

doi: 10.11835/j.issn.1000-582X.2025.05.010

引用格式:余水鑫, 储涛, 黄潇辉, 等. 双压力角非对称齿轮廓形设计及蜗杆砂轮磨齿方法[J]. 重庆大学学报, 2025, 48(5): 117-132.



双压力角非对称齿轮廓形设计及蜗杆砂轮磨齿方法

余水鑫^{1a,1b}, 储涛^{1a,1b}, 黄潇辉^{1a,1b}, 曹华军^{1a,1b}, 王丽丹^{1b}, 侯圣文^{2,3}, 姚景超^{2,3}, 陶桂宝^{1a,1b}

(1. 重庆大学 a. 高端装备机械传动全国重点实验室; b 机械与运载工程学院, 重庆 400044; 2. 陕西法士特齿轮有限责任公司, 西安 710000; 3. 陕西省齿轮传动重点实验室, 西安 710119)

摘要: 双压力角非对称齿轮是一种双侧齿面采用不同压力角的渐开线齿轮, 其独特的齿廓设计对齿轮的强度、传动效率及动态特性等方面具有重要影响。与传统的对称齿轮不同, 双压力角非对称齿轮通过采用不同压力角的齿廓设计, 能够提高齿根承载能力, 减小传动误差, 特别适用于复杂动态负载和特殊传动要求的场合。基于齿轮啮合原理, 研究了双压力角非对称齿轮的齿廓精确设计及其蜗杆砂轮磨齿加工方法。首先, 推导了非对称齿轮的齿廓方程, 详细分析了齿条刀具与齿轮之间的啮合关系, 建立了齿轮的精确几何模型。在蜗杆砂轮磨齿加工方面, 研究了蜗杆砂轮的轮廓设计、修整方法及其在非对称齿轮加工中的应用。经 VERICUT 仿真试验, 发现非对称蜗杆砂轮磨削加工得到的齿轮廓形与理论设计廓形基本一致, 验证了双压力角非对称蜗杆砂轮廓形及其开展磨齿加工的可行性。该研究为非对称齿轮的设计和加工提供了理论依据, 对提高齿轮传动系统的效率和可靠性具有重要意义。

关键词: 非对称齿轮; 数学建模; 蜗杆砂轮磨齿; 仿真

中图分类号: TH122

文献标志码: A

文章编号: 1000-582X(2025)05-117-16

Design of double pressure angle asymmetric gear profile and worm wheel tooth grinding method using a grinding wheel

YU Shuixin^{1a,1b}, CHU Tao^{1a,1b}, HUANG Xiaohui^{1a,1b}, CAO Huajun^{1a,1b}, WANG Lidan^{1b},

HOU Shengwen^{2,3}, YAO Jingchao^{2,3}, TAO Guibao^{1a,1b}

(1a. State Key Laboratory of Mechanical Transmissions for Advanced Equipment; 1b. College of Mechanical and Vehicle Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China; 2. Shaanxi Fast Gear Co., Ltd. Xian 710000, P. R. China; 3. Shaanxi Key Laboratory of Gear Transmission, Xian 710119, P. R. China)

Abstract: The double pressure angle asymmetric gear is a type of involute gear characterized by different pressure angles on either side of the tooth surface. Its unique tooth profile design significantly impacts gear strength, transmission efficiency, and dynamic behavior. Unlike conventional symmetric gears, asymmetric gears enhance the load-bearing capacity at the tooth root and reduce transmission errors, making them particularly well-suited for

收稿日期: 2025-02-14

基金项目: 国家重点研发计划资助项目(2023YFB3406500); 中央高校基本科研业务费资助项目(2023CDJKYJH051)。

Supported by National Key R&D Program of China (2023YFB3406500), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (2023CDJKYJH051).

作者简介: 余水鑫(2002—), 男, 硕士研究生, 主要从事齿轮设计及加工机理研究, (E-mail)YSX297210@163.com。

通信作者: 陶桂宝, 男, 副教授, (E-mail)gb_tao@163.com。

applications involving complex dynamic loads and specialized transmission requirements. Based on gear meshing principles, this study investigates the precise design methodology for the tooth profile of double pressure angle asymmetric gears and their manufacturing using worm grinding wheels. The tooth profile equation for the asymmetric gear is derived, and the meshing relationship between the rack cutter and the gear is analyzed in detail, leading to the establishment of an accurate geometric model of the gear. In terms of worm grinding wheel tooth machining process, the study explores the profile design of the worm wheel, its truing method, and its application to asymmetric gear processing. VERICUT simulation experiments demonstrate that the gear profile obtained through asymmetric worm wheel grinding closely aligns with the theoretical design, confirming the feasibility of this approach. The findings provide a theoretical foundation for the design and manufacturing of asymmetric gears, and offer valuable insights for improving the efficiency and reliability of gear transmission systems.

Keywords: asymmetric gear; mathematical modeling; worm wheel tooth grinding; simulation

齿轮作为重要的传动元件,在航空航天、汽车、风力发电等多个领域的应用越来越广泛。传统的对称渐开线齿轮因其压力角相同的齿廓设计,虽然具有较好的传动效率,但在某些特殊应用场合下,如高速重载和复杂动态负载的条件下,其传动性能和可靠性无法满足使用需求。因此,非对称齿轮作为一种新型齿轮,因其两侧齿面采用不同的压力角,能够有效地改善齿轮的承载能力、减小啮合误差,提升传动效率,尤其适用于对齿轮强度和动力学性能有更高要求的场合^[1-3]。

双压力角非对称齿轮作为非对称齿轮的一种改进形式,其特点在于驱动侧和非驱动侧采用不同的压力角,使得齿轮的齿廓形状发生显著变化。通过合理的压力角设计,可以有效增加齿根厚度,提高齿轮的承载能力和强度,并在一定程度上优化其动力学特性。然而,非对称齿轮的设计与传统齿轮相比更加复杂,需要考虑的因素也更多,包括齿廓形状、压力角选择、啮合特性等。卞景扬等^[4]根据渐开线的形成及其特性,推导了非对称直齿圆柱齿轮的基本渐开线方程,并通过SOLIDWORKS的参数方程驱动,建立了非对称齿轮的三维模型。莫帅等^[5]推导了非对称渐开线圆柱齿轮和偏置面齿轮的数学模型,得出了偏置非对称面齿轮的啮合方程,并通过拟合点云构建了偏置面齿轮的复杂曲面模型。皇甫一樊等^[6-8]根据齿轮空间啮合理论,建立了齿轮啮合的空间坐标系,得到了非对称齿轮的理论模型,求解过程中采用的有限元法和数值拟合导致模型精度较低。

在非对称齿轮的加工方面,肖望强等^[9]和Vahgela等^[10]制定了一套通过电火花线切割加工双压力角非对称齿轮的方案。赵向飞等^[11]采用对称和非对称圆角设计滚刀刀尖,推导了非对称圆角半径的计算公式,并通过ANSYS的APDL语言建立了参数化有限元模型。Chen等^[12]设计了一种非对称抛物线齿形铣刀,并利用数控机床加工制造了斜齿轮。通过实验证明了非对称抛物线齿廓对齿轮啮合性能的影响,但目前这几种加工方法不能满足行业对非对称齿轮高精度和高效率加工的需求。蜗杆砂轮磨齿作为一种常用于齿轮加工的工具,在进行非对称齿轮磨削时面临诸多挑战,如齿轮几何形状复杂、刀具修整难度较大等。因此,精确的蜗杆砂轮建模和修整对于提高非对称齿轮的加工精度也至关重要。

文中通过数学建模和仿真分析,提出了一种双压力角非对称齿轮的精确设计与蜗杆砂轮磨齿加工方法。首先,分析了齿轮的啮合特性,建立了非对称齿轮的齿廓方程,并进一步推导出蜗杆砂轮廓形和金刚滚轮廓形。通过VERICUT仿真,验证了齿轮轮廓形和蜗杆砂轮廓形的准确性,为后续的实际加工提供了理论支持,为非对称齿轮的设计优化和高效加工提供了新的思路和方法,具有重要的理论价值和实际应用意义。

1 非对称齿轮啮合过程

在非对称齿轮的啮合过程中,为保证正确啮合,必须确保啮合齿轮对的模数及对应齿侧压力角完全相同。同时,为保证传动的合理性与平稳性,必须确保啮合齿轮对的驱动齿侧基节 p_{bm} 和非驱动齿侧基节 p_{bn} 相等,即:

$$p_{bm} = p_{bn} = m\pi, \quad (1)$$

式中, m 为齿轮模数。

为了确保齿轮在啮合过程中能够实现连续的传动, 重合度需要保持在大于 1 的范围。在非对称齿轮的啮合过程中, 其重合度 ε_i 可以表示为

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2\pi} [z_1(\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha_{iwt}) + z_2(\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha_{iwt})], \quad (2)$$

