

doi: 10.11835/j.issn.1000-582X.2024.266

引用格式:黎子君, 田静杰, 胡长浩, 等. 考虑蠕变的任意多边形杂交应力单元[J]. 重庆大学学报, 2025, 48(8): 28-39.



考虑蠕变的任意多边形杂交应力单元

黎子君¹, 田静杰², 胡长浩², 谭大文², 夏帆², 侯春尧², 刘璐瑶², 宁少庆², 郭然¹

(1. 昆明理工大学建筑工程学院, 昆明 650500; 2. 中国长江电力股份有限公司
溪洛渡水力发电厂, 云南 昭通 657300)

摘要:路基工后沉降直接关乎公路的安全性能, 蠕变行为的预测对保障路基工程的长期安全具有重要意义。对蠕变行为进行有限元数值模拟时, 复杂结构模型的网格划分需要耗费大量的计算资源, 且计算量大计算时间长。提出了一种考虑蠕变的任意多边形杂交应力新单元(polygonal hybrid stress element method, PHSEM), 用于工程中的路基沉降问题研究。基于杂交应力元法及路基土的蠕变行为, 推导 PHSEM 的单元基本格式, 分析表明该单元引入了高阶应力场, 能更好地提高计算精度, 进一步建立路基蠕变的数值计算模型, 结合有限元软件 MARC 开展对比分析。研究表明: PHSEM 的数值仿真曲线拟合良好, 验证了考虑蠕变的任意多边形杂交应力单元的有效性; PHSEM 在划分网格时形状可以是任意边数的多边形, 能够很好地模拟多种介质的路基模型, 真实地计算出不同部位的应力分布情况; PHSEM 的构造为实际工程中的蠕变研究提供了一种可参考的新思路。

关键词:杂交应力元; 任意多边形杂交应力单元; 蠕变; 高阶应力场; 有限元; 路基

中图分类号: O344.6 文献标志码: A 文章编号: 1000-582X(2025)08-028-12

Arbitrary polygonal hybrid stress element for creep analysis in roadbed engineering

LI Zijun¹, TIAN Jingjie², HU Changhao², TAN Dawen², XIA Fan², HOU Chunyao², LIU Luyao²,
NING Shaoqing², GUO Ran¹

(1. Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Kunming University of Science and Technology, Kunming
650500, P. R. China; 2. Xiluodu Hydropower Plant, China Yangtze Power Co., Ltd., Zhaotong,
Yunnan 657300, P. R. China)

Abstract: Post-construction settlement of roadbeds is a critical factor influencing the long-term safety and performance of highways. Accurate prediction of creep behavior is of great significance for ensuring the structural integrity of roadbed systems. However, conventional finite element simulations of creep behavior require extensive meshing for complex structural models, leading to high computational costs and time consumption. To

收稿日期: 2024-03-31 网络出版日期: 2024-06-14

基金项目: 国家自然科学基金(12072135, 12227801); 中国长江电力股份有限公司项目(Z412302007)。

Supported by National Natural Science Foundation of China (12072135, 12227801) and China Yangtze Power Co., Ltd. (Z412302007).

作者简介: 黎子君(1996—), 女, 硕士研究生, 主要从事计算固体力学方向研究, (E-mail)li17725796557@163.com。

通信作者: 田静杰, 男, 高级工程师, (E-mail)tian_jingjie@ctg.com.cn。

address these challenges, this paper proposes a novel arbitrary polygonal hybrid stress element method (PHSEM) that incorporates creep effects for roadbed settlement analysis. Based on the hybrid stress finite element method and the time-dependent deformation characteristics of roadbed soil, the theoretical formulation of the PHSEM is derived. This element introduces a higher-order stress field, improving computational accuracy. A numerical creep model is further established and validated against results obtained from MARC software. The simulation results show that the PHSEM achieves good agreement with benchmark solutions, with deviations within acceptable limits. Furthermore, the element accommodates polygons with variable edge counts, offering flexible meshing for complex, heterogeneous roadbed models and enabling realistic stress distribution analysis. The proposed PHSEM provides a promising approach for creep modeling in practical geotechnical engineering applications.

Keywords: hybrid stress element; arbitrary polygonal hybrid stress element; creep; higher-order stress field; finite element; roadbed

在公路建设过程中,路基沉降会对所建道路的质量产生重要影响。由于地理环境、气候条件和地质成因等原因,不同地区的土壤质地特征差异明显。在路基施工过程中及施工后,这些土壤特征可能导致严重问题,如不均匀差异沉降^[1]、边坡坍塌和山体滑坡等,影响道路安全、运输效率和道路使用寿命。因此,路基沉降量的研究成了公路建设中的一个重要问题^[2]。在沉降分析时,必须考虑路基填土的蠕变特性^[3-4],因为会产生重大影响^[5]。

路基的沉降可以划分为3个阶段,初始瞬时沉降、固结沉降和次固结沉降。次固结沉降也称蠕变沉降,这部分沉降是指地基在外载荷作用下,土体中超孔隙水压力已完全消散,有效应力不变的情况下,由土的固体骨架长时间缓慢蠕变所产生的沉降,沉降效果是随时间长期缓慢体现的。土在外荷载作用下的长期变形行为一直是地质工程和岩土工程的研究重点之一^[6-7]。1943年Terzaghi^[8]基于线弹性的假说,首先提出了饱和土的一维固结理论。研究表明,由于土壤骨架的黏性特征,土壤的应力-应变行为具有高度的时间依赖性^[9-10],这种时间依赖现象主要来源于饱和土固结和土骨架蠕变。固结是由超孔隙压力的消散引起的,而土壤骨架的黏度会产生蠕变行为^[11]。在土壤骨架具有黏弹性的假设下,则可以描述为持续很长时间的蠕变行为。Biot^[6]和Bjerrum^[9]在早期的研究中采用黏弹性的本构模型(如Kelvin, Maxwell和Merchant模型)来描述土壤的固结和蠕变过程。

杂交应力元法是Pian(卞学璜)^[12]在1964年基于修正余能原理首次提出的,克服了传统位移有限元法无法解决单元边数大于4时位移场插值的困难。为了避免位移型多边形单元的位移插值函数构造困难问题,杂交元方法被引入到多边形单元的构建中。

