

doi: 10.11835/j.issn.1000-582X.2025.208

引用格式:邢庆坤,冯锦平,张静,等.含双星排的多级行星机构的扭转振动模态计算分析[J].重庆大学学报,2025,48(5): 51-65.



# 含双星排的多级行星机构的扭转振动模态计算分析

邢庆坤<sup>1,2</sup>,冯锦平<sup>3</sup>,张 静<sup>2</sup>,秦大同<sup>1</sup>

(1. 重庆大学 高端装备机械传动国家重点实验室,重庆 400044; 2. 中国北方车辆研究所,北京 100072;  
3. 湖北科技学院 自动化学院,湖北 咸宁 437100)

**摘要:**机电复合传动系统的激励幅值大、频率范围宽,更易激发扭转振动,降低传动品质和寿命。针对由单星排和双星排组成的某功率耦合机构的变速部件,考虑异型结构和阶梯轴的高阶动力学特性,建立了传动系统的集中参数扭振动力学模型,分析了行星排及传动系统的扭振模态,并进行了仿真对比,探索了结构参数对模态的影响。结果表明:动力学模型与仿真模型的固有频率平均相对误差为 1.4%;行星排和传动系统均包含刚体模态、行星轮独立扭振模态及整体扭振模态,传动系统还包含异型结构局部模态;输入轴外径、啮合刚度、输出轴外径、啮合齿宽、输出输入轴端等效转动惯量对传动系统整体扭振模态的影响依次降低;啮合刚度对行星轮独立扭振模态影响显著。所述方法可为多级行星机构扭振分析及改善提供参考。

**关键词:**齿轮;多级行星机构;模态分析;扭转振动;固有频率

**中图分类号:**TH132.4      **文献标志码:**A      **文章编号:**1000-582X(2025)05-051-15

## Torsional vibration modal analysis of a multistage planetary gear transmission system with a double-planet planetary gear set

XING Qingkun<sup>1,2</sup>, FENG Jinping<sup>3</sup>, ZHANG Jing<sup>2</sup>, QIN Datong<sup>1</sup>

(1. State Key Laboratory of Mechanical Transmission for Advanced Equipment, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China; 2. China North Vehicle Research Institute, Beijing 100072, P. R. China;  
3. College of Automation, Hubei University of Science and Technology, Xianning, Hubei 437100, P. R. China)

**Abstract:** The transmission quality and fatigue life of electro-mechanical drive systems can be significantly affected by heavy loads and broadband excitation, which readily trigger torsional vibrations. To study the dynamic behavior of a transmission system composed of both single-planet and double-planet planetary gear sets within a power coupling mechanism, a lumped-parameter dynamic model was developed. This model incorporates the high-order dynamic characteristics of irregular structures and stepped shafts. The torsional modes of individual planetary gear sets and the overall transmission system were calculated and compared with simulation results. In

收稿日期:2024-11-12      网络出版日期:2025-03-21

基金项目:国家自然科学基金资助项目(52375040);湖北科技学院校内科研发展基金资助项目(BK202019)。

Supported by National Natural Science Foundation of China(52375040), and Scientific Research Development Foundation of Hubei University of Science and Technology(BK202019).

作者简介:邢庆坤(1983—),男,研究员,博士研究生,主要从事机电复合行星传动技术研究,(E-mail)xingqingkun@163.com。

通信作者:冯锦平,男,高级工程师,(E-mail)fengjinping@hbust.edu.cn。

addition, the effects of structural parameters on the natural frequencies of the system were investigated. The results show that the average relative error in natural frequencies between the proposed dynamic model and the simulation model is 1.4%, confirming the model's accuracy. Both individual planetary gear sets and the complete transmission system exhibit three categories of vibration modes: rigid body modes, independent torsional vibration modes of the planet gears, and overall torsional vibration modes. Furthermore, the full transmission system also exhibits localized modes associated with structural irregularities. Sensitivity analysis reveals that the structural parameters most affecting the system's natural frequency, in descending order, are the outer diameter of the input shaft, meshing stiffness, outer diameter of the output shaft, effective meshing width of the planetary gear sets, output equivalent moment of inertia, and input equivalent moment of inertia. Notably, meshing stiffness significantly influences the independent torsional modes of the planetary gears. The methodology presented in this study offers a valuable reference for analyzing torsional vibrations in multistage planetary gear transmission systems.

**Keywords:** gears; multistage planetary train; modal analysis; torsional vibration; natural frequency

行星机构具有结构紧凑、传动比大、传递功率高、构型设计丰富等优势,在重载、高速机械传动领域应用广泛,比如履带车辆的机电复合传动系统。行星机构动力学特性影响传动系统的振动、噪声、应力和疲劳寿命,当前研究内容集中在动力学建模、固有频率影响因素和动态响应等方面。Zhang 等<sup>[1]</sup>分析了均布行星轮的数量、行星排间耦合刚度对两级封闭行星轮系模态的影响。Liu 等<sup>[2]</sup>分析了中间轴长度、行星轮数量对两级行星轮系模态的影响。李国彦等<sup>[3]</sup>研究了时变啮合刚度及裂纹对复合两级行星轮系固有频率的影响。莫帅等<sup>[4]</sup>研究了啮合刚度、支撑刚度、扭转刚度和构件质量对面齿轮-行星轮系固有频率的影响。曾根等<sup>[5]</sup>研究了单个行星排与高速转子耦合的模态和振动特性。Xiao 等<sup>[6]</sup>研究了周期性啮合刚度、级间耦合、齿面摩擦力对两级行星轮系动力学响应的影响。Zhang 等<sup>[7]</sup>分析了两级行星轮系-轴承-转子-离合器耦合系统在离合器轮齿随机冲击下的响应。Tan 等<sup>[8]</sup>研究了行星架、齿圈的结构柔性对重载风电齿轮传动的承载影响。

随着车辆由内燃机驱动向机电复合传动或纯电驱转变,驱动转速提高,扭转振动的激励频率范围加宽。随着工作负载增大,以及行驶路况的复杂化,扭转振动的激励幅值增大,更加容易激发传动系统扭转振动,降低驾驶品质和系统寿命。因此,扭转振动作为齿轮传动系统的重要振动形式,一直备受研究关注。徐尤南等<sup>[9]</sup>求解了 TBM 两级行星齿轮传动系统的扭振模态及振动响应。张强等<sup>[10]</sup>和窦作成等<sup>[11]</sup>对多挡位行星传动系统进行了扭振分析和优化。张伟等<sup>[12]</sup>采用主从控制方法改变大功率机电复合传动系统的低频扭振特性。刘芳等<sup>[13]</sup>研究了转动惯量、质量和阻尼对传动系统扭振的影响。李孝磊等<sup>[14]</sup>分析了电机电磁刚度影响下的全电直驱传动系统的扭转振动特性及灵敏度。岳宏伟等<sup>[15]</sup>验证了限制电机转矩变化率可降低双电机耦合传动系统的扭转振动。王峰等<sup>[16]</sup>采用混杂模型预测控制器减小了行星耦合插电式混合动力汽车(plug-in hybrid electric vehicle, PHEV)模式切换过程的扭振值。

在选择多自由度行星变速简图方案时,引入双星排具有特定优势,比如,扩大行星排特性参数的取用范围,优化挡位操纵逻辑(如利用制动器取代离合器实现特定挡位,提升操纵元件工作可靠性)。虽然双星排在履带车辆变速机构中已具有一定的应用,但还缺少动力学研究和评价。除此之外,当前较多研究模型对行星架、壳体或阶梯轴等结构做了较大简化,不利于评价传动系统的高阶动力学特性,并且对固有频率影响因素的研究通常集中在抽象的刚度或者质量参数,不便于直接指导结构参数优化。故本研究以含双星排的功率耦合机构的变速部件为对象,为了保留异型结构和阶梯轴的高阶动力学特性,提取了行星架、外毂等异型结构的缩聚动力学矩阵、建立了阶梯轴的多节点动力学模型,构建了单星排和双星排动力学模型,组装合成了传动系统的整体动力学模型,并分析了传动系统结构参数对固有频率的影响,为多级行星机构的动力学建模和模态优化提供参考。