式中: $i=m, n$, 分别代表啮合齿轮对的驱动齿侧、非驱动齿侧; z_1, z_2 分别代表啮合齿轮对的齿数; α_{a1}, α_{a2} 分别代表啮合齿轮对的齿顶压力角。

齿轮对的啮合示意如图 1 所示, $\overline{N_{m1}N_{m2}}, \overline{N_{n1}N_{n2}}$ 为啮合齿轮对基圆的公法线, 点 P 为公法线的交点。图中的啮合角度满足以下关系式:

$$\alpha_{mwt} = \alpha_{1m} = \alpha_{2m}, \alpha_{nwt} = \alpha_{1n} = \alpha_{2n}, \quad (3)$$

式中: $\alpha_{mwt}, \alpha_{nwt}$ 分别代表啮合齿轮对的驱动齿侧啮合角、非驱动齿侧啮合角; α_{1m}, α_{2m} 分别代表啮合齿轮对驱动齿侧的压力角; α_{1n}, α_{2n} 分别代表啮合齿轮对非驱动齿侧的压力角。

在非对称齿轮的啮合过程中, 单个轮齿在进入和退出啮合区域时会经历一个复杂的单双齿交替过程, 导致了齿轮啮合时力学行为和动力学特性的变化。在这个过程中, 每个齿轮所承受的载荷不断变化, 这不仅影响了齿轮的受力状态, 还可能导致整体啮合状态的显著变化。为了更准确地理解这一现象, 可以根据同一时刻啮合的轮齿数量对啮合区间进行详细划分, 这有助于分析不同情况下的载荷分布、应力集中以及轮齿接触状况, 如图 2 所示。通过精确划分啮合区间, 可以优化非对称齿轮的设计, 提高其强度和耐磨性, 从而提升齿轮传动系统的整体性能。

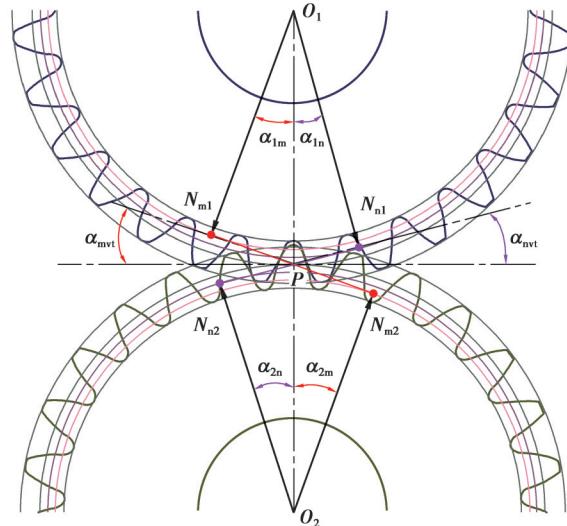


图 1 非对称齿轮啮合示意图

Fig. 1 Schematic diagram of asymmetric gear meshing

图 2 中, o_1, o_2 分别代表啮合齿轮对的转动中心; r_{bm1}, r_{bm2} 分别代表啮合齿轮对驱动齿侧的基圆半径; r_{bn1}, r_{bn2} 分别代表啮合齿轮对非驱动齿侧的基圆半径。以 P 点为原点, PN_{n1} 方向为正方向。关键位置点 $A_n, B_n, C_n, D_n, N_{n1}, N_{n2}$ 相对于点 P 的位置分别用 $A_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 来表示。可以得到:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = r_{bn1}(\tan \alpha_{nvt} - \tan \alpha_{a1}) + p_{bn}, \\ A_2 = -r_{bn1}(\tan \alpha_{nvt} - \tan \alpha_{a2}) - p_{bn}, \\ A_3 = r_{bn1} \tan \alpha_{nvt} + (\varepsilon_n - 1) p_{bn}, \\ A_4 = -r_{bn1} \tan \alpha_{nvt} - (\varepsilon_n - 1) p_{bn}, \\ A_5 = r_{bn1} \tan \alpha_{nvt}, \\ A_6 = -r_{bn1} \tan \alpha_{nvt}. \end{array} \right. \quad (4)$$

任意位置点相对于 P 点的展开角度 θ_i 可表示为

$$\theta_i = A_i / r_{bn1} \circ \quad (5)$$

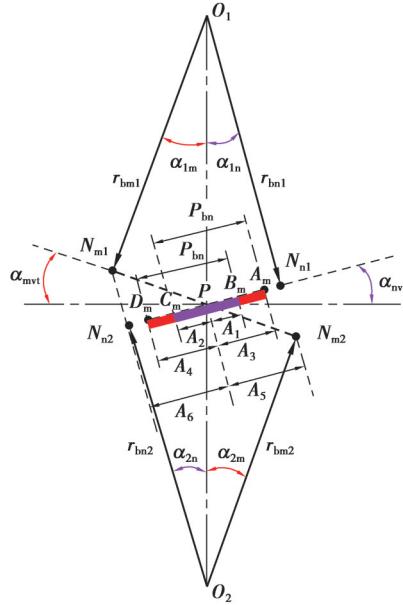


图 2 齿轮啮合区间划分示意图

Fig. 2 Schematic diagram of gear meshing interval division

2 双压力角非对称齿轮齿廓方程精确设计

2.1 齿轮与齿条刀具坐标系建立及坐标变换

分别建立固定坐标系 $S_f(x_f o_f y_f)$ 、齿条刀具运动坐标系 $S_r(x_r o_r y_r)$ 、成形齿轮工件运动坐标系 $S_w(x_w o_w y_w)$ ，如图 3 所示， r_b 为成形齿轮节圆半径。

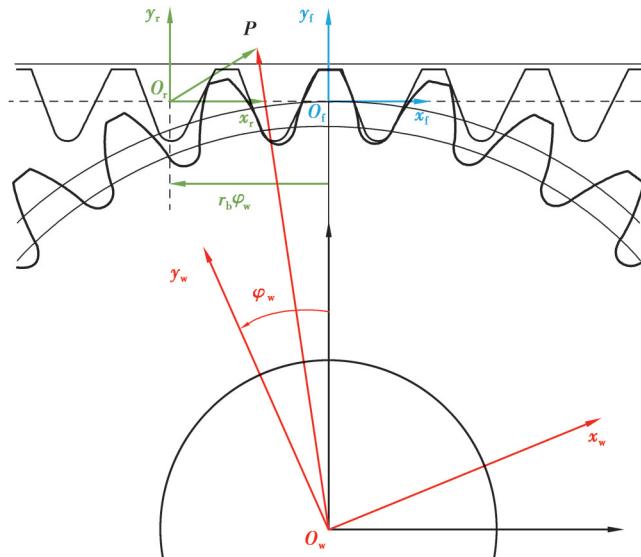


图 3 齿轮与齿条刀具坐标系

Fig. 3 Coordinate system of gear and rack cutter

在成形齿轮工件运动坐标系 $S_w(x_w o_w y_w)$ 中的任意一点 P 的位置矢量为 r_w ，在齿条刀具运动坐标系 $S_r(x_r o_r y_r)$ 中点 P 的位置矢量为 r_r ，成形齿轮在工件运动坐标系 $S_w(x_w o_w y_w)$ 中的转角为 φ_w ，则工件运动坐标

系 $S_w(x_w o_w y_w)$ 与固定坐标系 $S_f(x_f o_f y_f)$ 之间的转换矩阵为

$$M_{f,w} = M_{w,f}^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi_w & -\sin \varphi_w & 0 & 0 \\ \sin \varphi_w & \cos \varphi_w & 0 & -r_b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。 \quad (6)$$

齿条刀具运动坐标系 $S_r(x_r o_r y_r)$ 与固定坐标系 $S_f(x_f o_f y_f)$ 之间的转换矩阵为

$$M_{r,f} = M_{f,r}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -r_b \varphi_w \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。 \quad (7)$$

工件运动坐标系 $S_w(x_w o_w y_w)$ 与齿条刀具运动坐标系 $S_r(x_r o_r y_r)$ 之间的转换矩阵为

$$M_{w,r} = M_{r,w}^T = M_{w,f} M_{f,r} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_w & \sin \varphi_w & 0 & r_b (\sin \varphi_w - \varphi_w \cos \varphi_w) \\ -\sin \varphi_w & \cos \varphi_w & 0 & r_b (\cos \varphi_w + \varphi_w \sin \varphi_w) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。 \quad (8)$$

2.2 双压力角非对称齿轮齿廓基本方程

通过齿轮刀具得到的双压力角非对称齿轮齿廓方程,是最符合理论加工结果的齿廓方程。图4为齿条刀具在法向平面上的齿廓示意图。非对称齿轮刀具的轮廓由多个部分组成,直线段和圆弧段分别用于生成齿轮的渐开线和齿根圆弧。这种设计确保了刀具在加工过程中能够准确地复制非对称齿轮的复杂几何形状。齿条刀具与成形齿轮之间的啮合遵循特定的啮合规律,根据二者的啮合运动关系推导出对应的齿轮齿廓方程是完全可行的。这一过程不仅提高了加工的精度,还能够有效减少齿轮传动中的潜在故障。

