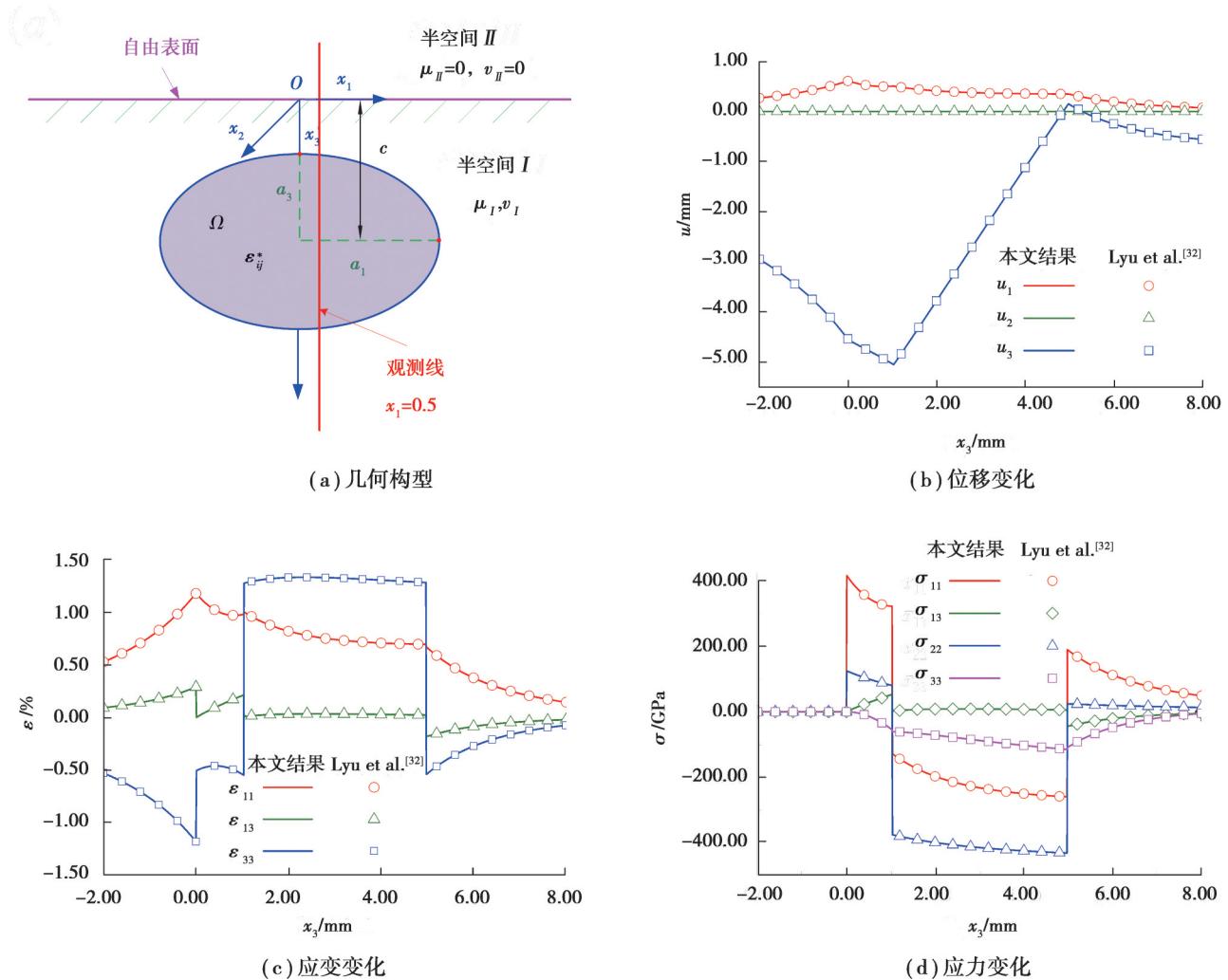


图 3 用半平面解析解验证当前解析解

Fig. 3 Verification of the current analytical solution with the half-plane solution