## 1 研究对象

研究对象为图1所示的功率耦合机构的变速部件,由输入轴、外殼、单星排、双星排、输出轴、行星架、离合器、输入输出负荷组成。输入轴与单星排连接,单星排将动力传递给双星排,最后传递到输出轴。挡位由连接行星排与外殼的离合器控制:单星排离合器结合,双星排离合器分离时为2挡;单星排离合器分离,双星排离合器结合时为1挡。

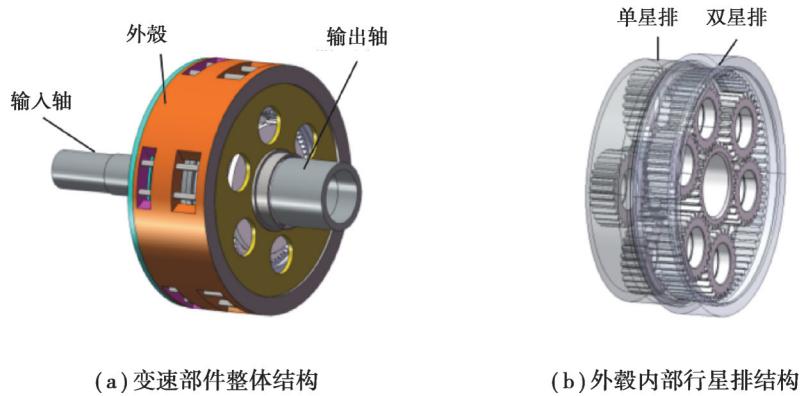


图1 功率耦合机构的变速部件

Fig. 1 Variable speed transmission component of a power coupling mechanism

行星排参数如表1所示,其他参数说明如下:输入轴是3段式实心阶梯轴,各段外径如图1所示,从左往右依次为65、70、64 mm,各段长度依次为110、134、71 mm;输出轴是2段式空心轴,外径为115 mm,各段内径从左往右依次为90.5、98 mm,各段长度依次为66、40 mm;输入轴首端和输出轴尾端的等效转动惯量分别为600、1 200  $t \cdot mm^2$ ;与单星排和双星排连接的离合器的转动惯量分别为236.27、437.83  $t \cdot mm^2$ ;材料密度、泊松比、弹性模量统一取 $7.8 \times 10^{-9} t/mm^3$ 、0.3、 $2.06 \times 10^5$  MPa。

表1 行星排参数

Table 1 Parameters of planetary gear sets

参数	单星排	双星排	参数	单星排	双星排
太阳轮转动惯量/( $t \cdot mm^2$ )	1.37	1.97	太阳轮变位系数	0.37	0.32
行星轮转动惯量/( $t \cdot mm^2$ )	0.99	0.63	行星轮变位系数	0.25	0.22
行星轮质量/ $10^{-4}t$	8.66	6.36	齿圈变位系数	0.86	1.32
齿圈转动惯量/( $t \cdot mm^2$ )	65.7	123.0	模数/mm	3	3
太阳轮齿数	29	31	压力角/( $^\circ$ )	20	20
行星轮齿数	27	24	行星轮均布数	4	3
齿圈齿数	83	83			

变速部件的扭振模态分析基于以下简化或假设:

- 1)为了提高建模速度和低频模态的准确度,根据能量定律将研究对象的上下游结构等效为集中质量添加在输入输出轴端面。
- 2)高阶模态多为局部模态,在此忽略上下游结构对传动系统的高阶模态的影响。
- 3)研究对象的行星轮采用成对圆柱滚子轴承支撑,假设轴承支撑刚度足够大,忽略因轴承承载变形导致的齿轮位置变化。
- 4)行星架等异型结构的承载变形会改变齿轮位置,引起齿面啮合失配,降低齿轮啮合刚度。在此,引入齿轮啮合刚度(独立变化参数)变化评价齿面失配对传动系统模态的影响。

5)假设渐开线花键处于理想啮合状态,且内外花键按刚性耦合处理。

## 2 扭振动力学建模

对规则结构(阶梯轴、行星排等)采用集中质量弹簧模型建立阶梯轴单元和行星排单元的动力学模型;对异型结构(如行星架、外毂箱体)采用固定界面法建立异型结构单元的动力学缩聚模型;根据单元之间的连接关系对所有节点进行整体编号,合成传动系统的整体质量矩阵和刚度矩阵。

### 2.1 阶梯轴动力学模型

将阶梯轴按图2所示划分为有限个圆柱体子单元,每个子单元由2个节点组成,子单元序号依次从1到 $q$ ,合计 $q+1$ 个节点。

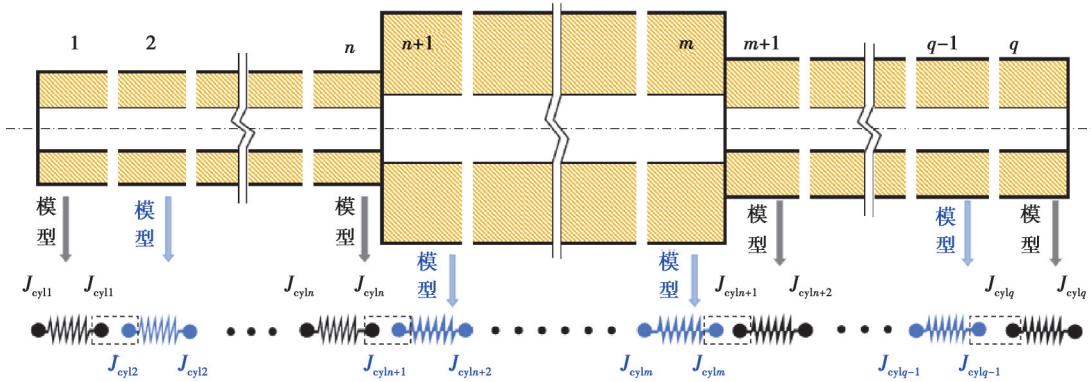


图2 阶梯轴单元动力学模型

Fig. 2 Dynamic model of stepped shaft element

阶梯轴单元的节点的位移向量 $\mathbf{X}_{\text{sha}}$ 为

$$\mathbf{X}_{\text{sha}} = [\theta_{\text{cyl}1}, \theta_{\text{cyl}2}, \dots, \theta_{\text{cyl}q}, \theta_{\text{cyl}q+1}]^T. \quad (1)$$

式中, $k_{\text{cyl}i}$ 和 $J_{\text{cyl}i}$ 分别表示第 $i$ 个子单元的扭转刚度和节点的转动惯量,采用影响系数法<sup>[17]</sup>合成阶梯轴单元的刚度矩阵 $\mathbf{K}_{\text{sha}}$ 和质量矩阵 $\mathbf{M}_{\text{sha}}$ 。

$$\mathbf{M}_{\text{sha}} = \text{diag}([J_{\text{cyl}1}, J_{\text{cyl}1} + J_{\text{cyl}2}, J_{\text{cyl}2} + J_{\text{cyl}3}, \dots, J_{\text{cyl}q-1} + J_{\text{cyl}q}, J_{\text{cyl}q}]), \quad (2)$$

$$\mathbf{K}_{\text{sha}} = \begin{bmatrix} k_{\text{cyl}1} & -k_{\text{cyl}1} & & & & & & \\ -k_{\text{cyl}1} & k_{\text{cyl}1} + k_{\text{cyl}2} & -k_{\text{cyl}2} & \cdots & & & & 0 \\ -k_{\text{cyl}2} & k_{\text{cyl}2} + k_{\text{cyl}3} & & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & -k_{\text{cyl}q-1} & k_{\text{cyl}q-1} + k_{\text{cyl}q} & -k_{\text{cyl}q} & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix}. \quad (3)$$

其中, $k_{\text{cyl}i}$ 和 $J_{\text{cyl}i}$ 由材料力学相关理论<sup>[18]</sup>表达如下:

$$k_{\text{cyl}i} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\pi((2R_i)^4 - (2r_i)^4)}{32l_i}, \quad (4)$$

$$J_{\text{cyl}i} = \frac{\rho\pi((2R_i)^4 - (2r_i)^4)l_i}{64}. \quad (5)$$

式中: $E$ 为弹性模量; $\nu$ 为泊松比; $\rho$ 为密度; $R_i$ 为圆柱体子单元 $i$ 的外径; $r_i$ 为圆柱体子单元 $i$ 的内径; $l_i$ 为圆柱体子单元 $i$ 的长度。