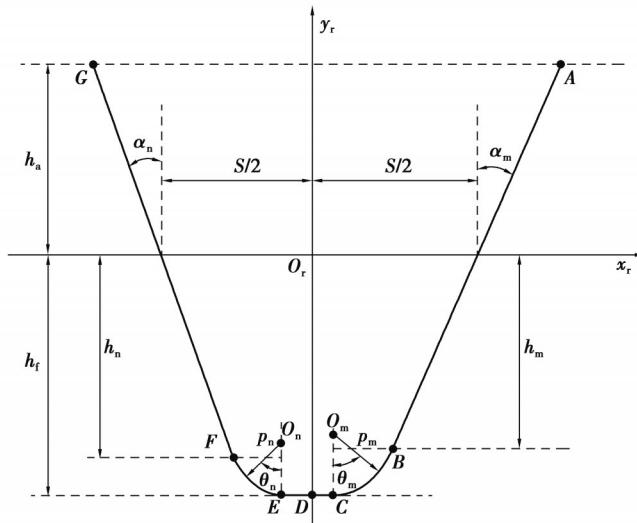


图4 非对称齿条刀具法向齿廓示意图

Fig. 4 Schematic diagram of normal profile of asymmetric rack cutter

如图4所示,以齿条刀具的运动坐标系 $S_r(x_r o_r y_r)$ 和刀具参考轴 x_r 为基础,齿条刀具的法向齿廓主要由5个部分构成^[13-15]:

AB :用于加工驱动侧齿廓的齿条直线段; CE :用于加工齿根圆弧的齿条直线段; FG :用于加工非驱动侧齿廓的齿条直线段; \widehat{BC} :用于加工驱动侧齿根过渡曲线的过渡圆弧段; \widehat{EF} :用于加工非驱动侧齿根过渡曲线的过渡圆弧段。

图中, α_m, α_n 分别为加工驱动齿侧、非驱动齿侧的刀具齿形压力角; θ_m, θ_n 分别为加工驱动齿侧、非驱动齿

侧齿根过渡曲线的圆心角; ρ_m 、 ρ_n 分别为加工驱动齿侧、非驱动齿侧齿根过渡曲线的曲率半径; S 为轮齿齿厚; h_a 、 h_f 分别为齿顶高、齿根高; h_{al}^* 为齿顶高系数, m 为模数, c_1^* 表示顶隙系数。各参数计算式如下:

$$\begin{cases} \rho_m = c_1^* m / (1 - \sin \alpha_m), \\ \rho_n = c_1^* m / (1 - \sin \alpha_n), \\ S = \pi m / 2, \\ h_a = h_{al}^* m, \\ h_f = (h_{al}^* + c_1^*) m, \\ h_m = h_f - (1 - \sin \alpha_m) \rho_m, \\ h_n = h_f - (1 - \sin \alpha_n) \rho_n. \end{cases} \quad (9)$$

由几何关系可知,各个部分的计算如下所示。

1) 加工齿根圆弧的齿条直线 CE 段:

$$\begin{cases} -l_{DE} \leq x_{r_{CE}} \leq l_{CD}, \\ y_{r_{CE}} = -h_f, \\ l_{DE} = S/2 - h_n \tan \alpha_n - \rho_n \cos \alpha_n, \\ l_{CD} = S/2 - h_m \tan \alpha_m - \rho_m \cos \alpha_m. \end{cases} \quad (10)$$

式中: l_{DE} 、 l_{CD} 为直线段 DE 段、 CD 段的长度。

2) 加工非驱动侧齿廓的齿条直线 FG 段:

$$\begin{cases} x_{r_{FG}} = -l_{FG} \sin \alpha_n - \rho_n \cos \alpha_n - l_{DE}, \\ y_{r_{FG}} = l_{FG} \cos \alpha_n - h_a, \\ l_{FG} = \frac{h_a + h_n}{\cos \alpha_n}. \end{cases} \quad (11)$$

式中: l_{FG} 、 l_{DE} 为直线 FG 段、 DE 段的长度。

3) 加工驱动侧齿廓的齿条直线 AB 段:

$$\begin{cases} x_{r_{AB}} = l_{AB} \sin \alpha_m + \rho_m \cos \alpha_m + l_{CD}, \\ y_{r_{AB}} = l_{AB} \cos \alpha_m - h_a, \\ l_{AB} = \frac{h_a + h_m}{\cos \alpha_m}. \end{cases} \quad (12)$$

式中: l_{AB} 、 l_{CD} 为直线段 AB 段、 CD 段的长度。

4) 加工非驱动侧齿根过渡曲线的过渡圆弧 \widehat{EF} 段:

$$\begin{cases} x_{r_{EF}} = -\rho_n \sin \theta_n - l_{DE}, \\ y_{r_{EF}} = -\rho_n (\cos \theta_n - \sin \alpha_n) - h_a, \\ 0 \leq \theta_n \leq \frac{\pi}{2} - \alpha_n. \end{cases} \quad (13)$$

式中: l_{DE} 为直线段 DE 段的长度。

5) 加工驱动侧齿根过渡曲线的过渡圆弧 \widehat{BC} 段:

$$\begin{cases} x_{r_{BC}} = \rho_m \sin \theta_m + l_{CD}, \\ y_{r_{BC}} = -\rho_m (\cos \theta_m - \sin \alpha_m) - h_a, \\ 0 \leq \theta_m \leq \frac{\pi}{2} - \alpha_m. \end{cases} \quad (14)$$

式中: l_{CD} 为直线段 CD 段的长度。

将式(9)~(14)记为齿条刀具法向齿廓曲线方程 $\mathbf{r}_r(\alpha_m, \alpha_n)$:

$$\mathbf{r}_r(\alpha_m, \alpha_n) = \begin{bmatrix} x_r(\alpha_m, \alpha_n) \\ y_r(\alpha_m, \alpha_n) \\ 0 \end{bmatrix} \circ \quad (15)$$

此外,对上式求导可得到齿条刀具运动坐标系 S_r 中刀具齿廓的切向量 \mathbf{n}_r 为

$$\mathbf{n}_r = \frac{\partial \mathbf{r}_r(\alpha_m, \alpha_n)}{\partial x_r} \times \frac{\partial \mathbf{r}_r(\alpha_m, \alpha_n)}{\partial y_r} = \frac{dx_r}{dv} \vec{i}_r + \frac{dy_r}{dv} \vec{j}_r. \quad (16)$$

单位法向量为

$$\mathbf{n}_{r0} = \frac{\mathbf{n}_r \times \vec{k}_r}{|\mathbf{n}_r \times \vec{k}_r|} \circ$$

$$\vec{k}_r = [0 \ 0 \ 1] \circ \quad (17)$$

由几何关系可得,每段刀具齿廓的单位法向量为

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{r_FG} = [-\cos \alpha_n \ -\sin \alpha_n \ 0]^T, \\ \mathbf{n}_{r_EF} = [-\sin \theta_n \ -\cos \theta_n \ 0]^T, \\ \mathbf{n}_{r_CE} = [0 \ 1 \ 0]^T, \\ \mathbf{n}_{r_BC} = [\sin \theta_m \ -\cos \theta_m \ 0]^T, \\ \mathbf{n}_{r_AB} = [-\cos \alpha_m \ \sin \alpha_m \ 0]^T, \end{cases} \quad (18)$$

式中,下标分别表示对应的线段。

将式(18)记为

$$\mathbf{n}_r(\alpha_m, \alpha_n) = \begin{bmatrix} n_{xr}(\alpha_m, \alpha_n) \\ n_{yr}(\alpha_m, \alpha_n) \\ n_{zr}(\alpha_m, \alpha_n) \end{bmatrix} \circ \quad (19)$$

2.3 齿条刀具与齿轮啮合方程

假设,齿条刀具以速度 v_r 向左平移,成形齿轮以角速度 ω 逆时针旋转,瞬时转动中心 O 位于与速度 v_r 垂直的直线 $O_w O$ 上,其位置满足以下矢量方程:

$$\mathbf{v}_o = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{O_w O} \circ \quad (20)$$

由于刀具和齿轮之间的运动为沿着 O 点的纯滚动,刀具的位移与齿轮的转角之间满足条件:

$$s = r_b \varphi_w \circ \quad (21)$$

齿条刀具运动坐标系 S_r 中移动点 P 的矢量半径为

$$\mathbf{r}_r = \overrightarrow{O_r O_p} = x_r \vec{i}_r + y_r \vec{j}_r \circ \quad (22)$$