3.3.3 刚性基底

当 μ_{II} 视为无穷大时, 将椭圆热夹杂物嵌入与刚性基底完全结合的半平面中, γ_I 的值为 $-1/\kappa_I$, 将 $\mu_{II} = \infty$ (即 $\gamma_I = -1/\kappa_I$) 代入公式(23)~(30), 得出椭圆热夹杂的所有解析解。值得注意的是, 在半平面 II 中, 所有位移和应变均为 0, 而应力不一定为 0。半平面 I 和 II 的杨氏模量分别设置为 320 GPa 和 320000 GPa。观测线的数值解结果如图 4(b)~(d) 所示, 所有位移、 ε_{11} 、 σ_{13} 和 σ_{33} 在双材料的结合界面处都是连续的, 而其余的应变和应力分量在完美界面处跳跃。在椭圆夹杂物界面处, 所有位移、 ε_{11} 和 σ_{33} 都是连续的, 而其余的应变和应力分量会发生跳跃。在椭圆夹杂物内, 剪切应力和剪切应变为零, 正应力和正应变非恒定。

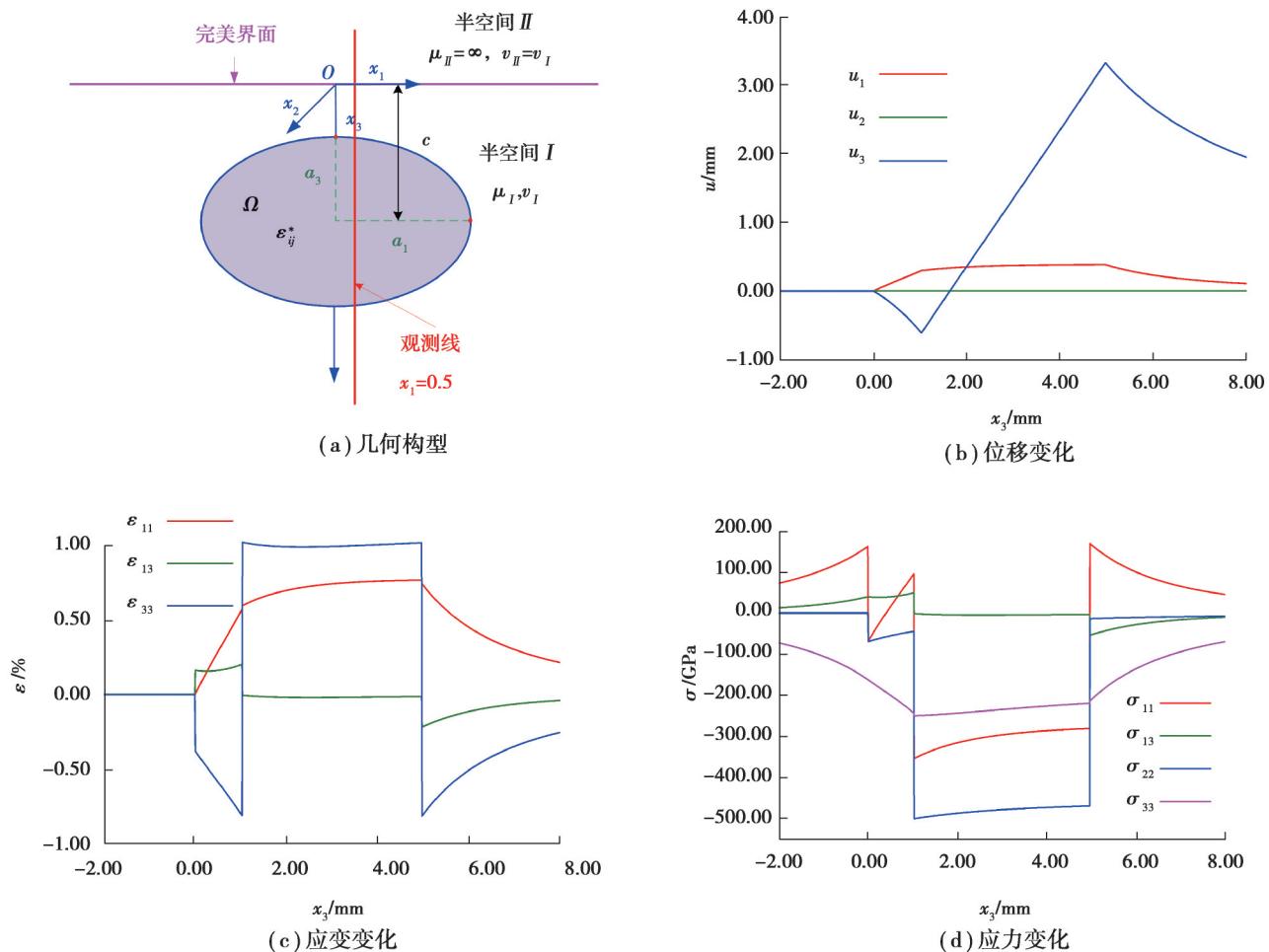


图4 椭圆热夹杂嵌入到与刚性基体完全结合的半平面中的弹性场的结果

Fig. 4 The elastic result of elliptical thermal inclusion embedded in a half-space perfectly bonded to a rigid base

本文关于结合双材料含椭圆形热夹杂的解与 Lyu 等^[29]给出的结果完全一致,并且与先前学者的实验结果^[34]有较好的吻合度。

3.4 参数研究

椭圆夹杂物的几何参数如表1所示。在参数研究中,半平面Ⅰ的材料参数保持不变(即 $E_I = 320 \text{ GPa}$, $v_I = 0.3$),半平面Ⅱ和Ⅰ之间的剪切模量比(即 Γ)分别等于0.2、0.5、2和5。表3列出了2个半平面的材料参数。图5和图6呈现了剪切模量比分别为0.2和5时的弹性场的解。