阶梯轴单元的无阻尼自由振动动力学方程为

$$\mathbf{M}_{\text{sha}} \ddot{\mathbf{X}}_{\text{sha}} + \mathbf{K}_{\text{sha}} \mathbf{X}_{\text{sha}} = 0. \quad (6)$$

### 2.2 单星排动力学模型

以图3所示的具有4个行星轮的单星排为例,推导其动力学方程<sup>[19]</sup>。定义齿轮和行星架的逆时针方向为

正,  $k_{s_i}$  为太阳轮与行星轮  $i$  沿啮合线方向的平均啮合刚度,  $k_{r_i}$  为齿圈与行星轮  $i$  沿啮合线方向的平均啮合刚度,  $r_s, r_i, r_r$  分别是太阳轮、行星轮  $i$ 、齿圈的基圆半径,  $\theta_c, \theta_s, \theta_r, \theta_i$  分别为行星架、太阳轮、齿圈和第  $i$  个行星轮的绝对扭振角位移。

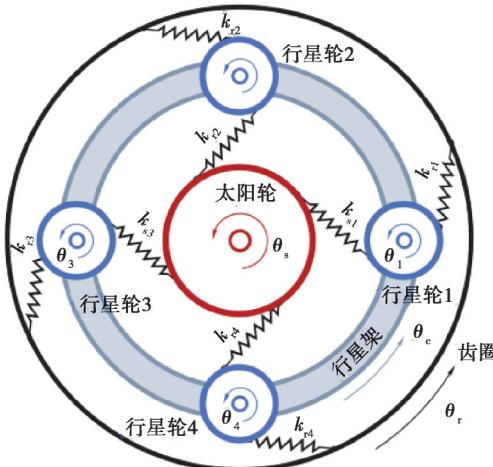


图3 单星排扭转动力学模型

**Fig. 3** Dynamic model of single-planet planetary gear set

单星排动能  $T$  和势能  $U$  表达如下：

$$T = 1/2 ( J_{\text{cc}} \dot{\theta}_{\text{c}}^2 + J_{\text{s}} \dot{\theta}_{\text{s}}^2 + J_{\text{r}} \dot{\theta}_{\text{r}}^2 + J_1 \dot{\theta}_1^2 + J_2 \dot{\theta}_2^2 + J_3 \dot{\theta}_3^2 + J_4 \dot{\theta}_4^2 ), \quad (7)$$

$$U = 1/2 \left( \sum_{i=1}^4 k_{si} (r_i(\theta_i - \theta_c) + r_s(\theta_s - \theta_c))^2 + \sum_{i=1}^4 k_{ri} (-r_i(\theta_i - \theta_c) + r_r(\theta_r - \theta_c))^2 \right) \circ \quad (8)$$

式中，

$$J_{\text{ec}} = 4m_i a^2 + J_{\text{c0}} \quad (9)$$

式中： $J_s$ 、 $J_r$ 、 $J_i$  分别为太阳轮、齿圈、第  $i$  个行星轮的转动惯量； $m_i$  为行星轮质量； $a$  为行星轮与太阳轮的中心距； $J_{ec}$  为行星架等效转动惯量，由行星轮的质量引起的等效转动惯量  $4m_i a^2$  和行星架本体与行星轮耦合的转动惯量  $J_{e0}$  组成。本算例中行星架按缩聚动力学方法单独建模，故  $J_{e0}$  取值为 0， $J_{ec}$  取值为  $4m_i a^2$ 。

令行星机构的外力为零,且  $r_{si} = r_s + r_i$ ,  $r_{ri} = r_r - r_i$ ,根据拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial \theta} = 0, \quad (10)$$

### 推导出单星排单元的刚度矩阵

$$\mathbf{K}_{\text{gt\_1}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (k_{si} r_{si}^2 + k_{ri} r_{ri}^2) & & & & & & \\ -\sum_{i=1}^n k_{si} r_{si} r_s & \sum_{i=1}^n k_{si} r_s^2 & & & & & \text{symmetric} \\ -\sum_{i=1}^n k_{ri} r_{ri} r_r & 0 & \sum_{i=1}^n k_{ri} r_r^2 & & & & \\ k_{r1} r_{r1} r_1 - k_{s1} r_{s1} r_1 & k_{s1} r_s r_1 & -k_{r1} r_r r_1 & (k_{s1} + k_{r1}) r_1^2 & & & \\ k_{r2} r_{r2} r_2 - k_{s2} r_{s2} r_2 & k_{s2} r_s r_2 & -k_{r2} r_r r_2 & 0 & (k_{s2} + k_{r2}) r_2^2 & & \\ k_{r3} r_{r3} r_3 - k_{s3} r_{s3} r_3 & k_{s3} r_s r_3 & -k_{r3} r_r r_3 & 0 & 0 & (k_{s3} + k_{r3}) r_3^2 & \\ k_{r4} r_{r4} r_4 - k_{s4} r_{s4} r_4 & k_{s4} r_s r_4 & -k_{r4} r_r r_4 & 0 & 0 & 0 & (k_{s4} + k_{r4}) r_4^2 \end{bmatrix} \circ \quad (11)$$

式中:  $n$  为行星轮均布数; 采用势能法<sup>[20]</sup>求解轮齿弯曲、剪切和压缩刚度, 采用丁长安等<sup>[21]</sup>提出的线接触弹性变形公式求解接触刚度, 采用 Sainsot 等<sup>[22]</sup>提出的拟合公式求解轮体基础刚度, 各刚度串联得到齿轮啮合刚度。

单星排的质量矩阵为

$$M_{gt,1} = \text{diag}([J_{cc}, J_s, J_r, J_1, J_2, J_3, J_4])_o \quad (12)$$

单星排的广义位移向量  $X_{gt\_1}$  为

$$X_{gt\_1} = [\theta_c, \theta_s, \theta_r, \theta_{b1}, \theta_{b2}, \theta_{b3}, \theta_{d1}]^T。 \quad (13)$$

单星排单元的无阻尼自由振动动力学模型为

$$M_{gt\_1} \ddot{X}_{gt\_1} + K_{gt\_1} X_{gt\_1} = 0。 \quad (14)$$

### 2.3 双星排动力学模型

以图4所示的具有3对行星轮的双星排为例,推导其动力学方程。

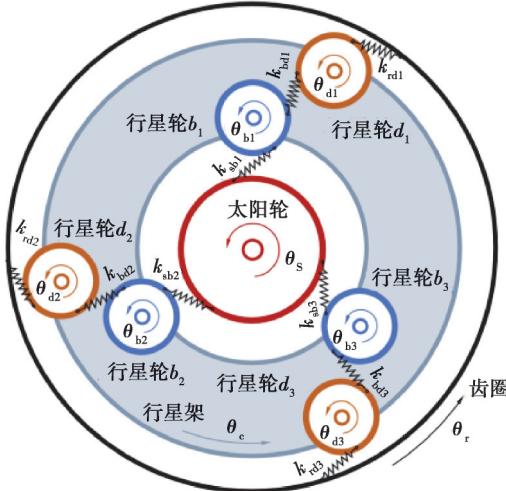


图4 双星排扭转力学模型

Fig. 4 Dynamic model of double-planet planetary gear set

其中,  $k_{sb_i}$  为太阳轮与第  $i$  个行星轮 b 沿啮合线方向的平均啮合刚度,  $k_{bd_i}$  为第  $i$  对行星轮沿啮合线方向的平均啮合刚度,  $k_{rd_i}$  为齿圈与第  $i$  个行星轮 d 沿啮合线方向的平均啮合刚度,  $r_s, r_{bi}, r_{di}, r_r$  分别是太阳轮、行星轮 b、行星轮 d 和齿圈的基圆半径。 $\theta_c, \theta_s, \theta_r, \theta_{bi}, \theta_{di}$  为行星架、太阳轮、齿圈和第  $i$  行星轮 b 和第  $i$  个行星轮 d 的绝对扭转角位移。双星排各集中质量的广义位移向量  $X_{gt\_2}$  为

$$X_{gt\_2} = [\theta_c, \theta_s, \theta_r, \theta_{b1}, \theta_{b2}, \theta_{b3}, \theta_{d1}, \theta_{d2}, \theta_{d3}]^T。 \quad (15)$$