工件运动坐标系 S_w 中移动点 P 的矢量半径为

$$\mathbf{r}_w = \overrightarrow{O_w O_p} = \overrightarrow{O_w O_r} + \overrightarrow{O_r O_p} = (x_r - r_b \varphi) \vec{i}_r + (y_r + r_b) \vec{j}_r \circ \quad (23)$$

P 点的相对滑动速度为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_w - \mathbf{v}_r \circ \quad (24)$$

式中: \mathbf{v}_w 是 P 点在工件运动坐标系 S_w 中的速度; \mathbf{v}_r 为 P 点在齿条刀具运动坐标系 S_r 中的速度,满足如下方程:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_w = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_w + \vec{v}_{0w} = -\omega (y_r + r_b) \vec{i}_r + \omega (x_r - r_b \varphi) \vec{j}_r, \\ \mathbf{v}_r = -v_r \vec{i}_r = -\omega r_b \vec{i}_r. \end{cases} \quad (25)$$

由此可推出:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_w - \mathbf{v}_r = \omega [-y_r \ x_r - r_b \varphi_w \ 0]^T \circ \quad (26)$$

为了保证齿轮正常啮合,要求齿轮齿廓上任何点的相对速度矢量与法向量垂直,即:

$$\mathbf{n}_r(\alpha_m, \alpha_n) \cdot \mathbf{v} = 0 \circ \quad (27)$$

将式(27)记为

$$f(\alpha_m, \alpha_n) = 0 \circ \quad (28)$$

结合齿条刀具每一段曲线方程的法向方程与相对速度方程,可以推导出啮合方程具体为

$$\begin{cases} x_{r_{FG}} \sin \alpha_n - y_{r_{FG}} \cos \alpha_n - r_b \varphi_w \sin \alpha_n = 0, \\ x_{r_{EF}} \cos \theta_n - y_{r_{EF}} \sin \theta_n - r_b \varphi_w \cos \theta_n = 0, \\ x_{r_{CE}} - r_b \varphi_w = 0, \\ x_{r_{BC}} \cos \theta_m + y_{r_{BC}} \sin \theta_m - r_b \varphi_w \cos \theta_m = 0, \\ x_{r_{AB}} \sin \alpha_m + y_{r_{AB}} \cos \alpha_m - r_b \varphi_w \sin \alpha_m = 0. \end{cases} \quad (29)$$

式中,下标分别表示对应的线段。

2.4 共轭齿廓及齿轮齿廓方程推导

通过将齿轮啮合方程与坐标变换后的齿轮齿廓方程联立,可以得到齿轮与刀具之间的共轭齿廓方程为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_w = \mathbf{M}_{w,r} \mathbf{r}_r, \\ f(\alpha_1, \alpha_2) = 0. \end{cases} \quad (30)$$

结合共轭齿廓方程与齿轮齿廓各段的非对称刀具方程,可以推导出非对称刀具加工下的成形双压力角非对称齿轮齿廓方程,如下所示。

1)驱动齿侧渐开线齿根过渡圆弧齿廓BC段:

$$\begin{cases} x_{w_{BC}} = (\rho_m \sin \theta_m + l_{CD} - r_b \varphi_w) \cos \varphi_w + (-\rho_m (\cos \theta_m - \sin \alpha_m) - h_{a1}^* m + r_b) \sin \varphi_w, \\ y_{w_{BC}} = -(\rho_m \sin \theta_m + l_{CD} - r_b \varphi_w) \sin \varphi_w + (-\rho_m (\cos \theta_m - \sin \alpha_m) - h_{a1}^* m + r_b) \cos \varphi_w, \\ \varphi_w = (\rho_m \sin \alpha_m \sin \theta_m + l_{CD} \cos \theta_m - h_{a1}^* m \sin \theta_m) / (r_b \cos \theta_m). \end{cases} \quad (31)$$

2)驱动齿侧渐开线齿廓AB段:

$$\begin{cases} x_{w_{AB}} = (l_{AB} \sin \alpha_m + \rho_m \cos \alpha_m + l_{CD} - r_b \varphi_w) \cos \varphi_w + (l_{AB} \cos \alpha_m - h_{a1}^* m + r_b) \sin \varphi_w, \\ y_{w_{AB}} = -(l_{AB} \sin \alpha_m + \rho_m \cos \alpha_m + l_{CD} - r_b \varphi_w) \sin \varphi_w + (l_{AB} \cos \alpha_m - h_{a1}^* m + r_b) \cos \varphi_w, \\ \varphi_w = (l_{AB} + \rho_m \cos \alpha_m \sin \alpha_m + l_{CD} \sin \alpha_m - h_{a1}^* m \cos \alpha_m) / (r_b \sin \alpha_m). \end{cases} \quad (32)$$

3)非驱动齿侧渐开线齿廓FG段:

$$\begin{cases} x_{w_{FG}} = -(l_{FG} \sin \alpha_n + \rho_n \cos \alpha_n + l_{DE} + r_b \varphi_w) \cos \varphi_w + (l_{FG} \cos \alpha_n - h_{a1}^* m + r_b) \sin \varphi_w, \\ y_{w_{FG}} = (l_{FG} \sin \alpha_n + \rho_n \cos \alpha_n + l_{DE} + r_b \varphi_w) \sin \varphi_w + (l_{FG} \cos \alpha_n - h_{a1}^* m + r_b) \cos \varphi_w, \\ \varphi_w = -(l_{FG} + \rho_n \cos \alpha_n \sin \alpha_n + l_{DE} \sin \alpha_n - h_{a1}^* m \cos \alpha_n) / (r_b \sin \alpha_n). \end{cases} \quad (33)$$

4)非驱动齿侧渐开线齿根过渡圆弧齿廓EF段:

$$\begin{cases} x_{w_{EF}} = -(\rho_n \sin \theta_n + l_{DE} + r_b \varphi_w) \cos \varphi_w + (-\rho_n (\cos \theta_n - \sin \alpha_n) - h_{a1}^* m + r_b) \sin \varphi_w, \\ y_{w_{EF}} = (\rho_n \sin \theta_n + l_{DE} + r_b \varphi_w) \sin \varphi_w + (-\rho_n (\cos \theta_n - \sin \alpha_n) - h_{a1}^* m + r_b) \cos \varphi_w, \\ \varphi_w = -(\rho_n \sin \alpha_n \sin \theta_n + l_{DE} \cos \theta_n - h_{a1}^* m \sin \theta_n) / (r_b \cos \theta_n). \end{cases} \quad (34)$$

5)齿根圆弧齿廓CE段:

$$\begin{cases} x_{w_{CE}} = (x_{r_{CE}} - r_b \varphi_w) \cos \varphi_w + (-h_f + r_b) \sin \varphi_w, \\ y_{w_{CE}} = (-x_{r_{CE}} + r_b \varphi_w) \sin \varphi_w + (-h_f + r_b) \cos \varphi_w, \\ \varphi_w = x_{r_{CE}} / r_b. \end{cases} \quad (35)$$

2.5 齿轮齿廓绘制

根据推导出的方程式,利用MATLAB软件开发了相应的程序,以绘制在不同齿轮法向压力角度下的齿轮法向齿廓。表1为非对称齿轮齿廓验证的基本参数,图5展示了单个齿的法向齿廓,呈现了具有不同两侧压力角的非对称齿轮。该程序的设计使其能够灵活绘制不同压力角度和不同齿根圆弧半径下的齿廓曲线,这一特性使得该工具非常适合用于非对称齿轮的设计与分析。通过调整输入参数,用户可以观察到齿廓的变化,从而深入理解不同设计对齿轮性能的影响,提高了设计效率,有利于在实际应用中选择最优的齿轮结构。