在点 $(0, c - a_3)$ 和 $(0, c + a_3)$ 处存在

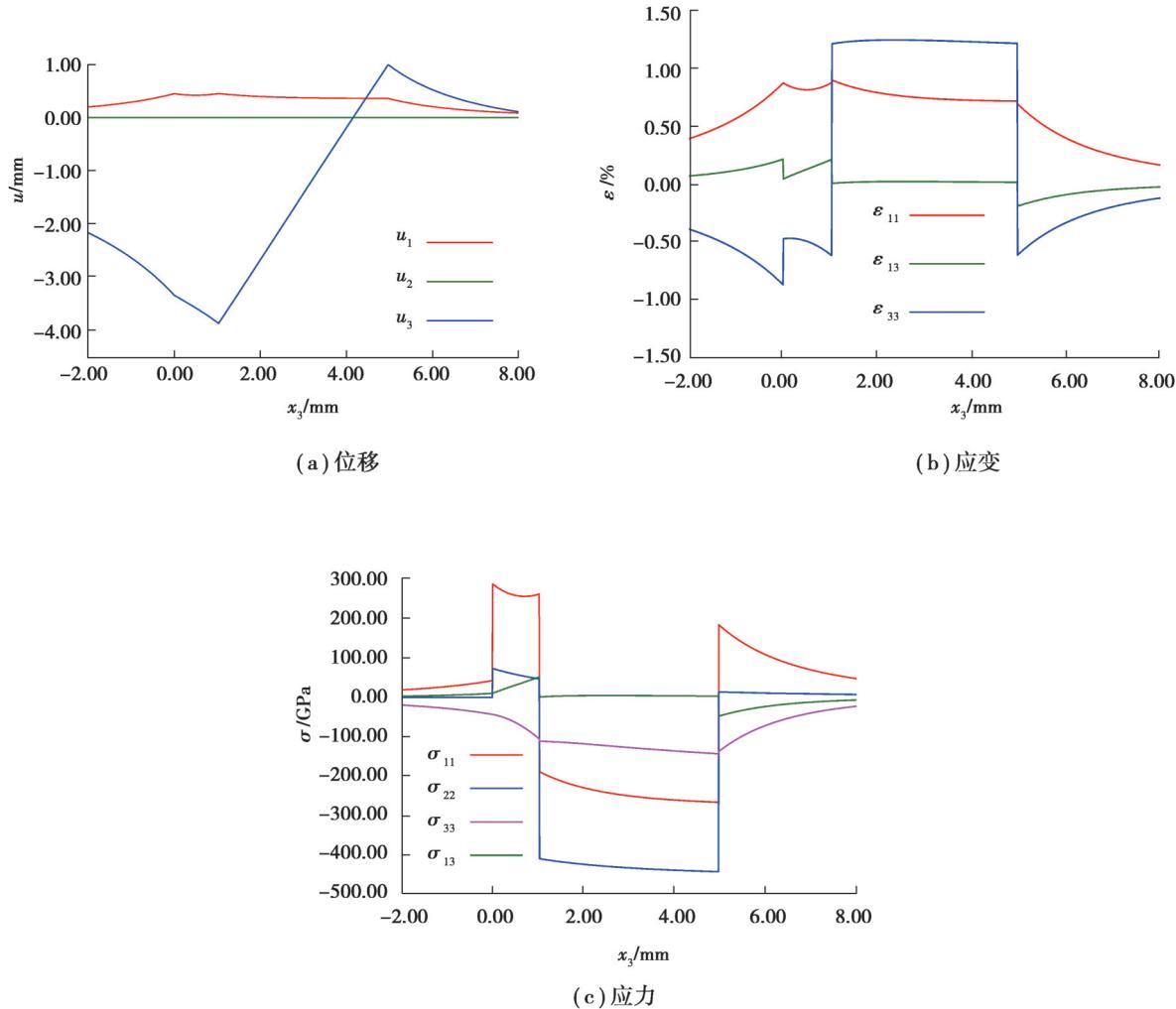
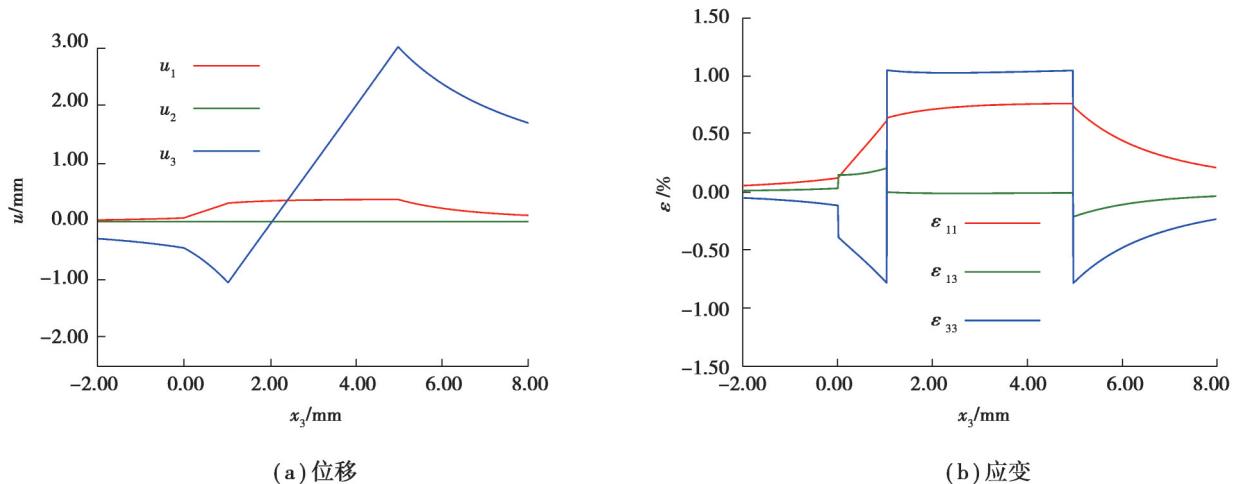
$$L_{11} = -C_1, L_{33} = \varepsilon^* - C_3. \quad (44)$$

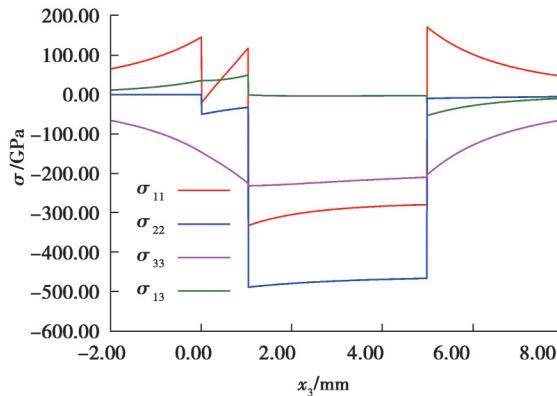
同时, L_{pq} 和 U_{pq} 在上述2点处是连续的,因此, σ_{33} 和 ε_{11} 在这2点处是连续的。