令  $r_{sbi} = r_s + r_{bi}$ ,  $r_{rdi} = r_r - r_{di}$ ,  $r_{bdi} = r_{bi} + r_{di}$ ,  $n$  为行星轮均布数, 根据拉格朗日公式推导出双星排刚度矩阵  $K_{gt\_2}$  为

$$K_{gt\_2} = \left[ \begin{array}{cccccc} \sum_{i=1}^n (k_{sb_i} r_{sbi}^2 + k_{rd_i} r_{rdi}^2 + k_{bd_i} r_{bdi}^2) & & & & & \\ -\sum_{i=1}^n k_{sb_i} r_{sbi} r_s & \sum_{i=1}^n k_{sb_i} r_s^2 & & & & \text{symmetric} \\ -\sum_{i=1}^n k_{rd_i} r_{rdi} r_r & 0 & \sum_{i=1}^n k_{rd_i} r_r^2 & & & \\ (-k_{sb1} r_{sb1} - k_{bd1} r_{bd1}) r_{b1} & k_{sb1} r_s r_{b1} & 0 & (k_{sb1} + k_{bd1}) r_{b1}^2 & & \\ (-k_{sb2} r_{sb2} - k_{bd2} r_{bd2}) r_{b2} & k_{sb2} r_s r_{b2} & 0 & 0 & (k_{sb2} + k_{bd2}) r_{b2}^2 & \\ (-k_{sb3} r_{sb3} - k_{bd3} r_{bd3}) r_{b3} & k_{sb3} r_s r_{b3} & 0 & 0 & 0 & (k_{sb3} + k_{bd3}) r_{b3}^2 \\ (k_{rd1} r_{rd1} - k_{bd1} r_{bd1}) r_{d1} & 0 & -k_{rd1} r_r r_{d1} & k_{bd1} r_{b1} r_{d1} & 0 & (k_{rd1} + k_{bd1}) r_{d1}^2 \\ (k_{rd2} r_{rd2} - k_{bd2} r_{bd2}) r_{d2} & 0 & -k_{rd2} r_r r_{d2} & 0 & k_{bd2} r_{b2} r_{d2} & 0 & (k_{rd2} + k_{bd2}) r_{d2}^2 \\ (k_{rd3} r_{rd3} - k_{bd3} r_{bd3}) r_{d3} & 0 & -k_{rd3} r_r r_{d3} & 0 & 0 & k_{bd3} r_{b3} r_{d3} & 0 & (k_{rd3} + k_{bd3}) r_{d3}^2 \end{array} \right]。 \quad (16)$$

双星排质量矩阵为

$$M_{gt\_2} = \text{diag}([J_{cc}, J_s, J_r, J_{b1}, J_{b2}, J_{b3}, J_{d1}, J_{d2}, J_{d3}]), \quad (17)$$

其中,

$$J_{cc} = 4(m_{bi} a_{sb}^2 + m_{di} a_{rd}^2) + J_{c0}, \quad (18)$$

式中:  $m_{bi}$ 、 $m_{di}$  分别为行星轮 b 和行星轮 d 的质量;  $a_{sb}$  为太阳轮与行星轮 b 的中心距;  $a_{rd}$  为齿圈与行星轮 d 的中心距;  $J_{c0}$  含义与单星排模型一致。

双星排单元的无阻尼自由振动动力学模型为

$$\mathbf{M}_{gt\_2}\ddot{\mathbf{X}}_{gt\_2} + \mathbf{K}_{gt\_2}\mathbf{X}_{gt\_2} = 0. \quad (19)$$

## 2.4 异型结构动力学模型

采用Craig-Bampton方法<sup>[23]</sup>改进的固定界面法建立行星架和外毂等异型结构的动力学缩聚模型。具体理论为

$$\mathbf{M}_w \ddot{\mathbf{X}}_w + \mathbf{K}_w \mathbf{X}_w = 0, \quad (20)$$

式中,  $\mathbf{M}_w$ 、 $\mathbf{K}_w$ 、 $\mathbf{X}_w$  分别为结构的质量矩阵、刚度矩阵和位移向量。按主自由度和从自由度将质量矩阵和刚度矩阵分块表示

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{w\_mm} & \mathbf{M}_{w\_ms} \\ \mathbf{M}_{w\_sm} & \mathbf{M}_{w\_ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{X}}_{w\_m} \\ \ddot{\mathbf{X}}_{w\_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{w\_mm} & \mathbf{K}_{w\_ms} \\ \mathbf{K}_{w\_sm} & \mathbf{K}_{w\_ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{w\_m} \\ \mathbf{X}_{w\_s} \end{bmatrix} = 0, \quad (21)$$

式中:脚标 m 表示主自由度;脚标 s 表示从自由度。

建立位移向量  $\mathbf{X}_w$  与动力学缩聚模型广义位移向量  $\mathbf{X}_{wm}$  的坐标变换关系

$$\mathbf{X}_w = \mathbf{T} \mathbf{X}_{wm} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{w\_m} \\ \boldsymbol{\varphi}_{w\_c} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

式中:  $\boldsymbol{\varphi}_{w\_c}$  是结构保留模态的广义模态坐标向量;坐标转换矩阵  $\mathbf{T}$  的表达式为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{K}_{w\_ss}^{-1} \mathbf{K}_{w\_sm} & \boldsymbol{\varphi}_{w\_c} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

将式(22)代入式(21),且在式(21)等式两侧左乘坐标转换矩阵的转置  $\mathbf{T}^T$ ,得动力学缩聚模型

$$\mathbf{M}_{wm} \ddot{\mathbf{X}}_{wm} + \mathbf{K}_{wm} \mathbf{X}_{wm} = 0. \quad (24)$$

以外毂为例说明采用有限元软件提取动力学缩聚模型的过程。外毂的约束及主节点位置信息如图5所示,外毂左侧端面固定约束。为了更准确地反映外毂的高阶动力学特性,尽量多地选择主节点数量和保留的模态阶数。选择6个主节点,包括3个轴承座的柔性控制节点1、5、6,外毂与离合器的接触面的柔性控制节点2、4,外毂与离合器活塞接触面的柔性控制节点3,取主节点绕x坐标轴的旋转方向为主自由度,设定保留模态数量为6阶。有限元模型节点数量为632 348,自由度数为1 897 044,提取的动力学缩聚质量、刚度矩阵的维度降低为  $12 \times 12$ 。

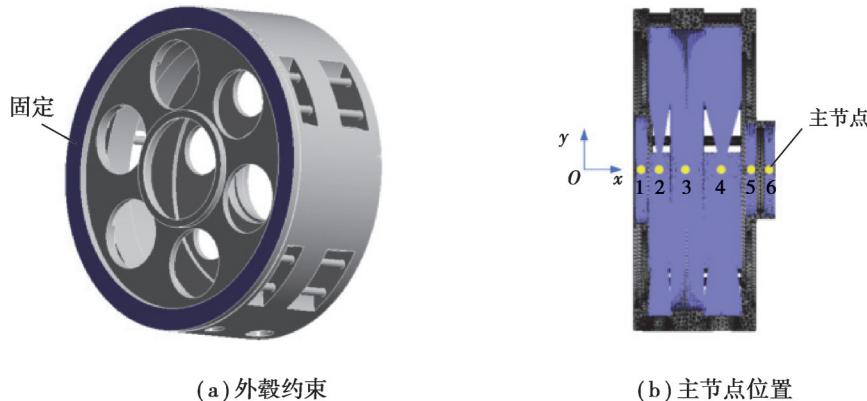


图5 外毂动力学缩聚有限元模型

Fig. 5 Finite element model of housing for dynamic condensation

提取行星架的动力学缩聚质量矩阵  $\mathbf{M}_{cm}$ 、刚度矩阵  $\mathbf{K}_{cm}$ 、外毂的缩聚质量矩阵  $\mathbf{M}_{hm}$ 、刚度矩阵  $\mathbf{K}_{hm}$ ,建立异型结构单元的动力学方程

$$\mathbf{M}_{cm} \ddot{\mathbf{X}}_{cm} + \mathbf{K}_{cm} \mathbf{X}_{cm} = 0, \quad (25)$$

$$\mathbf{M}_{hm} \ddot{\mathbf{X}}_{hm} + \mathbf{K}_{hm} \mathbf{X}_{hm} = 0, \quad (26)$$