1994年Ghosh等^[13]提出了基于最小余能原理的Voronoi有限元法(Voronoi cell finite element method, VCFEM),该方法利用域内的应力插值,不需要构造域内位移插值函数,使单元构造变得简单。1995年Zhang等^[14-15]提出了基于Hellinger-Reissner两场变分原理的杂交多边形有限元法,用于含夹杂和孔洞材料的分析。2010年Fu等^[16]基于变分原理开发了新型8节点平面单元,在极端网格畸变下也能保持精度不变。2011年Cen等^[17]首次提出形状自由(shape-free)有限元法,用以描述有限元性能不受单元形状影响的特性。同年Cen等^[18]针对各向同性问题成功构造了2个平面8结点单元和2个平面12结点单元,针对各向同性和各向异性问题,构造了平面4结点带旋转自由度膜元^[19]。2015年Zhou等^[20]成功构造了一种新的二次多边形杂交应力函数单元,构造方法简单且精度高于许多其他方法。2019年杨锋等^[21]提出了一种基于多边形杂交应力单元的优化接触算法(polygonal hybrid stress element method, PHSEM)。由于单元边数可变,PHSEM能够灵活适应复杂的模型边界与材料边界,更容易划分网格。

笔者基于PHSEM提出了一种考虑蠕变的任意多边形杂交应力新单元,用于分析不同岩土种类的路基产生的蠕变变形行为。同时,讨论了任意多边形杂交应力单元的高效性,以及此单元对宏观复杂的复合介质材料研究的可行性。

1 单元基本公式推导

多边形单元的形状具有任意性,在处理复杂结构时具有较大优势。杂交应力法不需要构造域内的位移插值函数,利用这种方法构造的多边形单元不仅精度高,而且具有很强的抗畸变敏感性能^[20]。利用杂交应力方法的优势,将其应用到任意多边形单元的构造中,以解决目前多边形单元构造困难等问题。

任意多边形杂交应力单元的示意图如图1所示,网格划分由边数不定的多边形构成,可根据材料的空间分布及结构的特点,高效便捷地划分网格,可有效模拟复杂不规则的模型。典型任意多边形杂交应力单元的构成如图2所示。

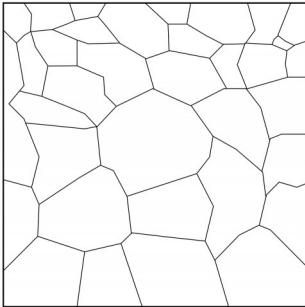


图1 任意多边形杂交应力单元的示意图

Fig. 1 Schematic diagram of arbitrary polygonal hybrid stress elements

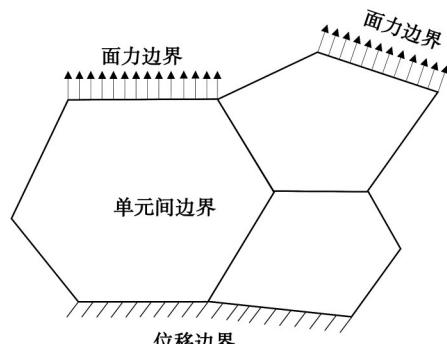


图2 任意多边形杂交应力单元

Fig. 2 The model of arbitrary polygonal hybrid stress element

1.1 提出泛函

公式推导的理论框架基于Tong和Pian^[22-24]以及Atluri^[25]建立的杂交应力元增量模型。

$$\begin{aligned} \Pi_{mc}(\Delta\sigma, \Delta\mathbf{u}) = & \int_{\Omega_e} \Delta B(\sigma, \Delta\sigma) d\Omega + \int_{\Omega_e} \varepsilon : \Delta\sigma d\Omega - \\ & \int_{\partial\Omega_e} (\sigma + \Delta\sigma) \cdot \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega_i} (\bar{\mathbf{f}} + \Delta\bar{\mathbf{f}}) \cdot (\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) d\partial\Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

式中: ΔB 为余能增量; \mathbf{n} 为单元外边界上外法线向量;增量步开始前已知的初始场变量: σ 为单元域 Ω_e 内满足平衡的应力场; ε 为单元域内满足协调关系的应变场; \mathbf{u} 为单元外边界 $\partial\Omega_e$ 的位移; $\bar{\mathbf{f}}$ 和 $\Delta\bar{\mathbf{f}}$ 分别为力边界 $\partial\Omega_i$ 给定外力和给定外力增量。未知的场变量: $\Delta\sigma$ 为单元域内的应力增量; $\Delta\mathbf{u}$ 为单元外边界上的位移增量。

对于式(1),满足给定面力边界条件式(2)和单元间的面力连续条件式(3)。

$$\mathbf{n} \cdot (\sigma_e + \Delta\sigma_e) = \bar{\mathbf{f}} + \Delta\bar{\mathbf{f}}, \quad (2)$$

$$\mathbf{n}^- \cdot (\sigma_e + \Delta\sigma_e) + \mathbf{n}^+ \cdot (\sigma_e + \Delta\sigma_e) = 0. \quad (3)$$

在该模型的基础上,考虑满足单元域内平衡关系的蠕变应变,得到了修正后的增量形式的余能泛函。

$$\begin{aligned} \Delta\Pi_{mc}(\Delta\sigma, \Delta\mathbf{u}) = & \int_{\Omega_e} \Delta B(\sigma, \Delta\sigma) d\Omega + \int_{\Omega_e} \Delta\varepsilon^e : \Delta\sigma d\Omega + \int_{\Omega_e} \varepsilon : \Delta\sigma d\Omega - \\ & \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{n} \cdot (\sigma + \Delta\sigma) \cdot (\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega_i} (\bar{\mathbf{f}} + \Delta\bar{\mathbf{f}}) \cdot (\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) d\partial\Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

式中, $\Delta\varepsilon^e$ 为单元域内的蠕变应变增量。

余能增量 ΔB 满足

$$\frac{\partial(\Delta B)}{\partial(\Delta\sigma)} = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^p, \quad (5)$$

式中: $\Delta\varepsilon^e$ 为单元域内弹性应变增量; $\Delta\varepsilon^p$ 为单元域内塑性应变增量。

1.2 单元的应力场/边界位移假设

在无外力作用的静力条件下,不考虑体力时应力场满足平衡方程

$$\nabla \cdot \sigma = 0. \quad (6)$$

对于二维问题, 引入 Airy 应力函数, 得到满足平衡方程的应力场以及应力增量的矩阵形式为

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{P}\boldsymbol{\beta}, \quad (7)$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{P}\Delta\boldsymbol{\beta}, \quad (8)$$

式中: $\boldsymbol{\beta}$ 为单元内部假定独立应力场的应力系数矩阵; \mathbf{P} 为应力插值矩阵。

单元的边界位移增量可以表示为各个边界段节点的广义位移增量的插值

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{L}\Delta\mathbf{q}, \quad (9)$$