表3 用于参数研究的双材料的材料参数

Table 3 The material parameters of bi-material for parametric study

| 剪切模量比($\Gamma = \mu_{II}/\mu_I$) | 半平面Ⅰ | | 半平面Ⅱ | |
|------------------------------------|-----------------------|-----------|--------------------------|--------------|
| | 杨氏模量 E_I/GPa | 泊松比 v_I | 杨氏模量 E_{II}/GPa | 泊松比 v_{II} |
| 0.2 | 320 | 0.3 | 64 | 0.3 |
| 0.5 | 320 | 0.3 | 160 | 0.3 |
| 2 | 320 | 0.3 | 640 | 0.3 |
| 5 | 320 | 0.3 | 1 600 | 0.3 |

图 5 剪切模量比为 0.2(即 $\Gamma = 0.2$)时弹性场的解Fig. 5 The solution of the elastic field with a shear-modulus ratio of 0.2 (i.e., $\Gamma = 0.2$)



(c) 应力

图6 剪切模量比为5(即 $\Gamma=5$)时弹性场的解Fig. 6 The solution of the elastic field with a shear-modulus ratio of 5 (i.e., $\Gamma=5$)

从图(2)~(6)可以看出,在完美界面上(即 $x_3=0$),除全平面算例外, ε_{11} 、 σ_{33} 和 σ_{13} 是连续的,而 ε_{33} 、 ε_{13} 、 σ_{22} 和 σ_{11} 是跳跃的。这与3.2节中结合界面处的跳跃条件相呼应。

图7呈现了4个不同剪切模量比情况下应力张量迹的值。从图7中发现,在椭圆夹杂外,当剪切模量比 Γ 小于1时,应力张量迹的值大于零;当剪切模量比 Γ 大于1时,应力张量迹的值小于零。这意味着在热膨胀情况下,当椭圆夹杂位于较软的相中时,结合界面会吸引它,但如果椭圆夹杂嵌入较硬的相中,结合界面则会排斥它。应力张量迹的值在半平面II中始终等于0,在椭圆夹杂内部始终小于0。

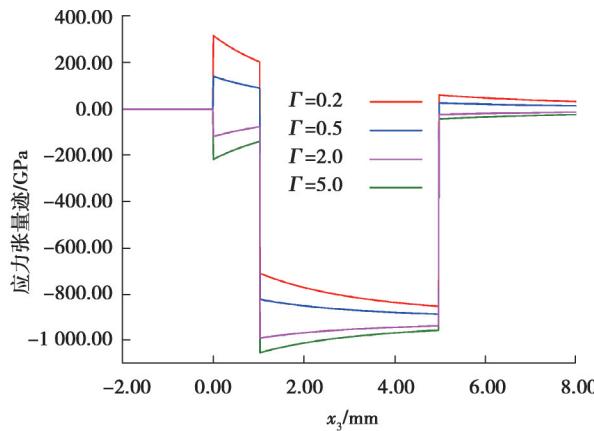


图7 剪切模量比为0.2、0.5、2和5时应力张量迹的值

Fig. 7 The value of stress tensor trace with a shear-modulus ratio of 0.2, 0.5, 2 and 5

4 结束语

在平面应变体系的公式中,推导出了各向同性双材料中含椭圆热夹杂引起的弹性场的显式解析解。然而,二维和三维解析解都存在同样的问题,即椭圆夹杂外部点的解析解非常复杂。为了解决这一问题,利用假想的共焦椭圆和单位外法向量,使解析解得以更紧凑地表达。受到Dundurs参数的启发,定义了1个新的材料参数 γ_i (取值范围为-1~1),将涉及3个材料参数的解析解简化到仅与2个材料参数相关。通过提取解析解中的许多相同表达式,最终,二维椭圆热夹杂的所有解析解都以更加统一简洁的形式表达,从而极大地简化了最终的解析解并减少了后续编程验证时的工作量。