式中,  $\mathbf{X}_{cm}$ 、 $\mathbf{X}_{hm}$  分别为行星架、外毂的广义位移向量。

## 2.5 整体动力学模型

输入输出端等效转动惯量采用质量单元表示;离合器采用扭转弹簧单元表示,结合状态时扭转刚度取值  $1 \times 10^{16}$  N·mm/rad,分离状态时取 0。对传动系统的所有组成单元的节点进行统一编号,赋予具有连接关系的节点相同编号,采用直接法组装整体刚度矩阵和质量矩阵<sup>[24]</sup>,得到传动系统的动力学模型

$$\mathbf{M}_G \ddot{\mathbf{X}}_G + \mathbf{K}_G \mathbf{X}_G = 0, \quad (27)$$

式中: $\mathbf{M}_G$  为整体质量矩阵; $\mathbf{K}_G$  为整体刚度矩阵; $\mathbf{X}_G$  为节点广义位移向量和力学缩聚模型保留模态的广义模态坐标向量的合向量<sup>[25]</sup>。

## 3 有限元仿真模型

图 6 为传动系统的有限元模型,采用 SOLID187 单元,总计 498 441 个单元、771 879 个节点数;材料密度取  $7.85 \times 10^{-9}$  t/mm<sup>3</sup>,弹性模量取  $2.06 \times 10^5$  MPa,泊松比取 0.3。建立输入输出轴、行星排、行星架和外毂等零部件的接触面的柔性控制节点。其中,行星轮控制节点具有绕自身轴线( $x_p$ )自由旋转的自由度,以及沿径向( $y_p$ 、 $z_p$ )自由移动的自由度,其余自由度均被约束。其他零件控制节点仅具备绕自身轴线( $x$ )自由旋转的自由度,其余自由度均被约束。采用 MATRIX27 刚度矩阵建立柔性控制节点之间的耦合关系,实现结构连接目的。以 1 档为例,花键、双星排离合器取较大扭振刚度值  $1 \times 10^{16}$  N·mm/rad(近似刚性连接),单星排离合器刚度值取 0,齿轮平移-扭转耦合刚度根据平均啮合刚度和啮合齿轮相对位置设定<sup>[26]</sup>;建立输入输出轴端面的柔性控制节点,在柔性控制节点上添加 MASS21 单元施加输入输出端的等效转动惯量。

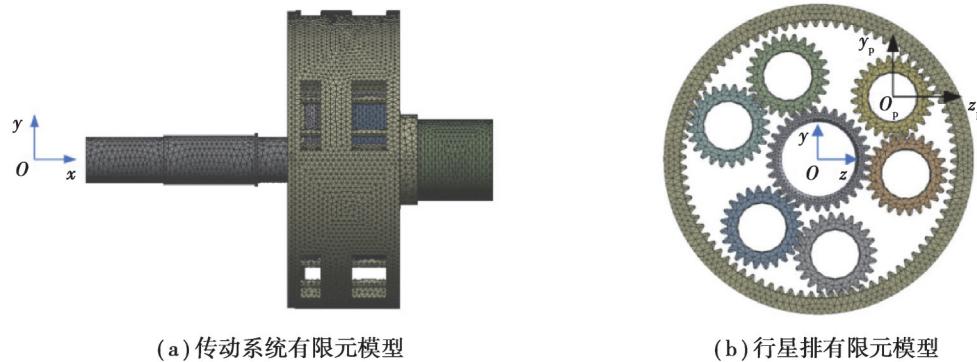


图 6 传动系统及行星排的有限元模型

Fig. 6 Finite element model of transmission system and planetary gear set

## 4 结果与讨论

### 4.1 单星排和双星排的模态

采用动力学模型和有限元仿真分别求解自由状态下的单星排和双星排的扭振模态。模态根据振型样式可分为 3 类:刚体模态(固有频率为 0 Hz)、行星轮独立扭振模态(仅行星轮扭振)、整体扭振模态(行星架发生扭振,行星轮存在公转和自转振动)。行星排的非刚体模态振型如图 7 所示。

图 7 中线框图表示动力学模型计算的各阶模态振型,彩色图表示有限元模型计算的各阶模态振型,左上角的  $f_i$  值表示第  $i$  阶模态的固有频率。由图可知,2 种方法计算得到的模态振型相似,固有频率相对误差在 4.9% 以内,平均相对误差为 2.0%,证明了动力学模型计算结果是可靠的。

算例中单星排与双星排的总体尺寸相近,双星排最低固有频率比单星排低,最高固有频率与单星排相近。因此,双星排相比单星排在低转速下产生共振的风险增大。双星排行星轮独立扭振模态最低固有频率为 5 733 Hz,与单星排(7 536 Hz)同比显著降低;双星排的整体扭振模态最低固有频率为 4 546 Hz,与单星排

同比(8 449 Hz)显著降低。双星排固有频率相比单星排降低的原因是:增加了一圈行星轮,串联引入了行星轮齿轮啮合刚度和质量,降低了系统刚度,增加了系统质量。

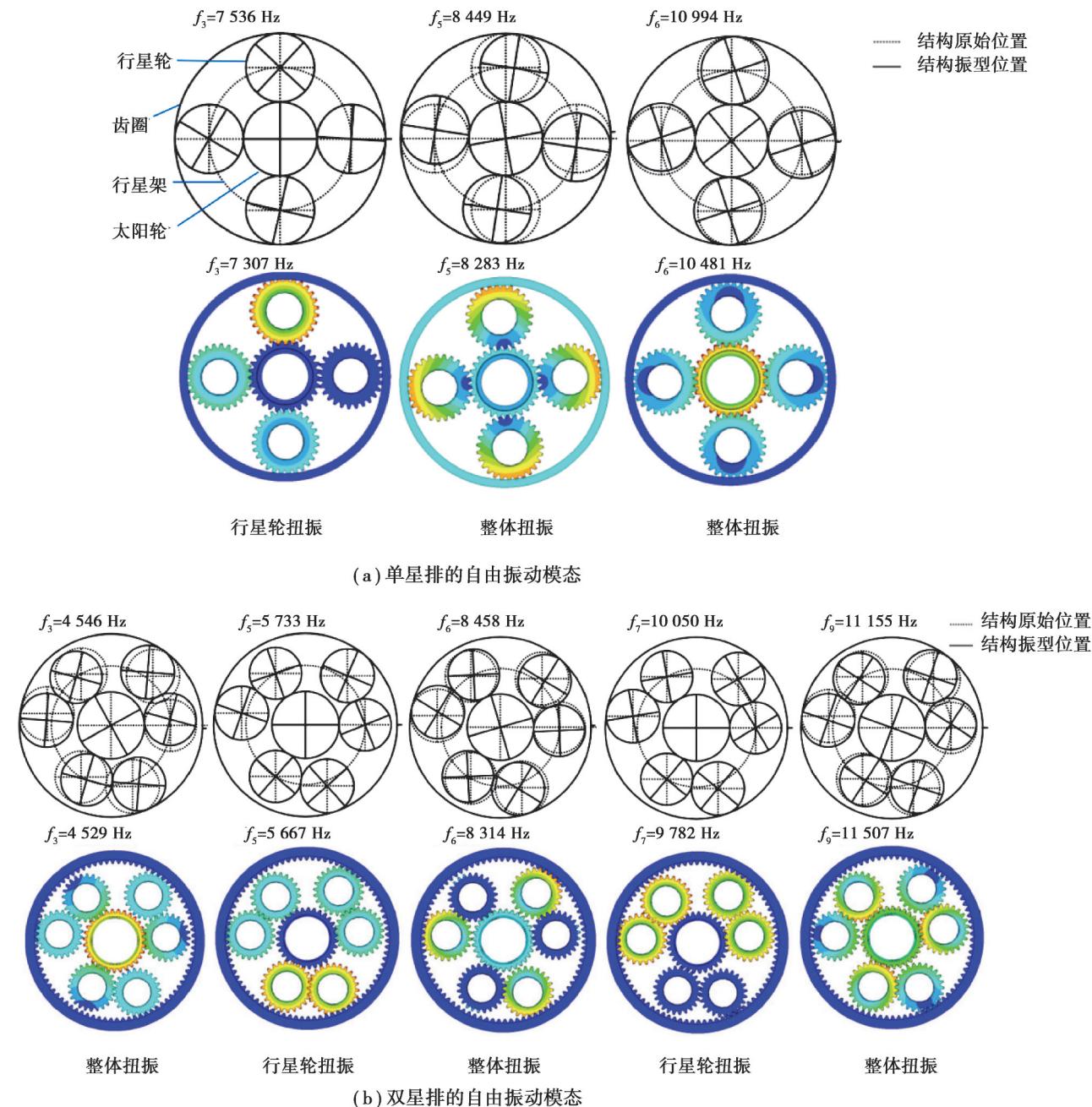


图 7 单星排和双星排的自由扭振模态

Fig. 7 Free torsional vibration modes of single-planet and double-planet planetary gear sets