式中: \mathbf{L} 为单元边界上的形函数矩阵; $\Delta\mathbf{q}$ 为单元边界节点位移。

将式(7)~(9)带入式(4)得

$$\begin{aligned} \Delta\Pi_{mc}(\Delta\boldsymbol{\sigma}, \Delta\mathbf{u}) = & \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H} \Delta\boldsymbol{\beta} + \Delta\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{G}^e + \int_{\Omega_e} \Delta\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\partial\Omega_e} (\Delta\boldsymbol{\beta}^T + \boldsymbol{\beta}^T) \mathbf{P}^T \mathbf{N}^T \mathbf{u} d\partial\Omega - \\ & \int_{\partial\Omega_e} (\Delta\boldsymbol{\beta}^T + \boldsymbol{\beta}^T) \mathbf{G} \Delta\mathbf{q} d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega_i} (\bar{\mathbf{f}} + \Delta\bar{\mathbf{f}})^T \mathbf{u} d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega_i} \bar{\mathbf{F}}^T \Delta\mathbf{q} d\partial\Omega, \end{aligned} \quad (10)$$

式中, \mathbf{S} 为弹塑性柔度张量。其中,

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega_e} \mathbf{P}^T \mathbf{S} \mathbf{P} d\Omega, \quad (11)$$

$$\mathbf{G} = \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{P}^T \mathbf{N}^T \mathbf{L} d\partial\Omega, \quad (12)$$

$$\mathbf{G}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{P}^T \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e d\Omega, \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{F}}^T = \int_{\partial\Omega_i} (\bar{\mathbf{f}} + \Delta\bar{\mathbf{f}})^T \mathbf{L} d\partial\Omega. \quad (14)$$

1.3 单刚推导

根据修正的余能驻值条件

$$\frac{\partial(\Delta\Pi_{mc})}{\partial(\Delta\boldsymbol{\beta})} = 0, \quad (15)$$

可以得到每个单元内运动关系的弱表达式为

$$\mathbf{H}\Delta\boldsymbol{\beta} + \mathbf{G}^e + \int_{\Omega_e} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{P}^T \mathbf{N}^T \mathbf{u} d\partial\Omega - \mathbf{G}\Delta\mathbf{q} = 0. \quad (16)$$

在上一增量步中满足

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{P}^T \mathbf{N}^T \mathbf{u} d\partial\Omega = 0, \quad (17)$$

则式(16)可以表示为

$$\mathbf{H}\Delta\boldsymbol{\beta} + \mathbf{G}^e - \mathbf{G}\Delta\mathbf{q} = 0. \quad (18)$$

在迭代求解过程中, 第 i 迭代步的应力参数增量表示为

$$\Delta\boldsymbol{\beta}' = \sum_{n=1}^i d\boldsymbol{\beta}^n = \Delta\boldsymbol{\beta}^{i-1} + d\boldsymbol{\beta}^i; \quad (19)$$

在迭代求解过程中, 第 i 迭代步的位移增量表示为

$$\Delta\mathbf{q}' = \sum_{n=1}^i d\mathbf{q}^n = \Delta\mathbf{q}^{i-1} + d\mathbf{q}^i. \quad (20)$$

由式(18)~(20)可得到应力参数迭代增量的位移迭代增量表达式。

第 1 迭代步:

$$d\boldsymbol{\beta}^1 = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} d\mathbf{q}^1 - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}^e, \quad (21)$$

第 2~ i 迭代步:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\beta}^2 &= \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} d\mathbf{q}^2, \\ &\dots \\ d\boldsymbol{\beta}' &= \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} d\mathbf{q}^i. \end{aligned} \quad (22)$$

根据修正余能驻值条件

$$\frac{\partial(\Delta\Pi_{mc})}{\partial(\Delta\boldsymbol{q})}=0, \quad (23)$$

可以得到相应的面力边界条件的弱表达式为

$$-\boldsymbol{G}^T(\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta})+\bar{\boldsymbol{F}}=0. \quad (24)$$

将式(19)带入式(24)可得

$$-\boldsymbol{G}^T(\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta}^{i-1}+\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}^i)+\bar{\boldsymbol{F}}=0. \quad (25)$$

将式(21)带入式(25)可整理得第1迭代步的求解方程

$$\boldsymbol{K}\mathrm{d}\boldsymbol{q}^1=\bar{\boldsymbol{F}}-\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{G}^c. \quad (26)$$

将式(22)带入式(25)可整理得第2~i迭代步的求解方程

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}\mathrm{d}\boldsymbol{q}^2 &= \bar{\boldsymbol{F}}-\boldsymbol{G}^T(\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta}^1), \\ &\dots \\ \boldsymbol{K}\mathrm{d}\boldsymbol{q}^i &= \bar{\boldsymbol{F}}-\boldsymbol{G}^T(\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta}^{i-1}). \end{aligned} \quad (27)$$

其中,刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{G}. \quad (28)$$

2 土壤蠕变方程

式(4)中的蠕变应变增量,采用以下的土壤蠕变本构方程进行计算。对于一维蠕变问题,等效蠕变应变率与任何相关参数的相关性可以直接以幂定律形式表示,采用合适的指数,参考 MSC MARC 手册。

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c=A\sigma^n\boldsymbol{\epsilon}^mT^p(qt^{q-1}), \quad (29)$$

式中: A 为蠕变材料常数; $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c$ 为等效蠕变应变率; σ 、 $\boldsymbol{\epsilon}^c$ 、 T 、 t 分别为等效应力、等效蠕变应变、温度和时间。 m 、 n 、 p 、 q 分别为与等效蠕变应变、等效应力、温度以及时间相关的指数。

由式(29)可知,土壤蠕变过程是一个非常复杂的非线性力学过程,其应力与应变都随时间而变化,是时间的函数。由于蠕变属于不可逆变形且遵循塑性理论发展,对于三维蠕变问题,通常将塑性理论推广到蠕变情况,可以建立如下蠕变应变增量方程。

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}_{ij}^c=\frac{3\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^c}{2\bar{\sigma}}\boldsymbol{S}_{ij}, \quad (30)$$

式中: $\boldsymbol{\epsilon}_{ij}^c$ 为蠕变应变张量; \boldsymbol{S}_{ij} 为应力偏张量; $\bar{\sigma}$ 为等效应力; $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^c$ 为等效蠕变应变。

3 数值算例

建立了2个数值算例,第1个算例是简单的泥板试件模型,运用一个任意多边形杂交应力单元模拟泥板试件,主要为了验证考虑蠕变的PHSEM有限元模型的有效性。第2个算例是包含2种材料的路基模型,用于分析多种材料路基的蠕变沉降问题,以及此单元对复杂材料研究和在路基工程应用中的可行性。

3.1 数值算例一

模型结构如图3(a)所示,是一块长2 m,宽2 m的正方形泥板。泥板左下角和右下角采用完全固定的约束,对泥板施加竖直向下1 kN的载荷。PHSEM模型采用4个节点,1个任意多边形杂交应力单元,250项的应力函数多项式(21阶的Airy应力函数),网格划分如图3(b)所示;MARC模型采用10 201个节点,10 000个平面应变全积分四边形单元,网格划分如图3(c)所示。