表 1 非对称齿轮齿廓验证基本参数

Table 1 Basic parameters for verification of asymmetric gear profile

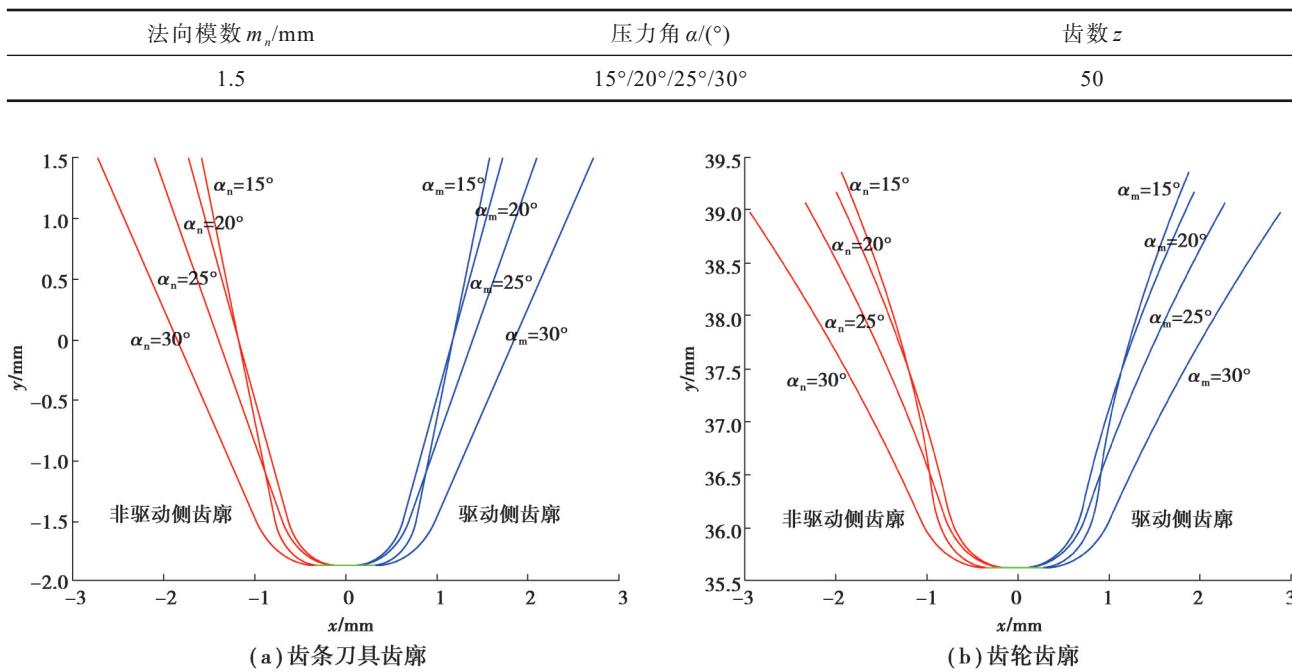


图 5 齿条刀具齿廓与齿轮齿廓验证

Fig. 5 Verification of rack cutter profile and gear profile

3 双压力角非对称齿轮蜗杆砂轮磨齿设计

3.1 蜗杆砂轮齿廓绘制

对于非对称齿轮磨齿加工,其所用蜗杆砂轮与工件齿轮进行空间交错轴啮合,如图 6 所示。为使加工后的工件齿轮满足预定精度与使用要求,其轴向截形应与齿条刀具端截形相同。

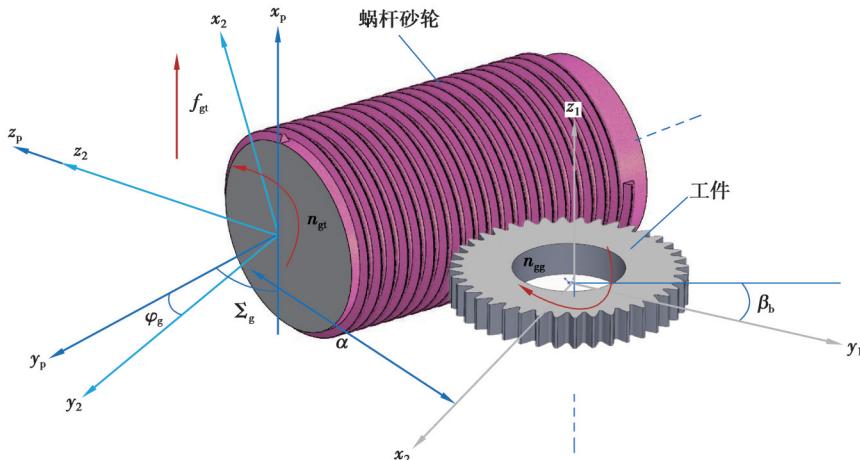


图 6 蜗杆砂轮与工件齿轮空间啮合关系示意图

Fig. 6 Schematic diagram of spatial meshing relationship between worm wheel and workpiece gear

蜗杆砂轮的轮廓面是等升距圆柱螺旋面,与渐开线斜齿轮的结构不同。其轴向截面并不位于 xoy 平面内,而是位于 yoz 平面。轴向截面围绕 z 轴做螺旋运动,蜗杆砂轮的几何特性与渐开线斜齿轮存在显著区别。此外,根据轴向截面的不同,螺旋面可以呈现多种形式,如阿基米德螺旋面、渐开线螺旋面和长幅渐开线螺旋

面等^[16]。文中所采用的蜗杆轴向截面为直线,砂轮的轮廓面呈现为阿基米德螺旋面,如图7所示。

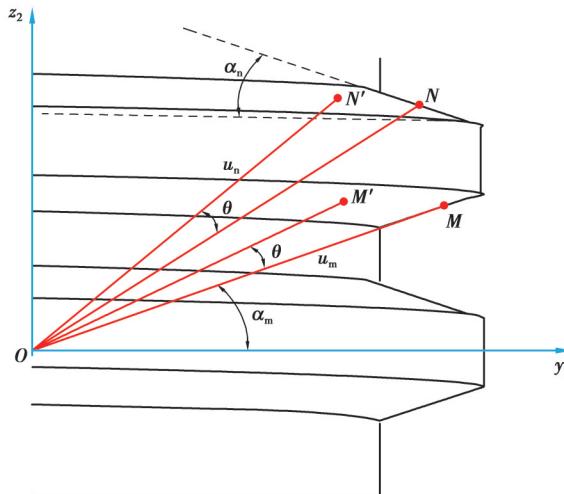


图7 阿基米德螺旋面

Fig. 7 Archimedean spiral surface

结合齿条刀具法向轮廓曲线 $r_r(\alpha_m, \alpha_n)$, 可将蜗杆砂轮轴向截形曲线 $r_{wg}(\alpha_m, \alpha_n, u_m, u_n)$ 定义为

$$r_{wg}(\alpha_m, \alpha_n, u_m, u_n) = \begin{cases} \text{驱动齿侧} & \begin{cases} y_{2m} = u_m \cos \alpha_m, \\ z_{2m} = (u_m - r_a) \sin \alpha_m; \end{cases} \\ \text{非驱动齿侧} & \begin{cases} y_{2n} = u_n \cos \alpha_n, \\ z_{2n} = -(u_n - r_a) \sin \alpha_n + \frac{H_p}{2} + h_{a1} * m (\tan \alpha_m + \tan \alpha_n). \end{cases} \end{cases} \quad (36)$$

式中: α_m 、 α_n 分别表示驱动侧齿廓、非驱动侧齿廓齿形角; u_m 、 u_n 分别表示驱动侧齿廓、非驱动侧齿廓直母线, 用于确定直母线上任意一点 M 、 N 的位置, 其取值范围为 $\frac{r_a}{\cos \alpha_m} \leq u_m \leq \frac{r_f}{\cos \alpha_m}$, $\frac{r_a}{\cos \alpha_n} \leq u_n \leq \frac{r_f}{\cos \alpha_n}$, r_a 、 r_f 分别表示蜗杆砂轮的齿根圆半径和齿顶圆半径; $H_p = k\pi m \cos \lambda$, k 、 m 、 λ 分别为蜗杆砂轮头数、模数、导程角。

将蜗杆砂轮轴向截形曲线 $r_{wg}(\alpha_m, \alpha_n, u_m, u_n)$ 代入矢量回转公式 $R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 可以得到蜗杆砂轮右旋螺旋面方程为

$$S_{wg}(\alpha_m, \alpha_n, u_m, u_n, \theta) = R_z(\theta) \cdot r_{wg}(\alpha_m, \alpha_n, u_m, u_n), \quad (37)$$

式中: θ 表示直母线绕 z 轴旋转的角度; p 为螺旋参数, 表示直母线绕 z 轴旋转一个单位角度时, 在轴向上的位移。

根据蜗杆砂轮轮廓面的数学表达式 $S_{wg}(\alpha_m, \alpha_n, u_m, u_n, \theta)$, 构建蜗杆砂轮的几何模型, 为后续机床模型的建立奠定基础。通过 MATLAB 程序生成齿面离散点云, 并将其导入 SOLIDWORKS 中, 以创建蜗杆砂轮的轮廓面模型。蜗杆砂轮的基本参数如表2所示。

表2 蜗杆砂轮相关参数

Table 2 Parameters related to worm wheel

法向模数 m_n /mm	头数 k /个	压力角 $\alpha/^\circ$	砂轮半径/mm	砂轮宽度/mm
1.5	1	20°/25°	150	100

根据上述基本参数, 可确定蜗杆砂轮轮廓面方程中双参数的取值范围如下:

$$\begin{cases} 165.5067 \leq u_m \leq 169.2306, \\ 159.6267 \leq u_n \leq 163.2183, \\ 0 \leq \theta \leq 106.6600. \end{cases} \quad (38)$$

基于蜗杆砂轮右轮廓面的双参数方程, 利用 MATLAB 程序建立了蜗杆砂轮右轮廓面的模型, 如图 8 所示。为了创建蜗杆砂轮的三维模型, 将 MATLAB 中生成砂轮轮廓面的点云数据导入 SOLIDWORKS 中转换为实体。所建立的三维模型如图 9 所示。