#### 4.2 传动系统模态

以 1 档为例,根据模态振型将传动系统模态分为 4 类:刚体模态(固有频率为 0 Hz)、整体扭振模态、行星轮独立扭振模态、异型结构(外毂或行星架)局部模态。除刚体模态外,其他 3 种典型模态的动力学模型和有限元仿真的计算结果如图 8 所示。图示左侧传动系统的整体线框图中,实线表示结构的原始位置及形状,红色点表示输入输出轴的振型;图示右侧行星排线框的含义与图 7 相同。

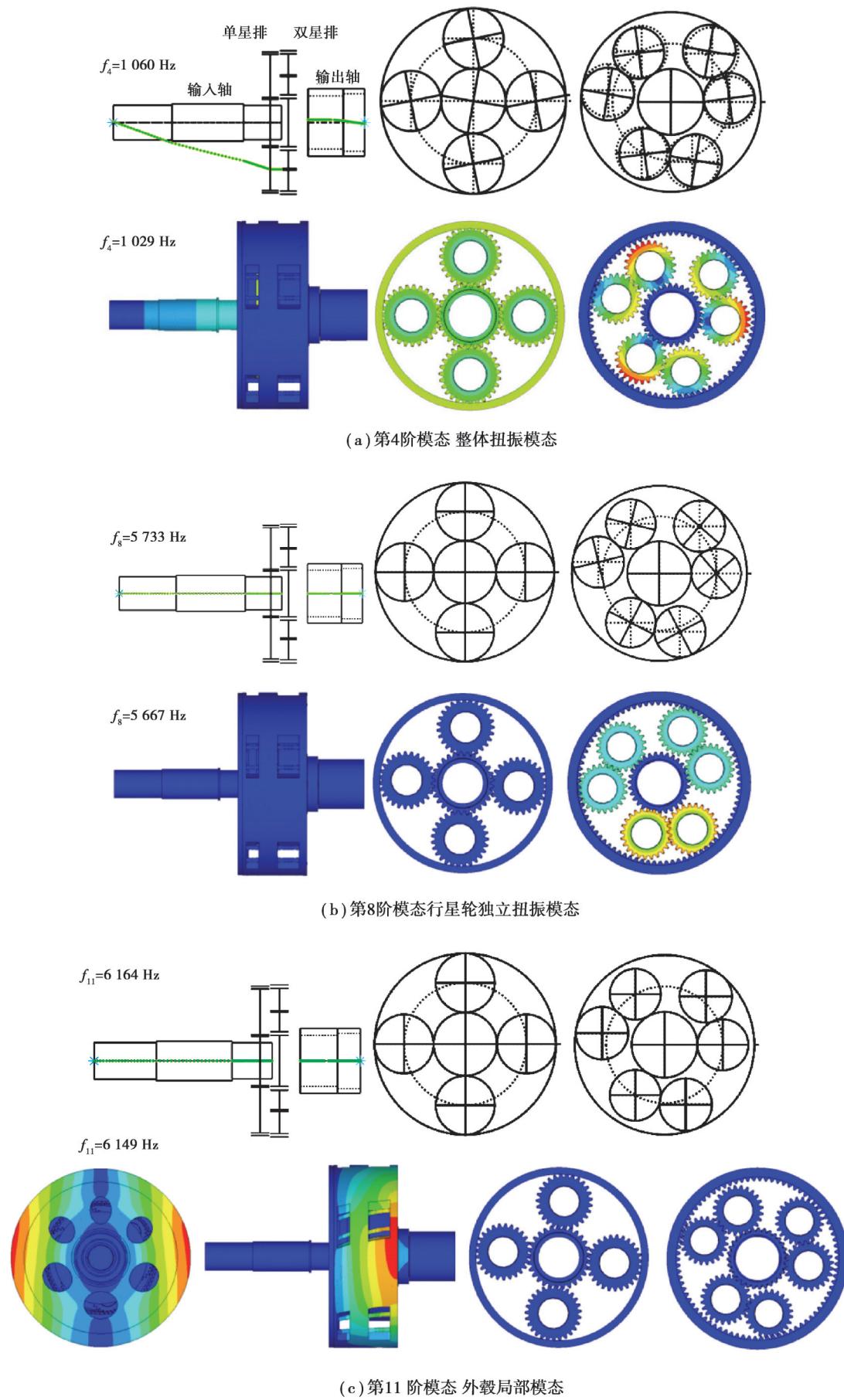


图8 传动系统的典型模态

Fig. 8 Typical modes of transmission system

图8(a)为第4阶模态,传动系统整体扭转模态中输入轴、输出轴、行星排等大多数零部件均参与振动;图8(b)为第8阶模态,行星轮独立扭转模态只有行星轮参与振动,与自由行星排的行星轮独立扭转模态相同;异型结构的局部模态中仅异型结构存在局部模态,其他结构不参与振动,比如图8(c)为第11阶模态,此模态中外毂振型关于经过圆心的竖直对称平面对称,对外毂接触面的控制节点无影响,所以振动无法传递到传动轴,仅呈现局部振型形态。

提取动力学模型结果与仿真结果的前20阶模态,对比具有类似振型模态的固有频率(见表2),以仿真结果为基准,计算固有频率的相对误差。结果表明:固有频率的最大误差为6.0%,平均误差为1.4%。动力学模型计算结果可信,产生误差的主要原因有:

- 1)仿真分析中轴与太阳轮的连接位置、方式与动力学模型存在差异。动力学模型直接合并连接节点,仿真模型采用MATRXI27刚度单元连接耦合节点。
- 2)仿真模型中采用完整的外毂和行星架模型,动力学模型中采用动力学缩聚模型。

表2 动力学模型与仿真模型的固有频率结果对比

Table 2 The difference of natural frequency between dynamic model and finite element model

模态阶次	动力学			有限元			备注	动力学			有限元		
	模型		模型	相对误差	模型			模型		模型	相对误差/%	备注	
	固有频率/ Hz	Hz	固有频率/ Hz	%	固有频率/ Hz	Hz	固有频率/ Hz	%	固有频率/ Hz	Hz	固有频率/ Hz	%	
1	0	0	0	0	①	11	6 164	6 149	0.3	④			
2	215	212	1.4	②		12	6 204	6 188	0.3	④			
3	791	759	4.2	②		13	7 269	7 349	-1.1	②			
4	1 060	1 029	3.0	②		14	7 536	7 307	3.1	③			
5	3 228	3 209	0.6	②		15	7 536	7 307	3.1	③			
6	3 671	3 570	2.8	②		16	7 536	7 307	3.1	③			
7	5 112	4 826	6.0	②		17	7 913	8 070	-1.9	②			
8	5 733	5 667	1.2	③		18	8 089	8 070	0.4	⑤			
9	5 733	5 667	1.2	③		19	8 099	8 096	0	⑤			
10	5 878	5 633	4.3	②		20	8 485	8 878	-4.4	②			

注:备注栏中①表示刚体模态;②表示整体扭转模态;③表示行星轮独立扭转模态;④表示外毂局部模态;⑤表示行星架局部模态。

#### 4.3 结构参数对固频的影响

本文以输入轴端等效转动惯量、输出轴端等效转动惯量、输入轴外径、输出轴外径、单星排有效啮合齿宽、双星排有效啮合齿宽为变量,依次分析这6个变量值各自上浮10%时(依次对应图9中参数变化方案1~6)传动系统整体扭转模态固有频率的变化量。其中,行星排的有效啮合齿宽参数变化时,齿轮厚度及齿轮转动惯量和质量也按比例变化。考虑行星架等异型结构静载变形会引起啮合齿轮轴线交错、齿面啮合失配,减小啮合刚度<sup>[27]</sup>,降低模态固有频率,故取单星排齿轮啮合刚度、双星排齿轮啮合刚度下浮10%(依次对应图9参数变化方案7~8),评价齿轮刚度独立变化对传动系统固有频率的影响。剔除刚体模态(1阶)、外毂局部模态(11~12阶)、行星架局部模态(18~19阶)和行星轮独立扭转(8~9阶,14~16阶)模态后,得到整体扭转模态的固有频率随参数变化规律如图9所示。