模型所用材料为冻土^[26],其材料力学参数如表1所示。计算模型考虑在施加载荷下产生的蠕变,采用的蠕变参数如表2所示^[26],模拟泥板试件100 h的蠕变过程。

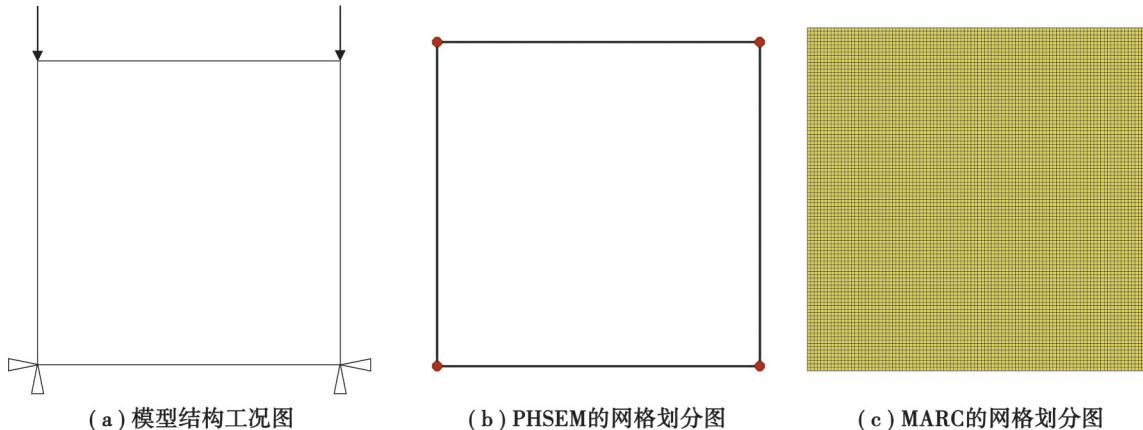


图 3 模型结构工况图和网格划分图

Fig. 3 Model structural conditions and meshing diagrams

表 1 冻土力学参数表

Table 1 Mechanical parameters of frozen soil

土壤类别	弹性模量/MPa	泊松比	重度/(kN·m ⁻³)
冻土	5	0.35	18

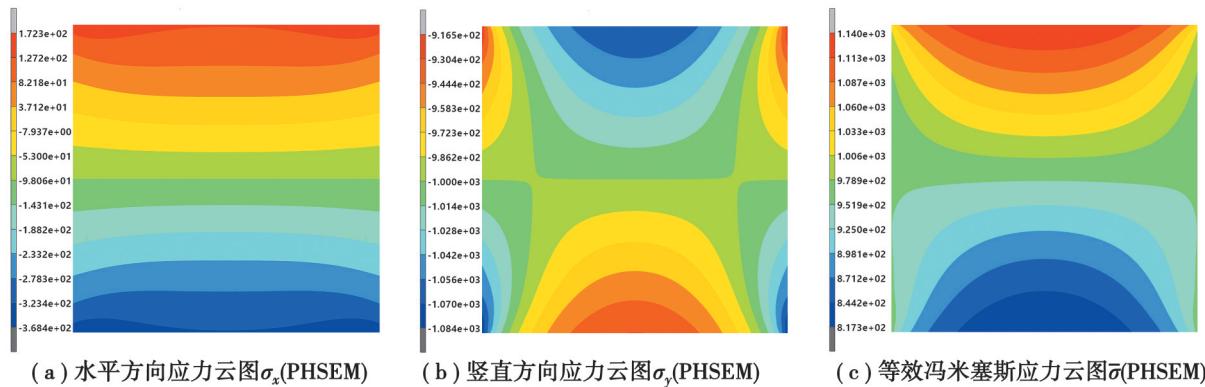
表 2 冻土蠕变参数表

Table 2 Creep parameters of frozen soil

土壤类别	A	m	n	p	q
冻土	1.11×10^{-13}	0	1.74	0	0.49

注: 蠕变参数拟合时, σ 为等效应力, Pa; T 为温度, $^{\circ}$ C; t 为时间, h。

为了验证任意多边形杂交应力单元的有效性, 建立结构相同和边界条件一致的 PHSEM 模型和 MARC 模型。图 4 显示了 PHSEM 模型和 MARC 模型考虑蠕变时的水平方向应力云图 σ_x , 坚直方向应力云图 σ_y 和等效冯米塞斯应力云图 $\bar{\sigma}$ 。图 5 显示了 PHSEM 模型和 MARC 模型考虑蠕变时的水平方向蠕变应变云图 ε_x , 坚直方向蠕变应变云图 ε_y 和等效蠕变应变云图 $\bar{\varepsilon}$ 。由应力云图和蠕变应变云图可以看出, PHSEM 模型的应力和蠕变应变分布与 MARC 模型得到的结果吻合, 即计算结果与理论吻合, 验证了 PHSEM 模型考虑蠕变的有效性。