为了从机理上理解双材料解析解在结合界面处的连续性,还讨论了双材料中含椭圆热夹杂物引起的弹性场在结合界面处的跳跃条件。为了确保解析解的正确性,通过调整杨氏模量和泊松比,将当前解与已发表的全平面和半平面中的解析解进行比较并验证。验证结果表明,当前解与相应的全平面和半平面中的解析

解高度一致,表明推导出的解析解是正确的。在全平面中,椭圆热夹杂内的正应力值和正应变值保持不变,在椭圆热夹杂外正应力之和与正应变之和均等于0,2方向的正应力值等于1方向的正应力值和3方向的正应力值的总和。最后,给出了在刚性基底情况下,双材料含椭圆热夹杂解析解的示例图。在这3种情况下,椭圆热夹杂内的剪切应变和剪切应力始终等于0。

仔细推导并研究了双材料结合界面处的跳跃条件。在对材料参数进行研究时表明,在热膨胀情况下,当夹杂物位于较软的半平面时,结合界面会吸引椭圆夹杂物,而当夹杂物嵌入较硬的相时,结合界面会排斥椭圆夹杂物。

参考文献

- [1] Hu S M. Stress-related problems in silicon technology[J]. Journal of Applied Physics, 1991, 70(6): R53-R80.
- [2] Li P, Jin F. Excitation and propagation of shear horizontal waves in a piezoelectric layer imperfectly bonded to a metal or elastic substrate[J]. Acta Mechanica, 2015, 226(2): 267-284.
- [3] Liu J X, Wang Y H, Wang B L. Propagation of shear horizontal surface waves in a layered piezoelectric half-space with an imperfect interface[J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 2010, 57(8): 1875-1879.
- [4] Chen D H, Hironobu N, Toshio M. Effect of elastic constants on stress in multi-phases under plane deformation[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1994, 48(3): 347-357.
- [5] Hills D A, Kelly P A, Dai D N, et al. Solution of crack problems: the distributed dislocation technique[J]. Journal of Applied Mechanics, 1998, 65(2): 548.
- [6] Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems[J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A, 1957, 241(1226): 376-396.
- [7] Li S F, Wang G. Introduction to micromechanics and nanomechanics[M]. Singapore: World Scientific, 2008.
- [8] Mura T. Micromechanics of defects in solids[M]. Dordrecht: Springer Netherlands, 1982.
- [9] Mirsayar M M, Shi X, Zollinger D G. Evaluation of interfacial bond strength between Portland cement concrete and asphalt concrete layers using bi-material SCB test specimen[J]. Engineering Solid Mechanics, 2017: 293-306.
- [10] Yu H, Wang Z J, Wang Q. Analytical solutions for the elastic fields caused by eigenstrains in two frictionlessly joined half-spaces[J]. International Journal of Solids and Structures, 2016, 100: 74-94.
- [11] Mindlin R D, Cheng D H. Thermoelastic stress in the semi-infinite solid[J]. Journal of Applied Physics, 1950, 21(9): 931-933.
- [12] Dundurs J, Hetenyi M. Transmission of force between two semi-infinite solids[J]. Journal of Applied Mechanics, 1965, 32(3): 671.
- [13] Chiu Y P. On the stress field due to initial strains in a cuboid surrounded by an infinite elastic space[J]. Journal of Applied Mechanics, 1977, 44(4): 587-590.
- [14] Chiu Y P. On the stress field and surface deformation in a half space with a cuboidal zone in which initial strains are uniform[J]. Journal of Applied Mechanics, 1978, 45(2): 302-306.
- [15] Ju J W, Sun L Z. A novel formulation for the exterior-point Eshelby's tensor of an ellipsoidal inclusion[J]. Journal of Applied Mechanics, 1999, 66(2): 570.
- [16] 李璞,朱凯,侯佳卉,等.非均质材料与位错交互能的数值等效夹杂算法[J].工程力学,2022,39(7): 10-18.
Li P, Zhu K, Hou J H, et al. A numerical equivalent inclusion method for determining the interaction energy between inhomogeneities and dislocations[J]. Engineering Mechanics, 2022, 39(7): 10-18. (in Chinese)
- [17] 谢东东.半平面含任意本征应变分量夹杂问题的基本单元解研究[D].重庆:重庆大学,2022.
Xie D D. On the elementary solution of Eshelby's inclusion with arbitrary eigenstrain components in an elastic half-plane[D]. Chongqing: Chongqing University, 2022. (in Chinese)
- [18] 金晓清,牛飞飞,张睿,等.均布激励基本单元解析解的一种记号方法[J].上海交通大学学报,2016,50(8): 1221-1227.
Jin X Q, Niu F F, Zhang R, et al. A notation for elementary solution to uniformly distributed excitation over a rectangular cuboidal domain[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2016, 50(8): 1221-1227. (in Chinese)
- [19] Liu Z, Fang M, Shi L, Gu Y, Chen Z, Zhu W. Characteristics of cracking failure in microbump joints for 3D chip-on-chip interconnections under drop impact[J]. Micromachines, 2022, 13: 281.
- [20] Wang H T, Wang G Z, Xuan F Z, et al. An experimental investigation of local fracture resistance and crack growth paths in a