图9中横轴为模态阶次,纵轴为参数变化方案,竖轴为固有频率变化量(变化后的固有频率减去初始固有频率),柱形上或下顶面的颜色表示固有频率变化值,同时在柱形顶面标注了大于1 Hz的固有频率变化值。由图可知:输入、输出端等效转动惯量的变化对固有频率影响最小;输入轴外径增大引起以输入轴扭转

振型为主或以输入轴质量贡献为主的模态固有频率显著变化,如第3阶、第4阶和第10阶固有频率呈增大变化,第6阶固有频率呈减小变化;输出轴外径增大引起以输出轴扭转振型为主或以输出轴质量贡献为主的模态固有频率显著变化,如第4阶、第13阶固有频率呈增大变化,第17阶和第20阶固有频率呈减小变化;单星排有效啮合宽度增大主要降低了第7阶以后的固有频率值;双星排啮合齿宽增大主要降低第7阶、第20阶固有频率;单星排啮合刚度降低主要降低第6、10、17、20阶固有频率;双星排啮合刚度降低主要降低第7、13、17、20阶模态固有频率。整体而言,本算例中传动系统整体扭振固有频率对输入输出轴外径、齿轮啮合刚度很敏感;对行星排有效啮合齿宽较敏感;对输入输出轴的附加转动惯量较不敏感。

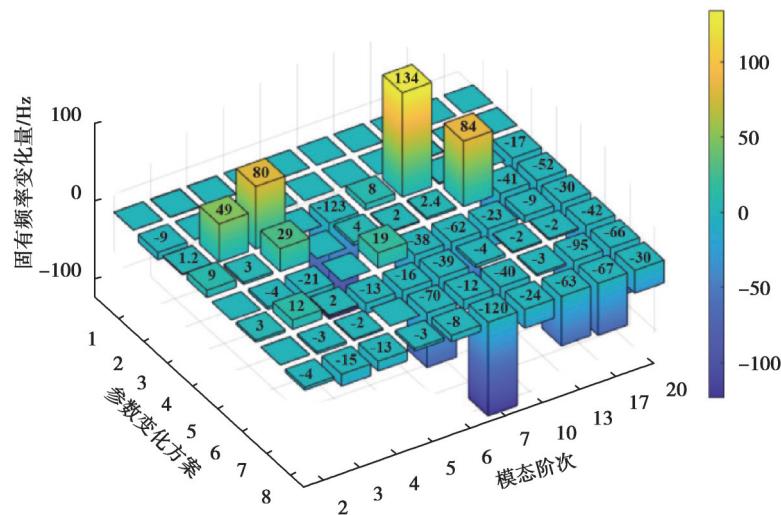


图9 结构参数变化对传动系统整体扭振模态的影响

Fig. 9 The influence of structure parameters on transmission system overall torsional vibration modes

如图10可知,单星排和双星排啮合齿宽增加10%,固有频率分别降低31、20 Hz。固有频率降低的主要原因是增加有效啮合齿宽后,单位齿宽的承载降低,减小了单位齿宽的接触刚度,导致全齿宽啮合刚度的增加小于齿轮厚度增加带来的转动惯量增加率。如果增大齿宽后单位齿宽的接触刚度不变,则行星轮独立扭振模态的固有频率理应保持不变。单星排和双星排啮合刚度独立降低10%,固有频率分别降低387、294 Hz,影响显著,需要严格控制啮合齿面的失配量。

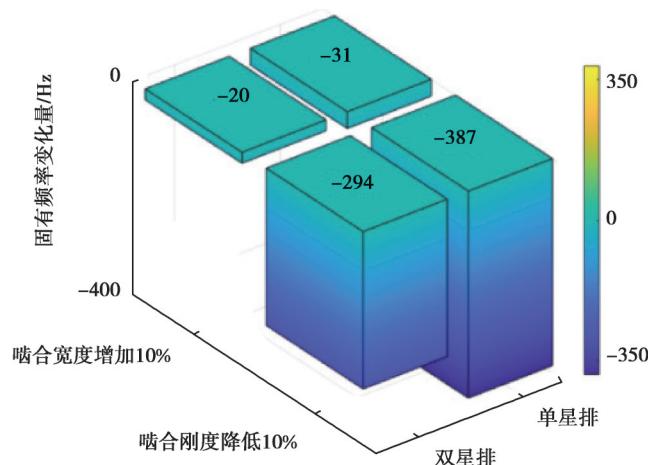


图10 增大有效啮合齿宽、降低啮合刚度对行星轮独立扭振模态的影响

Fig. 10 The influence of effective meshing width and meshing stiffness on independent torsional vibration mode of planet

#### 4.4 试验验证方案可行性讨论

变速机构空间紧凑,限制了传感器的布置;行星机构高速旋转、行星齿轮存在公转,制约了有线接触式传感器的使用。拟采用传统测试手段,设计2种试验方案联合验证研究对象的扭振模态。第1种试验方案为运动状态下的扭振测试:将含试验对象的试验包箱安装在动力试验台架上,采用转速传感器测试输入输出轴的扭振信号,分析传动系统的扭振模态,并与动力台架和被试构成的整体传动系统的动力学模型计算结果对比验证。第2种试验方案为无动力静扭状态下的敲击模态测试:将被试对象安装在试验支架上,通过在输入轴两侧一定力臂处施加弹簧上拉力、下拉力施加扭矩,对离合器施加液压制动力挂挡,固定输出轴,使传动系统处于静扭状态。修改传动系统的结构,以便在输入输出轴、齿轮和外毂上布置加速度传感器,对轴、外毂施加切向激励,获取传动系统的模态信息。由于静扭模态试验中齿轮的啮合刚度并非平均值,而是所在啮合相位的实际值,所以传动系统动力学模型需按照实际啮合刚度和实际安装边界条件计算模态结果并与试验结果对比。除此以外,试验支架的加工、装配精度、承载变形等均会影响齿轮、花键的啮合刚度,对试验结果产生影响,需要严格保证加工精度,并在动力学理论模型中计人这些影响因素。因此,考虑到试验方案的复杂性、影响因素的多样性、试验周期的不确定性,计划后续对变速机构的扭振模态试验开展系统的专项研究。

### 5 结 论

提取了外毂、行星架等异型结构的动力学缩聚模型,推导了阶梯轴的动力学模型,保留了异型结构和阶梯轴的高阶动力学特性,建立了含单星排和双星排的传动系统的扭振动力学模型。以功率耦合机构变速部件为例,分析了行星排和传动系统的模态,并与仿真结果对比,2种方法计算的固有频率平均相对误差为1.4%,证明了所建传动系统扭振动力学模型的准确性,在此基础上探索了结构参数对模态的影响,得到以下结论。

1)自由状态行星排有3类模态:刚体模态(0 Hz)、行星轮独立扭振模态和整体扭振模态。在总体尺寸相近的情况下,算例中双星排的行星轮独立扭振模态和整体扭振模态的最小固有频率与单星排相比,分别降低了约1/4和1/2。所以,当构型方案引入双星排时可能会导致固有频率的大幅降低,需要慎重校核计算传动系统模态。

2)传动系统有4类模态:刚体模态(0 Hz)、行星轮独立扭振模态、异型结构局部扭振模态和整体扭振模态。其中行星轮独立扭振模态仅与行星排有关,异型结构局部扭振模态仅与异型结构本身有关,整体扭振模态与传动系统结构配置相关。整体扭振模态的最低固有频率为215 Hz,需要结合传动比和行驶转速校核共振风险。

3)本算例中,整体扭振模态固有频率受结构参数的影响程度按照从大到小的顺序排列,依次为:输入轴外径、双星排啮合刚度、单星排啮合刚度、输出轴外径、单星排有效啮合齿宽、双星排有效啮合齿宽、输出轴端等效转动惯量、输入轴端等效转动惯量。由于轮齿接触刚度的非线性,行星排的有效啮合齿宽增加后可能导致行星轮独立扭振模态的固有频率轻微降低,而齿面啮合失配引起的啮合刚度减小会大幅降低行星轮独立扭振模态的固有频率。

### 参考文献

- [1] Zhang L N, Wang Y, Wu K, et al. Dynamic modeling and vibration characteristics of a two-stage closed-form planetary gear train[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 97: 12-28.
- [2] Liu H, Zhan Z B. Modal properties of a two-stage planetary gear system with a Timoshenko beam as the intermediate shaft model[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, 2022, 236(2/3): 353-365.
- [3] 李国彦, 李方义, 刘浩华, 等. 含裂纹复合两级行星轮系振动特性研究[J]. 振动工程学报, 2018, 31(3): 500-512.