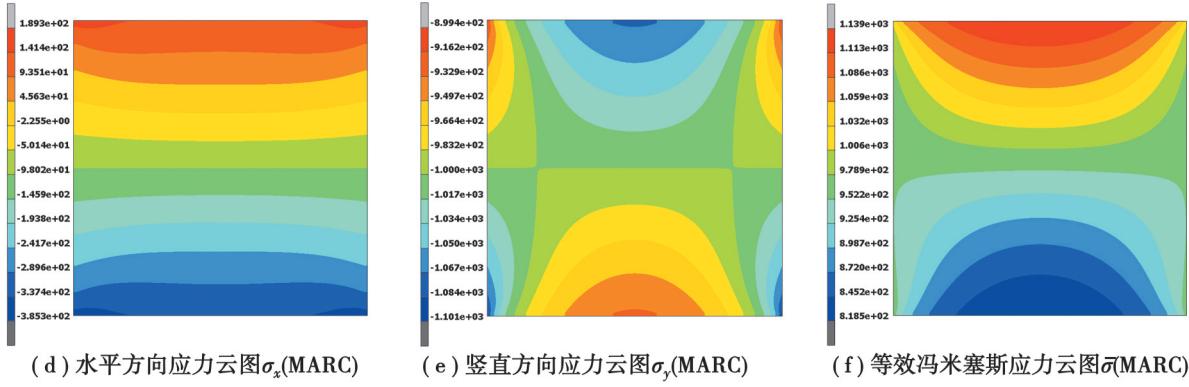


图 4 应力云图

Fig. 4 Contours of stress

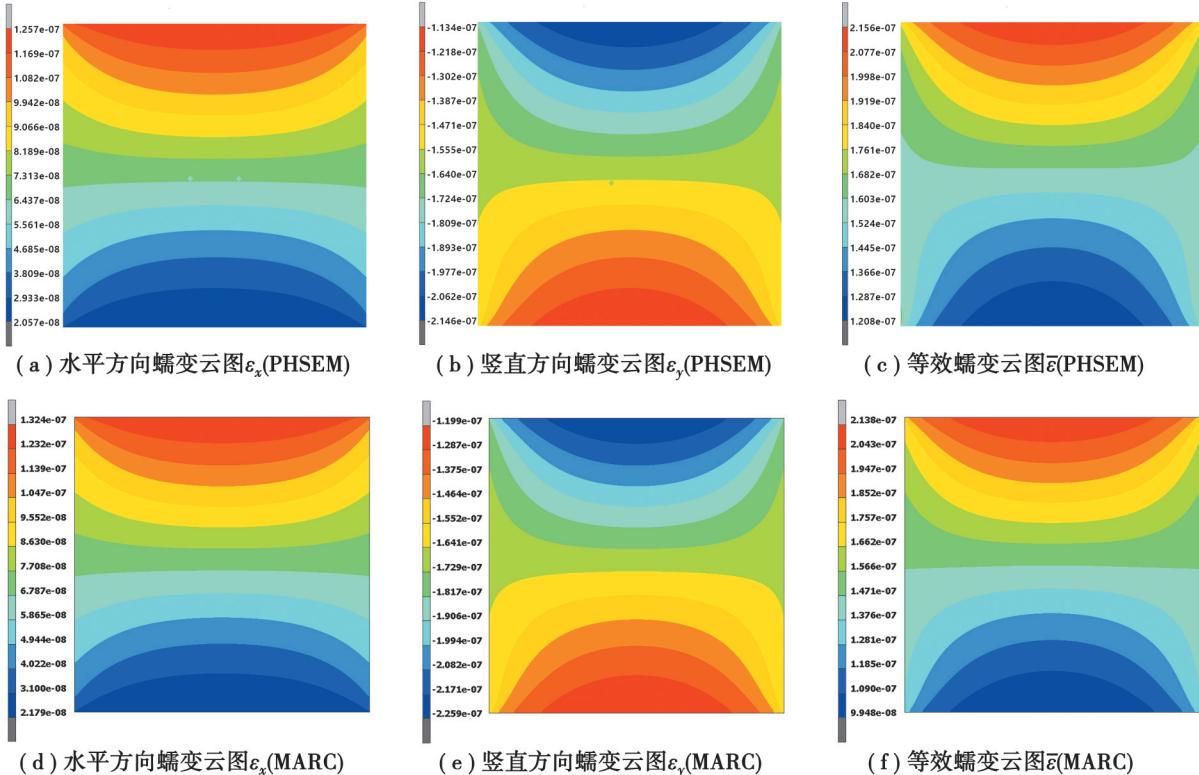


图 5 蠕变云图

Fig. 5 Contours of creep strain

通过观察路径曲线上应力值和蠕变应变值的拟合情况可以看出, PHSEM 模型的变化趋势与 MARC 模型的结果一致, 这证明了任意多边形杂交应力单元考虑蠕变的准确性。

图 6 拟合了 PHSEM 模型和 MARC 模型在路径曲线上的应力值。可以注意到 2 个模型在水平方向应力值、竖直方向应力值和等效冯米塞斯应力值的拟合趋势都是高度一致的。由此可见, PHSEM 的计算结果和 MARC 的计算结果较吻合, 由 PHSEM 计算的整体应力场分布是正确的。

图 7 拟合了 PHSEM 模型和 MARC 模型在路径曲线上的蠕变应变值。可以注意到 2 个模型在水平方向蠕变应变值、竖直方向蠕变应变值和等效蠕变应变值的拟合趋势基本都是一致的, 误差也在合理范围内。由此可见, PHSEM 的计算结果和 MARC 的计算结果比较吻合, 由 PHSEM 计算的整体蠕变应变场分布是符合客观规律的。