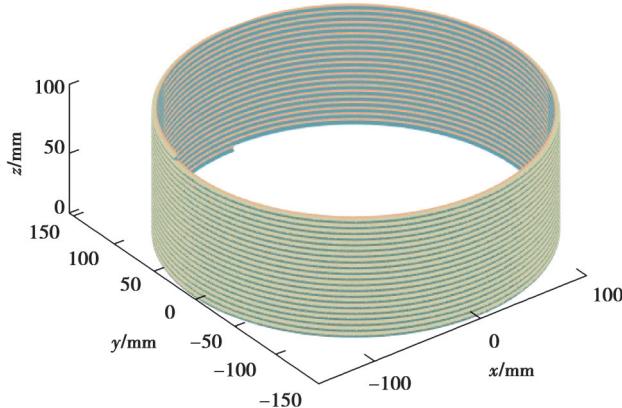


图 8 蜗杆砂轮轮廓面点云

Fig. 8 Point cloud of worm wheel profile surface

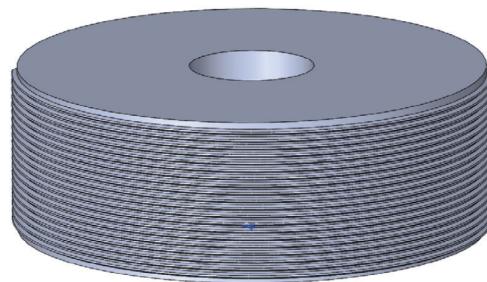


图 9 蜗杆砂轮三维模型

Fig. 9 3D model of worm wheel

3.2 金刚滚轮廓形设计

金刚滚轮在蜗杆砂轮的磨削过程中起着至关重要的作用, 是不可或缺的关键部件。蜗杆砂轮在磨削非对称齿轮前, 需要利用金刚滚轮对其齿面进行加工。非对称齿轮的齿面两侧压力角不同, 因此将金刚滚轮的两边角度设计成不同, 以实现对非对称齿轮的蜗杆砂轮进行修整, 如图 10 所示。通过调节金刚滚轮的齿形角度, 可以有效满足非对称齿轮的加工需求, 从而提升蜗杆砂轮的加工精度。已知金刚滚轮驱动齿压力角为 α_m , 非驱动齿压力角为 α_n , 顶厚为 s , 最大外半径为 r_d , 引入变量齿面参数 t_m/t_n , 便可建立金刚滚轮的齿廓方程。

如图 11 所示, 在修整蜗杆砂轮的过程中, 金刚滚轮保持高速旋转, 不需要考虑其旋转参数, 只需通过调整参数的变化, 就能够有效描述金刚滚轮的齿面和法向量。

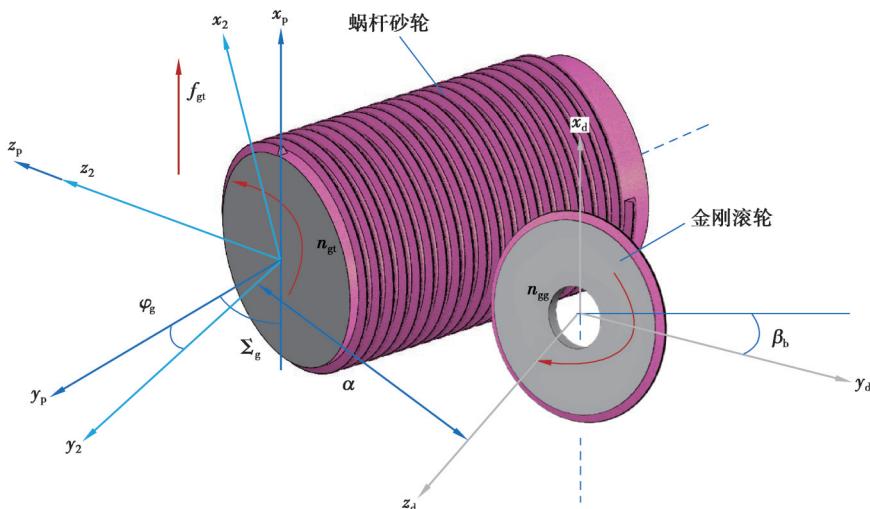


图 10 金刚滚轮廓形示意图

Fig. 10 Schematic diagram of diamond dressing roller

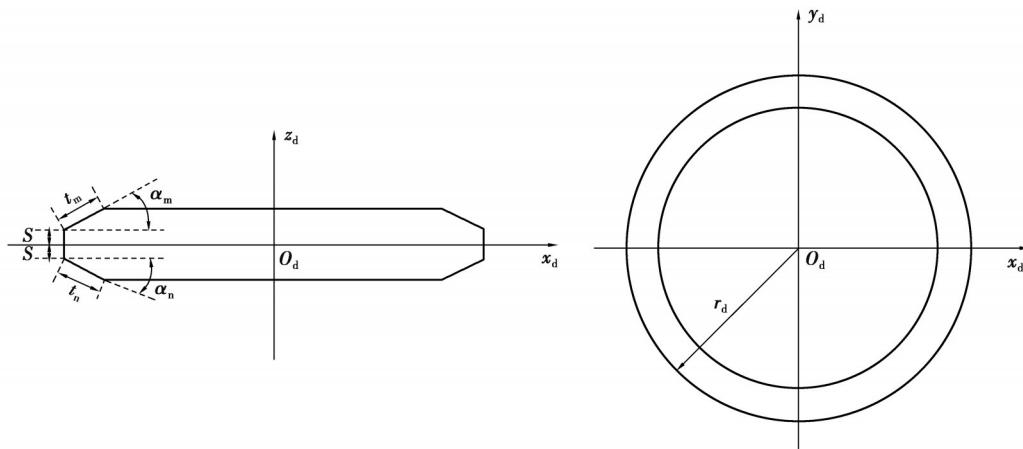


图 11 金刚滚轮示意图

Fig. 11 Schematic diagram of diamond roller

结合蜗杆砂轮轴向齿廓方程,可得金刚滚轮轴向齿廓方程 $r_d(\alpha_m, \alpha_n, t_m, t_n)$ 为

$$r_d(\alpha_m, \alpha_n, t_m, t_n) = [r_{dx} \quad r_{dy} \quad r_{dz}]^T = \begin{cases} [-r_d + t_m \cos \alpha_m \quad 0 \quad t_m \sin \alpha_m + s]^T, \\ [-r_d + t_n \cos \alpha_n \quad 0 \quad -(t_n \sin \alpha_n + s)]^T, \end{cases} \quad (39)$$

$$n_d(\alpha_m, \alpha_n, t_m, t_n) = [n_{dx} \quad n_{dy} \quad n_{dz}]^T = \begin{cases} [-\sin \alpha_m \quad 0 \quad \cos \alpha_m]^T, \\ [-\sin \alpha_n \quad 0 \quad -\cos \alpha_n]^T, \end{cases} \quad (40)$$

式中: α_m 、 α_n 分别表示金刚滚轮驱动侧齿廓、非驱动侧齿廓齿形角; t_m 、 t_n 分别表示驱动侧齿廓、非驱动侧齿廓面参数,其取值范围为 $0 \leq t_m \leq \frac{r_f}{\cos \alpha_m} - \frac{r_a}{\cos \alpha_m}$ 、 $0 \leq t_n \leq \frac{r_f}{\cos \alpha_n} - \frac{r_a}{\cos \alpha_n}$; 顶厚 $s = \frac{1}{2} \left(\frac{H_p}{2} + h_{al}^* m (\tan \alpha_m + \tan \alpha_n) \right)$ 。

将金刚滚轮轴向齿廓方程 $r_d(\alpha_m, \alpha_n, t_m, t_n)$ 代入矢量回转公式 $R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 即可得到金刚

滚轮齿面方程为

$$S_g(\alpha_m, \alpha_n, t_m, t_n, \varphi) = R_z(\varphi) \cdot r_{wg}(\alpha_m, \alpha_n, t_m, t_n) \circ \quad (41)$$

基于上述关系式,选取 $\alpha_m = 25^\circ$ 、 $\alpha_n = 20^\circ$ 、 $m = 1.5$ 、 $r_d = 100$ mm、 $r_a = 150$ mm 参数,在 MATLAB 中可以实现金刚滚轮齿廓点云的绘制,如图 12 所示。同理,将上述点云数据导入 SOLIDWORKS 中,可实现金刚滚轮三维模型的建立,如图 13 所示。