- Li G Y, Li F Y, Liu H H, et al. Vibration property analysis of compound two-stage planetary gear set with crack defect[J]. Journal of Vibration Engineering, 2018, 31(3): 500-512. (in Chinese)
- [ 4 ] 莫帅, 岳宗享, 冯志友, 等. 面齿轮-行星传动串联系统固有特性研究[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2021, 49(1): 24-30.
- Mo S, Yue Z X, Feng Z Y, et al. Research on natural characteristics of face gear-planetary gear compound transmission system[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2021, 49(1): 24-30. (in Chinese)
- [ 5 ] 曾根, 马长军, 庞大千, 等. 机电复合传动高线速转子-行星齿轮系统耦合振动特性[J]. 兵工学报, 2023, 44(1): 156-164.
- Zeng G, Ma C J, Pang D Q, et al. Coupling vibration characteristics of high linear speed rotor-planetary gear electro-mechanical transmission system[J]. Acta Armamentarii, 2023, 44(1): 156-164. (in Chinese)
- [ 6 ] Xiao Z M, Chen F, Zhang K L. Analysis of dynamic characteristics of the multistage planetary gear transmission system with friction force[J]. Shock and Vibration, 2021, 2021(1): 8812640.
- [ 7 ] Zhang C D, Yu W N, Zhang Y D, et al. Dynamics modeling and analysis of the multistage planetary gear set-bearing-rotor-clutch coupling system considering the tooth impacts of clutches[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2024, 214: 111365.
- [ 8 ] Tan J J, Li H, Tang H, et al. Dynamic modeling and analysis of planetary gear train system considering structural flexibility and dynamic multi-teeth mesh process[J]. Mechanism and Machine Theory, 2023, 186: 105348.
- [ 9 ] 徐尤南, 李明钦, 刘汕娟, 等. TBM 减速器两级行星齿轮传动系统动力学特性研究[J]. 机械传动, 2024, 48(3): 118-124.
- Xu Y N, Li M Q, Liu S J, et al. Research on dynamic characteristics of the two-stage planetary gear transmission system of TBM reducers[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2024, 48(3): 118-124. (in Chinese)
- [ 10 ] 张强, 李洪武. 车辆多级行星传动系统扭振特性分析与优化[J]. 机械科学与技术, 2019, 38(3): 339-343.
- Zhang Q, Li H W. Torsional vibration analysis and optimization of vehicle multi-stage planetary transmission system[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2019, 38(3): 339-343. (in Chinese)
- [ 11 ] 窦作成, 李以农, 杜明刚, 等. 多档位行星变速传动系统动力学参数优化修改[J]. 振动与冲击, 2018, 37(4): 67-74, 159.
- Dou Z C, Li Y N, Du M G, et al. Dynamic optimization and modification for the parameters of a multi-speed planetary transmission system[J]. Journal of Vibration and Shock, 2018, 37(4): 67-74, 159. (in Chinese)
- [ 12 ] 张伟, 刘辉, 张勋, 等. 机电复合传动系统扭转振动主从控制方法[J]. 汽车工程, 2021, 43(9): 1402-1410, 1417.
- Zhang W, Liu H, Zhang X, et al. Master-slave control method for torsional vibration of Electromechanical transmission system [J]. Automotive Engineering, 2021, 43(9): 1402-1410, 1417. (in Chinese)
- [ 13 ] 刘芳, 董效辰, 张亚振, 等. 基于 AMESim 的汽车动力传动系统扭转振动分析及参数优化[J]. 机械强度, 2022, 44(3): 509-516.
- Liu F, Dong X C, Zhang Y Z, et al. Torsional vibration analysis and parameter optimization of automobile power transmission system based on amesim[J]. Journal of Mechanical Strength, 2022, 44(3): 509-516. (in Chinese)
- [ 14 ] 李孝磊, 葛文庆, 汪学杞, 等. 全电直驱集成动力系统扭振固有特性灵敏度分析及动力学设计[J]. 科学技术与工程, 2020, 20(15): 6252-6259.
- Li X L, Ge W Q, Wang X Q, et al. Sensitivity analysis and dynamics design of natural characteristic torsional vibration of integrated electric power system[J]. Science Technology and Engineering, 2020, 20(15): 6252-6259. (in Chinese)
- [ 15 ] 岳宏伟, 何洪文. 双电机耦合驱动电动汽车传动系统扭转振动特性分析[J]. 车辆与动力技术, 2021(2): 11-17.
- Yue H W, He H W. Torsional vibration analysis of an electric vehicle with dual-motor driving system[J]. Vehicle & Power Technology, 2021(2): 11-17. (in Chinese)
- [ 16 ] 王峰, 张健, 徐兴, 等. 行星耦合 PHEV 模式切换过程全频段瞬态扭振特性分析与主动抑制[J]. 机械工程学报, 2023, 59(4): 173-189.
- Wang F, Zhang J, Xu X, et al. Transient torsional vibration characteristic analysis and active suppression of PHEV with planetary coupled transmission system during mode transition process[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2023, 59(4): 173-

189. (in Chinese)
- [17] 倪振华. 振动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1989: 166-172.  
Ni Z H. Vibration mechanics[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1989: 166-172. (in Chinese)
- [18] 刘鸿文, 吕荣坤. 材料力学实验[M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 2017: 75-89.  
Liu H W, Lyu R K. Material mechanics experiment[M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2017: 75-89. (in Chinese)
- [19] Inalpolat M, Kahraman A. Dynamic modelling of planetary gears of automatic transmissions[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics, 2008, 222(3): 229-242.
- [20] Chen Z G, Zhai W M, Shao Y M, et al. Mesh stiffness evaluation of an internal spur gear pair with tooth profile shift[J]. Science China Technological Sciences, 2016, 59(9): 1328-1339.
- [21] 丁长安, 张雷, 周福章, 等. 线接触弹性接触变形的解析算法[J]. 摩擦学学报, 2001, 21(2): 135-138.  
Ding C A, Zhang L, Zhou F Z, et al. Theoretical formula for calculation of line-contact elastic contact deformation[J]. Tribology, 2001, 21(2): 135-138. (in Chinese)
- [22] Sainsot P, Velex P, Duverger O. Contribution of gear body to tooth deflections: a new bidimensional analytical formula[J]. Journal of Mechanical Design, 2004, 126(4): 748-752.
- [23] Craig R R. A review of time domain and frequency domain component mode synthesis methods[J]. International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, 1987, 2(2), 59-72.
- [24] Norrie D H. A first course in the finite element method[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1987, 3(2): 162-163.
- [25] 谭建军, 李浩, 杨书益, 等. 重载工况下行星齿轮传动啮合偏载分析[J]. 中国机械工程, 2023, 34(13): 1513-1524.  
Tan J J, Li H, Yang S Y, et al. Study on unbalanced meshing loads of planetary gear transmission under heavy-load conditions [J]. China Mechanical Engineering, 2023, 34(13): 1513-1524. (in Chinese)
- [26] 钱露露, 娄鹏, 冯金, 等. 星型轮系人字齿轮传动系统三维有限元建模和模态特性分析[J]. 机械传动, 2022, 46(9): 109-117, 170.  
Qian L L, Lou P, Feng J, et al. 3D finite element modeling and modal analysis of planetary gear system with herringbone gears[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2022, 46(9): 109-117, 170. (in Chinese)
- [27] Saxena A, Parey A, Chouksey M. Effect of shaft misalignment and friction force on time varying mesh stiffness of spur gear pair[J]. Engineering Failure Analysis, 2015, 49: 79-91.

(编辑 詹燕平)