正交配置法及其在换热器动态特性计算中的应用

ORTHOGONAL COLLOCATION METHOD AND IT APPLICAIONS IN THE CALCULATION OF DYNAMIC CHARACTERISTICS OF HEAT EXCHANGER

岳　洪　　郑体宽

Yue Hong　Zheng Tikuan

（热力工程系）

摘　要　正交配置法是一种加权余量法，利用它可以方便地将偏微分方程组的初边值问题化为常微分方程组的初值问题。本文详细地介绍正交配置方法，并利用该方法研究了一个汽——水加热器分布参数模型的动态特性。

关键词　加权余量法；正交配置法；汽——水加热器；动态特性；分布参数模型

ABSTRACT　Being a kind of MWR, the orthogonal colloacation method can be conveniently used to reduce the initial-boundary value problems of the partial differential equations to initial value problems of ordinary differential equations. In this paper, the orthogonal collocation method is introduced in detail and by using it the dynamic characteristics of a steam-water heater are investigated.

KEY WORDS　Method of weighted residuals(MWR), orthogonal collocation method, steam-water heater; dynamic characteristics, distributed parameter model.

一、引　言

用机理方法研究换热器的动态特性常常需要求解一组非线性的偏微分方程组，由于其分析解只有在特殊情况下才能获得，因此需要寻求一些近似方法来将分布参数系统化为集中参数系统。通常使用的差分方法虽然简单易行，但其精度是比较低的。文献〔3〕指出在将换热器分布参数动态模型化为集中参数模型时，大约要取五十个差分点才能使其达到比较满意的结果。这样高的维数，即使模型已转化为集中参数模型，其应用上也是比较困难的。当然也可

本文于1988年2月6日收到。

以对所得的集中参数模型进行降阶，但是对非线性系统的降阶还很不成熟。因此，无论从理论上还是从工程实际上讲，都需要寻求一种能有效地将分布参数系统（按控制理论，它的维数无穷大）近似转化为维数不高的集中参数系统的方法。

加权余量法[1]是一种求解微分方程的近似方法。利用它可以方便地解微分方程（组）的边值问题或将偏微分方程（组）的初边值问题化为常微分方程组的初值问题。在换热器动态特性计算时，应用加权余量法所获得的集中参数模型仅需 4 ～ 5 阶便可达到差分法时的50阶的精度[3]。加权余量法首先假设一个试函数作为方程的近似解，将试函数代入方程便形成余量函数；然后，为了使余量在一定域内的平均意义下达到最小，使其与一组权函数在整个域内正交，从而可决定试函数中的待定系数或待定函数。试函数是由一组带有待定系数或待定函数的试函数项所组成的。因此，加权余量法的表达式为

$$\int_{v} W \cdot R dv = 0 \tag{1}$$

式中W为权函数，R为余量函数。

权余法中，试函数及权函数的选取是十分重要的。试函数必须是完备的（Complet），因为只有这样才能保证利用它可以任意逼近一给定的连续函数。根据权函数的选取可以将权余法分为几种。如权函数取为试函数项，则有伽辽金（Galerkin）方法；如权函数为δ函数则为配置方法；此外还有最小二乘法、子域方法、矩量方法等[4]。伽辽金方法由于使试函数与每一试函数项成正交，故利用它获得的解是由N个函数组成的空间中的最优解。然而，伽辽金方法必须计算大量的积分，故其应用时比较困难。配置方法由于不需要计算积分，故其应用非常简单，而且它可以用于非线性问题。近年来发展的正交配置方法，其精度可以同伽辽金方法相当。

二、正交配置法

若权函数取δ函数，式（1）为

$$\int_{V} \delta(x - x_j) R dv = R_j = 0 \tag{2}$$

因此，配置法完全避免了积分的计算。

根据试函数满足方程或边界条件的情况，配置方法可分为内部配置法、边界配置法和混合配置法。内部配置法就是所假设的试函数精确地满足边界条件但不满足方程，边界配置法则是试函数精确地满足方程但不满足边界条件；混合法则是试函数既不满足方程又不满足边界条件。