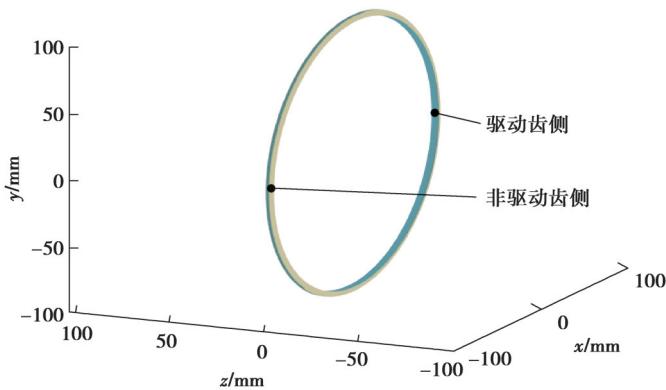


图 12 金刚滚轮齿廓点云

Fig. 12 Point cloud of diamond roller profile

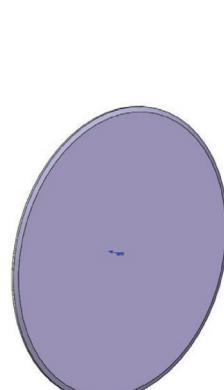


图 13 金刚滚轮三维模型

Fig. 13 3D model of diamond roller

4 双压力角非对称齿轮蜗杆砂轮磨齿加工

4.1 蜗杆砂轮磨齿仿真流程

VERICUT是由美国CGTECH公司开发的数控加工仿真软件,可精确模拟数控加工过程。基于VERICUT系统的蜗杆砂轮磨齿数控加工流程如图14所示。在进行数控加工仿真之前,需要先建立机床本体和运动学模型,再构建刀具、工件和夹具模型,制定刀具运动轨迹并编写数控程序;接着配置数控系统及相关参数,最后进行仿真试验。

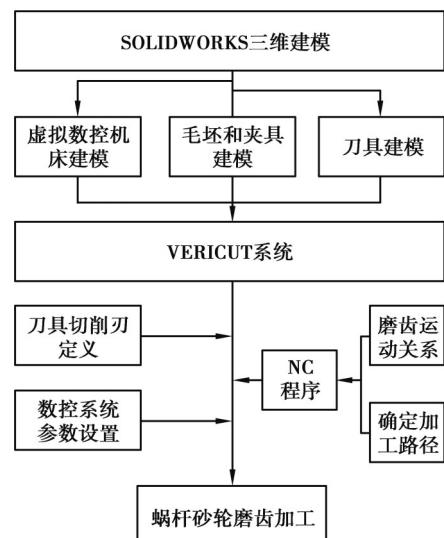


图 14 基于 VERICUT 系统的数控加工流程

Fig. 14 CNC machining process based on VERICUT system

具体仿真步骤如下:

1) 虚拟数控机床建模。

如图15所示,在SOLIDWORKS软件中建立蜗杆砂轮磨齿机床。对于蜗杆砂轮磨齿机床,依据运动关系,需建立如下轴:进给轴XYZ轴、工件旋转轴C轴、蜗杆砂轮旋转轴A轴以及蜗杆砂轮的转角轴B轴。完成运动轴关系后,建立机床的运动树,并将SOLIDWORKS中建立的模型导入运动树,如图16所示。设置机床初始位置,生成机床文件和控制文件。

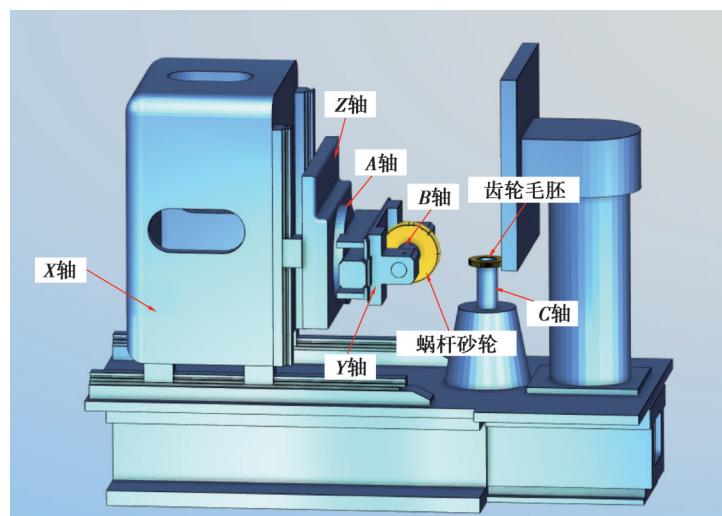


图 15 蜗杆砂轮磨齿机床模型

Fig. 15 Model of worm grinding machine

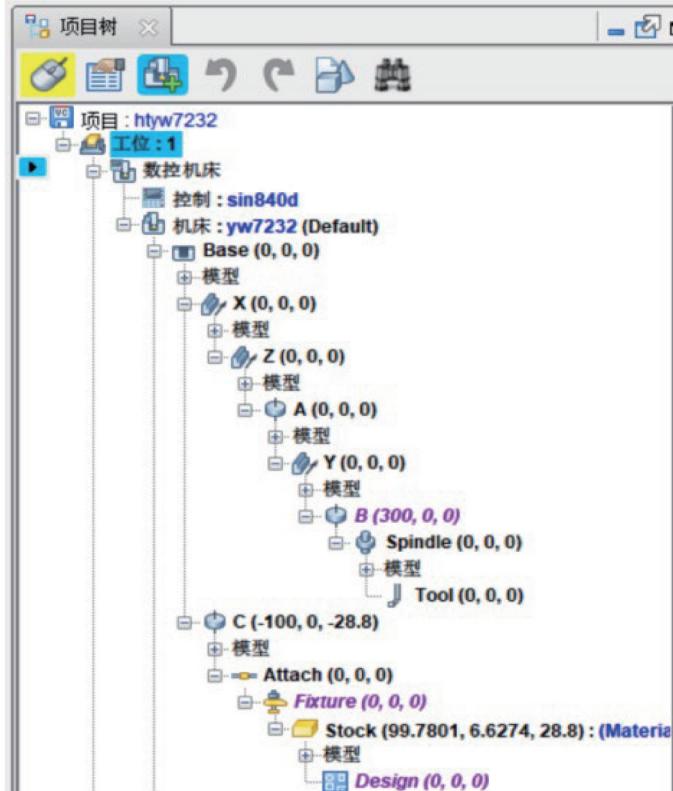


图 16 蜗杆砂轮磨齿机床各轴联动关系

Fig. 16 Axis linkage relationship of worm grinding machine

2) 毛坯和夹具建模。根据机床建模过程,建立夹具和毛坯模型。

3) 刀具建模及刀具切削刃定义。在蜗杆砂轮对齿轮

进行磨削时,需将蜗杆砂轮作为刀具进行加载,仿真软件无法识别蜗杆砂轮的刀具形态,需要将蜗杆砂轮的工作面定义为刀具廓形进行磨削。在定义蜗杆砂轮作为刀具时,为便于识别切削刃,通常会对蜗杆砂轮进行开槽。通过得到的前后刀面闭合曲线,可以模拟蜗杆砂轮的磨削效果,实现齿轮的正常磨削仿真。如图 17 所示为仿真用开槽蜗杆砂轮。

4) 数控系统参数设置。设置工件编程原点和刀具补偿数据等,确保加工程序正确运行。

5) NC 程序。加载数控程序前,定义刀具库中的刀具列表,确保 G 代码与刀具序号对应,然后进行仿真。

6) 仿真结果分析与优化。观察工件模型、尺寸测量和废料计算,检查碰撞与干涉。利用 AUTO-DIFF 模块对比加工后模型与设计模型,调整程序和参数以解决过切和欠切问题。

4.2 仿真结果

经仿真加工后的齿轮廓形如图 18 所示,与双压力角非对称齿轮理论设计廓形进行对比,可以看出,采用设计的非对称齿轮蜗杆砂轮进行的齿轮磨削仿真整体效果良好,与理论设计廓形基本一致。利用 VERICUT 中的“自动比较”功能,将加工出的模型和 KISSsoft 同参数生成的标准齿轮模型作对比,对比结果如图 19 所示,可知仿真磨削生成齿面与理论设计齿面偏差全部控制在 $1 \mu\text{m}$ 以下,表面质量良好,仿真结果验证了文中设计的非对称齿轮蜗杆砂轮开展磨齿加工的可行性。得到的驱动齿面误差符合实际生产要求,为后续非对称齿轮磨齿加工试验奠定了坚实的理论基础,确保了非对称齿轮在各类应用中的高效性和可靠性。