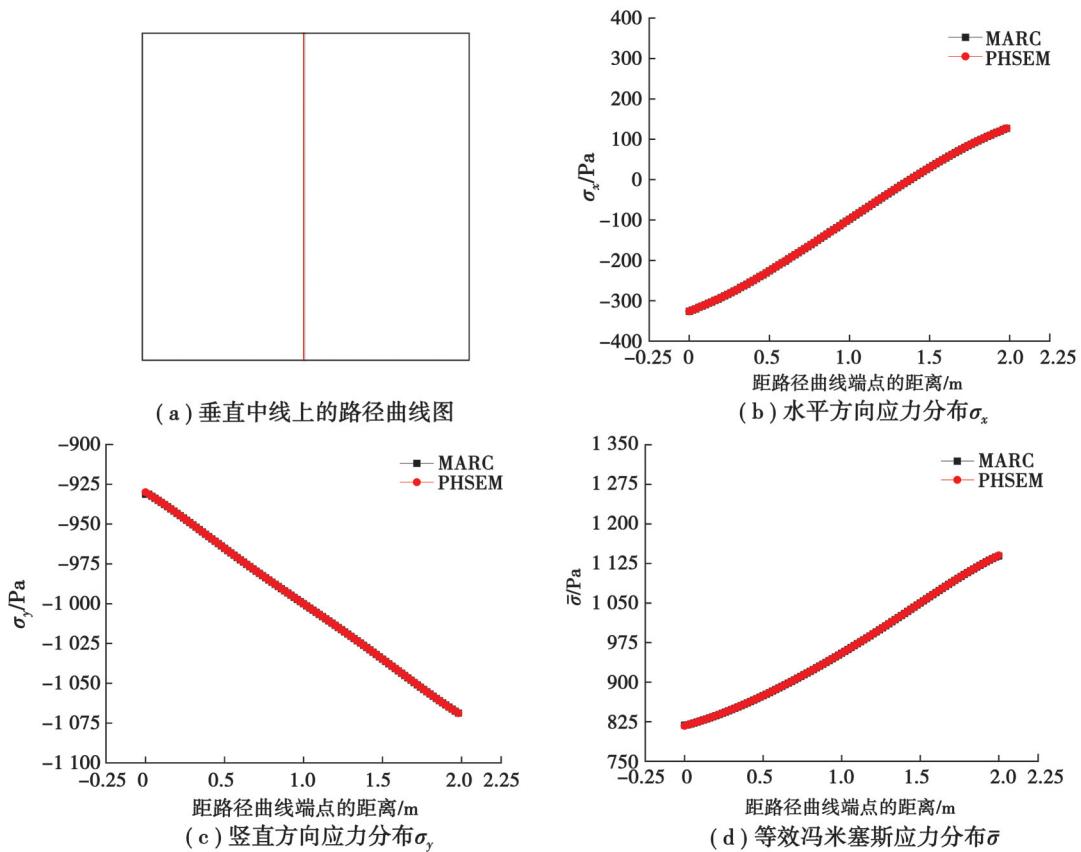


图 6 应力路径图

Fig. 6 Diagram of stress on the path

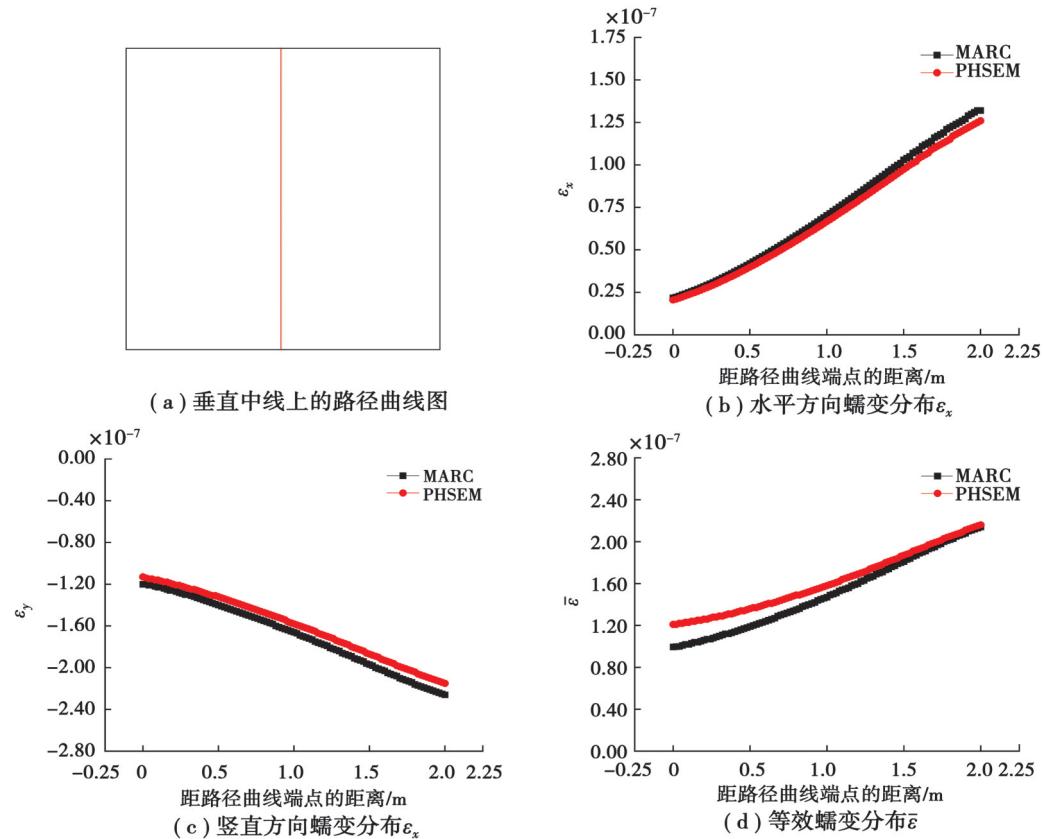


图 7 蠕变路径图

Fig. 7 Diagram of creep strain on the path

3.2 数值算例二

模型结构如图8所示,地基为长70 m、宽20 m的长方形,路堤为上底18 m、下底26 m、高6 m的梯形。为了方便对比分析,PHSEM模型和MARC模型所受边界条件和载荷完全相同,地基底部采用完全固定的约束,限制地基顶部的水平位移,对路堤施加竖直向下400 kN的载荷。PHSEM模型采用7个节点,2个任意多边形杂交应力单元,250项的应力函数多项式(21阶的Airy应力函数),网格划分如图9(a)所示;MARC模型采用1 653个节点,1 556个平面应变全积分四边形单元,网格划分如图9(b)所示。

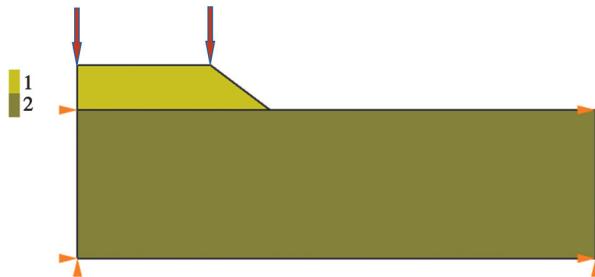


图8 模型结构工况图

Fig. 8 Model structural conditions

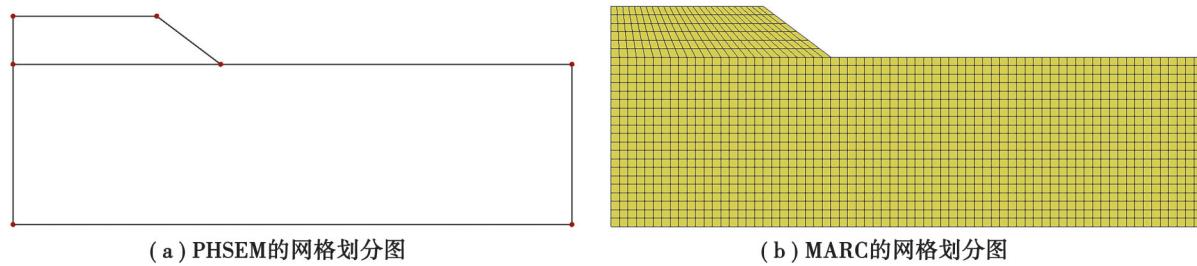


图9 模型网格划分图

Fig. 9 Model meshing diagrams

模型所用材料为杂填土和暗绿草黄色粉质黏土^[27],其力学参数如表3所示。计算模型考虑在施加载荷下产生的蠕变,采用的蠕变参数如表4所示^[27],模拟路基1 000 h的蠕变过程。

表3 各土层力学参数表

Table 3 Mechanical parameters of each soil layer

土壤种类	弹性模量/MPa	泊松比	重度/(kN·m ⁻³)
杂填土	15.3	0.4	19
暗绿草黄色粉质黏土	30.8	0.35	19.8

表4 各土层蠕变参数表

Table 4 Creep parameters of each soil layer

土壤种类	A	m	n	p	q
杂填土	4.56×10^{-13}	0	1.2	0	0.1
暗绿草黄色粉质黏土	5.71×10^{-13}	0	1.3	0	0.1

注:蠕变参数拟合时, σ 为等效应力, Pa; T 为温度, °C; t 为时间, h。

同样为了验证任意多边形杂交应力单元的有效性,建立结构相同和边界条件一致的PHSEM模型和MARC模型。图10显示了PHSEM模型和MARC模型考虑蠕变时的水平方向应力云图 σ_x ,竖直方向应力云图 σ_y 和等效冯米塞斯应力云图 $\bar{\sigma}$ 。图11显示了PHSEM模型和MARC模型考虑蠕变时的水平方向蠕变应变