下面我们仅讨论内部方法，它通常用于边界条件比较简单时。但其基本思想同样可用于边界方法。

若某微分方程（组）具有在 0，1 两点的边界条件，则其试函数的表达式可写为

$$y(x) = b + cx + x(1 - x) \sum_{i=1}^{N} a_i P_{i-1}(x) \tag{3}$$

将其代入微分方程得余量。令余量在各配置点处为零便可求出试函数中的待定系数或待定函

数a_i。

然而，若我们直接以配置点处的解而不是待定系数或函数a_i来求解，则显得更为方便。(3)式总可以写为

$$y(x)=\sum_{i=1}^{N+2} g_i x^{i-1} \tag{4}$$

在其配置点处的值以及一、二阶导数为

$$\left.\begin{aligned} y(x_j) &= \sum_{i=1}^{N+2} x_j^{i-1} g_i \\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{xj} &= \sum_{i=1}^{N-2} \left.\frac{dx^{i-1}}{dx}\right|_{xj} g_i \\ \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{xj} &= \sum_{i=1}^{N+2} \left.\frac{d^2x^{i-1}}{dx^2}\right|_{xj} g^i \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

用矩阵来记，则有

$$\overline{y}=\overline{\overline{Q}}\,\overline{g}, \quad \overline{\frac{dx}{dx}}=\overline{\overline{C}}\,\overline{g}, \quad \overline{\frac{d^2y}{dx^2}}=\overline{\overline{D}}\,\overline{g}$$

$$Q_{ji}=x_j^{i-1}, \quad C_{ji}=(i-1)x_j^{i-2}, \quad D_{ji}=(i-1)(i-2)x_j^{i-3} \tag{6}$$

将$\overline{g}$解出，则有

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{y}}{dx} &= \overline{\overline{C}}\,\overline{\overline{Q}}^{-1}\overline{y}=\overline{\overline{A}}\,\overline{y} \\ \frac{d^2\overline{y}}{dx^2} &= \overline{\overline{D}}\,\overline{\overline{Q}}^{-1}\overline{y}=\overline{\overline{B}}\,\overline{y} \end{aligned} \tag{7}$$

若方程还含有积分项，则可利用矩形积分公式

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N+2} W_j f(x_j)$$

为决定W_i，将$f_i=x^{i-1}$代人

$$\int_0^1 x^{i-1}dx=\sum_{j=1}^{N+2} W_j x_j^{i-1}=f_i=i^{-1}$$

$$\overline{W}\,\overline{\overline{Q}}=\overline{f} \quad \Rightarrow \quad \overline{W}=\overline{f}\,\overline{\overline{Q}}^{-1}$$

因此，配置方法的计算机程序为

（1） 读人N以及N个配置点$X(J)$；

（2）　用（6）、（8）两式计算矩阵Q、C、D和F；

（3）　对Q求逆；

（4）　用（7）、（8）两式计算矩阵A、B、W；

（5）　代入方程求解；

（6）　输出结果。

显然，配置法中一旦配置点确定，其它步骤均已确定，这便决定了求解的精度。究竟应选哪些点作为配置点？一个自然的想法是均等配置，即用区间的等分点为配置点。文献[8]提出用 TschebySheff 多项式的根作配置点。文献[1]提出用Legendre 多项式的根作配置点。因为这些多项式均为正交多项式，故它们称为正交配置法。一般来讲，正交配置法要比均等配置精确一些。

三、在换热器动态特性计算中的应用

换热器动态特性数学模型表现为一组分布参数的非线性模型。正交配置法在用于将其分布参数模型化为集中参数模型时是很有效的。下面的例子是20万千瓦汽轮机回热系统的一个加热器，它的模型中除了具有非线性项外，还有积分项，用一般的权余法及 Galerkin 方法来处理均较为困难，本文用正交配置法则较为方便。

研究加热器的文献一般都把蒸汽侧视为恒温热源，从而研究水侧的动态特性（如文献[7]）。然而，很多实际过程中蒸汽侧温度并非恒定，它同水侧是相互影响的。考虑蒸汽侧的动态变化，将使其更为复杂。