- dissimilar metal welded joint[J]. Materials & Design, 2013, 44: 179-189.
- [21] Aderogba K. On eigenstresses in smoothly soldered solids[J]. International Journal of Engineering Science, 1981, 19(5): 729-736.
- [22] Dundurs J, Guell D L. Center of dilatation and thermal stresses in joined elastic half-space[M]// Developments in Theoretical and Applied Mechanics. Oxford: Pergamon Press, 1965: 199-211.
- [23] Guell D L, Dundurs J. Further results on center of dilatation and residual stresses in joined elastic half-spaces[M]// Developments in Theoretical and Applied Mechanics. Amsterdam: Elsevier, 1967: 105-115.
- [24] Yu H Y, Sanday S C. Elastic fields in joined half-spaces due to nuclei of strain[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences, 1991, 434(1892): 503-519.
- [25] Walpole L J. An inclusion in one of two joined isotropic elastic half-spaces[J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 1997, 59(2): 193-209.
- [26] Wang Z J, Yu H, Wang Q. Analytical solutions for elastic fields caused by eigenstrains in two joined and perfectly bonded half-spaces and related problems[J]. International Journal of Plasticity, 2016, 76: 1-28.
- [27] Li D L, Wang Z J, Wang Q. Explicit analytical solutions for elastic fields in two imperfectly bonded half-spaces with a thermal inclusion[J]. International Journal of Engineering Science, 2019, 135: 1-16.
- [28] Li D L, Wang Z J, Yu H, et al. Elastic fields caused by eigenstrains in two joined half-spaces with an interface of coupled imperfections: dislocation-like and force-like conditions[J]. International Journal of Engineering Science, 2018, 126: 22-52.
- [29] Lyu D, Jiang Z Z, Zhu K, et al. The explicit elastic field for two perfectly bonded half-spaces with an ellipsoidal thermal inclusion[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2022, 236: 107745.
- [30] Jin X Q, Keer L M, Wang Q. A closed-form solution for the Eshelby tensor and the elastic field outside an elliptic cylindrical inclusion[J]. Journal of Applied Mechanics, 2011, 78(3): 031009.
- [31] Jin X Q, Zhang X N, Li P, et al. On the displacement of a two-dimensional Eshelby inclusion of elliptic cylindrical shape[J]. Journal of Applied Mechanics, 2017, 84(7): 074501.
- [32] Lyu D, Zhang X N, Li P, et al. Explicit analytical solutions for the complete elastic field produced by an ellipsoidal thermal inclusion in a semi-infinite space[J]. Journal of Applied Mechanics, 2018, 85(5): 051005.
- [33] Ru C Q. Analytic solution for Eshelby's problem of an inclusion of arbitrary shape in a plane or half-plane[J]. Journal of Applied Mechanics, 1999, 66(2): 315-322.
- [34] Yu H Y, Wei Y N, Chiang F P. Load transfer at imperfect interfaces: dislocation-like model[J]. International Journal of Engineering Science, 2002, 40(14): 1647-1662.

(编辑 郑洁)