云图 ε_x , 坚直方向蠕变应变云图 ε_y 和等效蠕变应变云图 $\bar{\varepsilon}$ 。由应力云图和蠕变应变云图可以看出, PHSEM 模型的应力和蠕变应变分布与 MARC 模型得到的结果吻合, 即计算结果与理论吻合, 验证了 PHSEM 模型考虑蠕变的有效性。

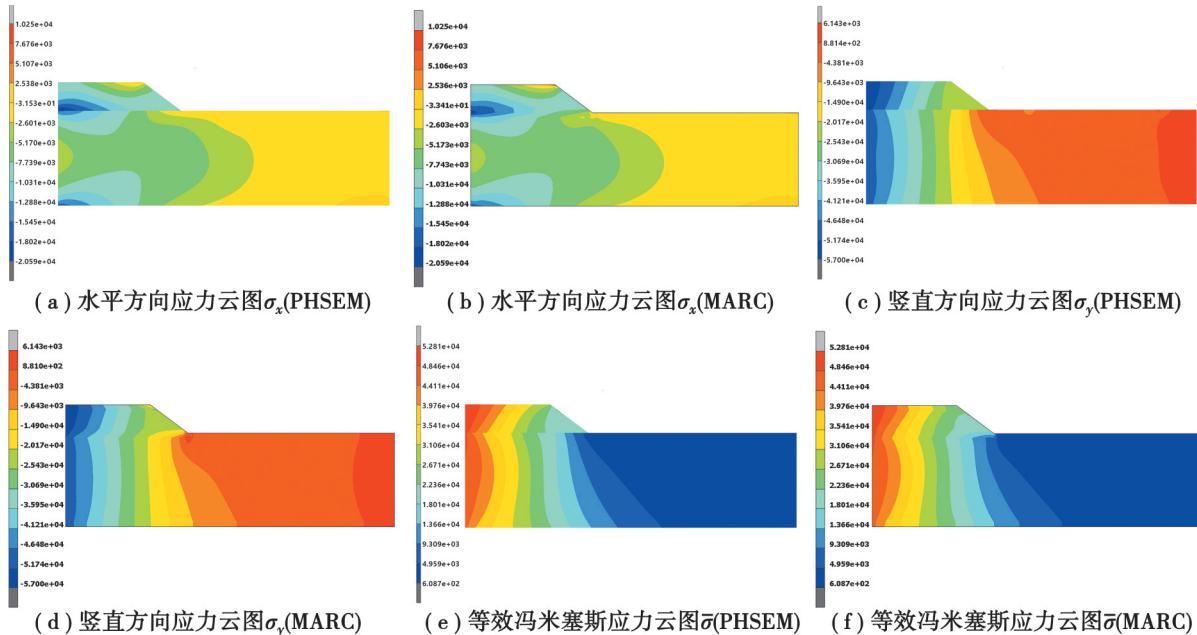


图 10 应力云图

Fig. 10 Contours of stress

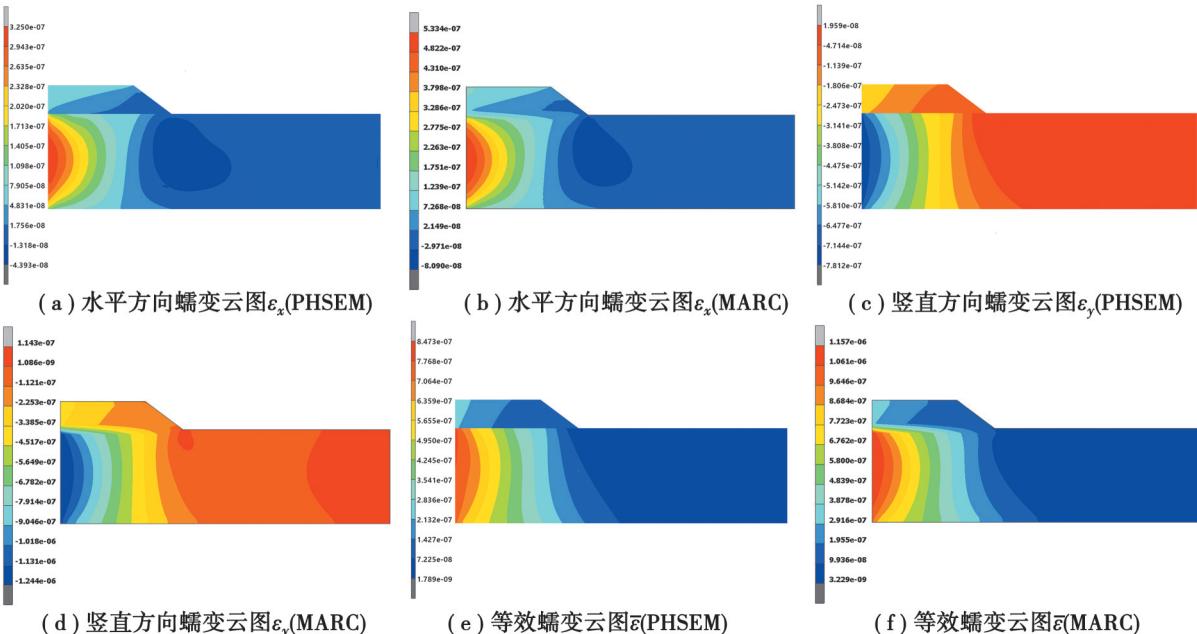


图 11 蠕变云图

Fig. 11 Contours of creep strain

从图 10 可以注意到, 2 个模型的水平应力分布图是相似的, 并且在路基的棱角和边界处可观察到明显的应力集中情况, 说明 PHSEM 采用的高阶应力场能准确捕捉到应力集中现象, 虽然 MARC 也得到了明显的应力集中情况, 但是在地基和路堤接触的地方应力等值线不够光滑, 应力界限不规则。任意多边形杂交应力单元获得高阶应力场以及应力集中现象的优势由此可以看出。2 个模型的坚直应力分布图和等效冯米塞斯应

力分布图都是基本一致的,同时可以看出材料分层对应力的分布趋势有一定影响,PHSEM 模型和 MARC 模型在地基和路堤接触的地方应力分布比较吻合。图 11 显示了蠕变应变云图,可以注意到 2 个模型的蠕变应变云图基本一致。PHSEM 模型得到的整体应力分布和蠕变应变分布明确并符合客观规律。