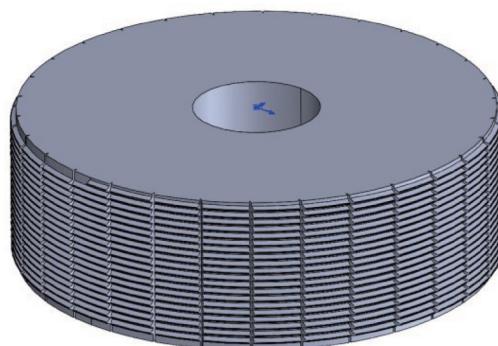


图 17 仿真用开槽蜗杆砂轮

Fig. 17 Slotting worm wheel for simulation

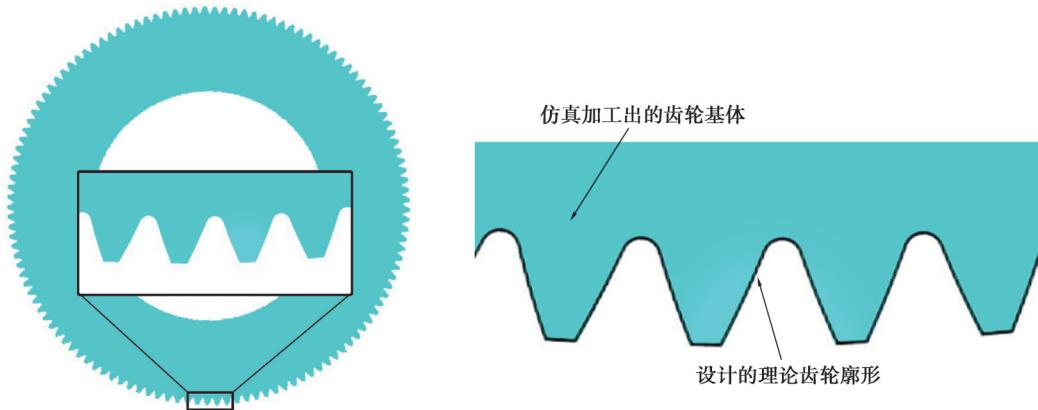


图 18 仿真加工出的齿轮基体廓形

Fig. 18 Gear matrix profile simulated and processed

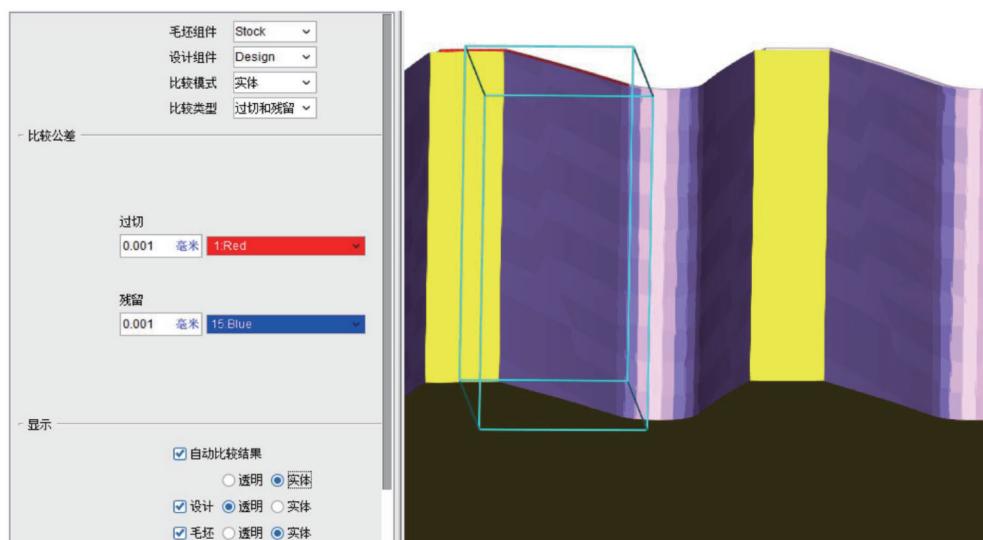


图 19 仿真模型与实际模型对比结果

Fig. 18 Comparison results between the simulation model and the actual model.

5 结 论

文中研究了双压力角非对称齿轮的齿廓设计及其蜗杆砂轮磨齿加工方法。通过推导非对称齿轮的精确齿廓方程, 分析了齿条刀具与齿轮之间的啮合关系, 提出了蜗杆砂轮磨齿的设计与加工技术。结果表明, 双压力角非对称齿轮在加工过程中能够有效提高齿根厚度和啮合刚度, 从而改善齿轮的承载能力和传动精度。在蜗杆砂轮磨齿方面, 提出的蜗杆砂轮的轮廓设计和金刚滚轮修整方法能够确保加工精度并提升齿轮的表面质量。通过 VERICUT 仿真分析, 验证了所提出的磨齿方法的有效性, 仿真结果显示磨削过程中齿面误差控制在 $1 \mu\text{m}$ 以下, 表面质量良好, 证明了该方法能够满足高精度加工要求。为双压力角非对称齿轮的设计与加工提供了理论基础和实践指导, 为提高齿轮传动系统的效率、可靠性及精度提供了有效的解决方案。

参考文献

- [1] Difrancesco G, Marini S. Structural analysis of teeth with asymmetrical profiles[J]. Gear Technology, 1997, 14(4): 16-22.
- [2] Kapelevich A. Geometry and design of involute spur gears with asymmetric teeth[J]. Mechanism and Machine Theory, 2000, 35(1): 117-130.
- [3] Kapelevich A. Asymmetric gears: parameter selection approach[J]. Applied Mechanics and Materials, 2011, 86: 70-73.
- [4] 卞景扬, 莫帅, 韩涵, 等. 非对称齿轮设计方法与动态啮合特性研究[J]. 机械设计, 2019, 36(S1): 59-64.

- Bian J Y, Mo S, Han H, et al. Research on the design method and dynamic meshing characteristics of asymmetric gears[J]. *Journal of Machine Design*, 2019, 36(S1): 59-64. (in Chinese)
- [5] 莫帅,唐文杰,朱晟平,等.偏置非对称面齿轮啮合原理及复杂共轭齿面精准设计[J].*机械传动*, 2021, 45(9): 68-74.
- Mo S, Tang W J, Zhu S P, et al. Meshing principle of offset asymmetric face gears and precise design of complex conjugate tooth surfaces[J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2021, 45(9): 68-74. (in Chinese)
- [6] 皇甫一樊,陈康康,马辉,等.考虑混合修形的非对称直齿轮副啮合特性与振动特性分析[J].*中国科学:技术科学*, 2019, 49(6): 661-668.
- Huangfu Y F, Chen K K, Ma H, et al. Analysis of meshing and vibration characteristics of asymmetric spur gear pairs considering mixed modification[J]. *Scientia Sinica Technologica*, 2019, 49(6): 661-668. (in Chinese)
- [7] KarpatFatih , Stephen Ekwaro - Osire , CavdarKadir, et al. Dynamic analysis of involute spur gears with asymmetric teeth[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2008, 50(12): 1598-1610.
- [8] Abdullah M Q, Jameel A N, Hasan H S A D. Reduction of noise and vibration of spur gear by using asymmetric teeth profiles with tip relief[J]. *Journal of Engineering*, 2015, 21(9): 105-118.
- [9] 肖望强,李威,韩建友,等.非对称齿廓齿轮弯曲疲劳强度理论分析与试验[J].*机械工程学报*, 2008(10): 44-50.
- Xiao W Q, Li W, Han J Y, et al. Theoretical analysis and experimental study on bending fatigue strength of asymmetric tooth profile gears[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2008(10): 44-50. (in Chinese)
- [10] Vaghela P, Prajapati J. Parametric analysis of asymmetric in-volute spur gear tooth[J]. *International Journal of Powertrains*, 2019, 8(4): 292-326.
- [11] 赵向飞,雷前召,董康军,等.渐开线齿轮滚刀刀顶圆角的设计研究[J].*机械传动*, 2013, 37(5): 40-42.
- Zhao X F, Lei Q Z, Dong K J, et al. Research on the design of the tip fillet of involute gear hobs[J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2013, 37(5): 40-42. (in Chinese)
- [12] Chen Y J, Yang H C, Pai P F. Design and kinematics evaluation of a gear pair with asymmetric parabolic teeth[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2016, 101: 140-157.
- [13] 邓小禾.渐开线圆柱齿轮齿廓修形与啮合规律研究[D].武汉:武汉理工大学, 2015.
- Deng X H. Research on tooth profile modification and meshing law of involute cylindrical gears[D]. Wuhan : Wuhan University of Technology, 2015. (in Chinese)
- [14] 杨勇,胡军华,时志奇,等.非对称齿轮啮合刚度精确求解及齿廓参数分析[J].*机械传动*, 2024, 48(3): 18-26.
- Yang Y, Hu J H, Shi Z Q, et al. Accurate solution of meshing stiffness and tooth profile parameter analysis of asymmetric gears [J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2024, 48(3): 18-26. (in Chinese)
- [15] Yang Y, Wang J, Zhou Y, et al. Stress analysis of coated spur and helical gears considering load distribution[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part J: Journal of Engineering Tribology*, 2020, 108(1): 86-95.
- [16] 段新宇.基于多向变速控制的蜗杆砂轮磨齿齿面纹理改变方法研究[D].合肥:合肥工业大学, 2022.
- Duan X Y. Research on the method of changing tooth surface texture based on multi-directional variable speed control in worm wheel gear grinding[D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2022. (in Chinese)

(编辑 陈移峰)