通过上述 2 个算例的验证可以看出,任意多边形杂交应力单元(PHSEM)采用 250 项的应力函数完备多项式(21 阶的 Airy 应力函数),使用较少单元就可以模拟出较为准确的结果;普通位移有限元采用的为低阶单元,若使用少量单元则捕捉不住应力集中的现象,要想达到同样的计算精度,需要划分细密的网格来实现,从网格划分图中可以明显看出在 MARC 模型中的单元数量要远远多余 PHSEM 模型中的单元数量。

4 结 论

在 PHSEM 的基础上,提出一种考虑蠕变的任意多边形杂交应力单元,通过泥板试件模型和 2 种材料的路基模型对该单元进行了验证,将计算结果与商用软件 MARC 的计算结果进行比较,验证了任意多边形杂交应力单元的有效性和高效性。得出以下结论:

1)PHSEM 采用的是高阶应力场,单元数量较少,计算精度更高。在大规模工程计算中的优势将是显而易见的。

2)PHSEM 单元的边数是任意的,模拟复杂结构和多种材料时只需要几个甚至一个单元,普通的位移有限元在复杂结构处需划分细密的网格。

3)考虑蠕变的任意多边形杂交应力单元在分析路基蠕变问题时,能够准确反应应力场和应变场,在边界和材料界面能够捕捉到应力集中的现象。

任意多边形杂交应力单元法在处理复杂结构的模型时更方便快捷,弥补了目前传统有限元方法在路基沉降工程应用中的一些不足,为实际工程问题的数值模拟提供了一种可参考的便利高效新单元。

参 考 文 献

- [1] Lin Q Q, Zhang Y H, Yang C J, et al. Evaluation of differential settlement of subgrade for highway-widening projects[J]. Sustainability, 2023, 15(4): 2950.
- [2] Liu D W, Zhang W M, Tang Y, et al. Evolving support vector regression based on improved grey wolf optimization for predicting settlement during construction of high-filled roadbed[J]. Transportation Geotechnics, 2024, 45: 101233.
- [3] Yao Y P, Fang Y F. Negative creep of soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2020, 57(1): 1-16.
- [4] Wang S M, Zhan Q H, Wang L, et al. Unsaturated creep behaviors and creep model of slip-surface soil of a landslide in Three Gorges Reservoir Area, China[J]. Bulletin of Engineering Geology and the Environment, 2021, 80(7): 5423-5435.
- [5] 冷伍明, 邓志龙, 徐方, 等. 基于路基土蠕变效应的路基预应力损失模型研究[J]. 岩土力学, 2022, 43(6): 1671-1682.
- [6] Leng W M, Deng Z L, Xu F, et al. A prestress loss model for subgrade considering creep effect of subgrade soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 2022, 43(6): 1671-1682. (in Chinese)
- [7] Biot M A. Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid[J]. Journal of Applied Physics, 1956, 27(5): 459-467.
- [8] Mitchell J K, Soga K. Fundamentals of soil behavior[M]. 3rd ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2005.
- [9] Terzaghi K. Theoretical Soil Mechanics[M]. New York: Wiley, 1943.
- [10] Bjerrum L. Engineering geology of Norwegian normally-consolidated marine clays as related to settlements of buildings[J]. Géotechnique, 1967, 17(2): 83-118.
- [11] Cabalar A F, Hasan R A. Compressional behaviour of various size/shape sand-clay mixtures with different pore fluids[J]. Engineering Geology, 2013, 164: 36-49.
- [12] Yin J H, Feng W Q. A new simplified method and its verification for calculation of consolidation settlement of a clayey soil with creep[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2017, 54(3): 333-347.
- [13] Pian T H H. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions[J]. AIAA Journal, 1964, 2(7): 1333-1336.
- [14] Ghosh S, Mallett R L. Voronoi cell finite elements[J]. Computers & Structures, 1994, 50(1): 33-46.
- [15] Zhang J, Katsube N. A hybrid finite element method for heterogeneous materials with randomly dispersed elastic inclusions[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1995, 19(1/2): 45-55.

- [15] Zhang J, Katsebe N. A hybrid finite element method for heterogeneous materials with randomly dispersed rigid inclusions[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, 38(10): 1635-1653.
- [16] Fu X R, Cen S, Li C F, et al. Analytical trial function method for development of new 8-node plane element based on the variational principle containing Airy stress function[J]. Engineering Computations, 2010, 27(4): 442-463.
- [17] Cen S, Fu X R, Zhou G H, et al. Shape-free finite element method: the plane hybrid stress-function (HS-F) element method for anisotropic materials[J]. Science China Physics, Mechanics and Astronomy, 2011, 54(4): 653-665.
- [18] Cen S, Fu X R, Zhou M J. 8- and 12-node plane hybrid stress-function elements immune to severely distorted mesh containing elements with concave shapes[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(29/30/31/32): 2321-2336.
- [19] Cen S, Zhou M J, Fu X R. A 4-node hybrid stress-function (HS-F) plane element with drilling degrees of freedom less sensitive to severe mesh distortions[J]. Computers & Structures, 2011, 89(5/6): 517-528.
- [20] Zhou P L, Cen S. A novel shape-free plane quadratic polygonal hybrid stress-function element[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015: 491325.
- [21] 杨锋, 郭然. 多边形应力杂交单元的接触算法研究[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(10): 1059-1070.
Yang F, Guo R. Study on contact algorithms for the polygonal hybrid stress element method[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2019, 40(10): 1059-1070. (in Chinese)
- [22] Tong P, Pian T H H. A variational principle and the convergence of a finite-element method based on assumed stress distribution[J]. International Journal of Solids and Structures, 1969, 5(5): 463-472.
- [23] Pian T H H, Tong P. Basis of finite element methods for solid continua[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1969, 1(1): 3-28.
- [24] Pian T H H. Nonlinear creep analysis by assumed stress finite element methods[J]. AIAA Journal, 1974, 12(12): 1756-1758.
- [25] Atluri S. On the hybrid stress finite element model for incremental analysis of large deflection problems[J]. International Journal of Solids and Structures, 1973, 9(10): 1177-1191.
- [26] 李方政, 楼根达, 余志松, 等. 基于蠕变效应的穿越隧道冻结帷幕开挖与支持三维数值模拟[J]. 岩土力学, 2005, 26(S1): 121-132.
Li F Z, Lou G D, Yu Z S, et al. 3D creep numerical simulation of excavation and support in frozen soil curatin wall of crossing tunnel[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(S1): 121-132. (in Chinese)
- [27] 郭海柱, 张庆贺, 郭健. 时间硬化与Druker-Prager耦合蠕变模型的应用研究[J]. 结构工程师, 2008, 24(3): 117-121.
Guo H Z, Zhang Q H, Guo J. Application study on time hardening and druker-prager yield criterion coupled creep model of soil[J]. Structural Engineers, 2008, 24(3): 117-121. (in Chinese)

(编辑 郑洁)