1. 简化假设

① 蒸汽侧为单一集中参数，即均处于凝结温度下。

② 管内工质参数仅沿长度变化，认为在横截面上均匀混合。

③ 加热器外壳仅有20%的金属参与动态过程，并取外壳金属温度等于饱和蒸汽温度。

④ 加热器内凝结水水位一定。

⑤ 管内工质的对流换热系数仅随流量的变化而变化，蒸汽侧的凝结放热系数视为常数，并取其为静态时的值。

⑥ 加热器对环境绝热。

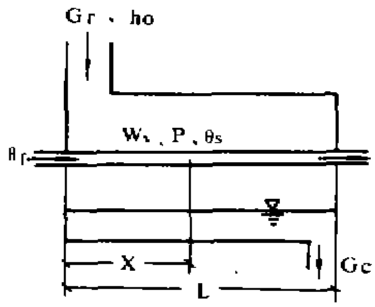

图1　加热器

2. 数学模型

蒸汽侧能量方程式

$$\frac{d}{dt}\left(h\ W_{1}+h'W_{C}+C_{m}W_{m}\theta_{S}\right)$$

$$=h_{0}G_{1}-h'G_{C}-\alpha_{Vm}U_{0}\int_{0}^{L}(\theta_{S}-\theta_{m})dx \qquad (9)$$

蒸汽侧质量守恒方程式为

$$\frac{d(W_V)}{dt}=G_V-G_f \tag{10}$$

$$\frac{d(W_C)}{dt}=G_f-G_C \tag{11}$$

$$W_V v''+W_C v'=V=Const \tag{12}$$

$$W_C v'=V_C=Const \tag{13}$$

其中G_V为蒸汽流入量、G_C为凝结水流量、W_C为加热器内凝结水蓄量、W_V为蒸汽蓄量、h_0为蒸汽进入加热器的焓、h''为饱和蒸汽焓、h'为饱和水焓、θ_S为饱和蒸汽温度。θ_m为金属管束温度、C_m为管壳金属比热、W_m为外壳金属参与动态过程的部分的质量、α_{Vm}为蒸汽管束的凝结换热系数、U_0为单位长度蒸汽对管束的传热面积、G_f为蒸汽凝结量、v''为饱和蒸汽比容、v'为饱和水比容。

对于金属管束，有能量方程式

$$C_{Pm}\rho_m A_a\frac{\partial\theta_m}{\partial t}=\alpha_{Vm}U_0(\theta_S-\theta_m)-\alpha_{mf}U_i(\theta_m-\theta_f) \tag{14}$$

其中　$A_a=\frac{1}{4}\pi(D_0^2-D_i^2)$。$C_{pm}$为管束金属比热、$\rho_m$为金属密度、$\alpha_{mf}$为金属管束对水的对流放热系数，$U_i$为单位管长对水的传热面积，$\theta_f$为管内工质温度。

对管内工质，有能量方程

$$\frac{\partial\theta_f}{\partial t}+w_f\frac{\partial\theta_f}{\partial x}=\frac{\alpha_{mf}U_i}{\rho_f C_{pf}A_f}(\theta_m-\theta_f) \tag{15}$$

其中w_f为工质流速，ρ_f为工质密度、A_f为工质流通面积。

由假定，有

$$\alpha_{mf}=\alpha_{mf0}\cdot\left(\frac{w_f}{w_{f0}}\right)^{0.8} \tag{16}$$

其中下标“0”表示静态情况。

3. 利用正交配置法化为集中参数模型

将上述模型整理成增量形式，则为

$$\frac{\partial\Delta\theta_f}{\partial t}+w_f\cdot K_1\cdot\frac{\partial\Delta\theta_f}{\partial z}=K_2\cdot\left(\frac{w_f}{w_{f0}}\right)^{0.8}(\Delta\theta_m-\Delta\theta_f)$$
$$+K_3\cdot\left[\left(\frac{w_f}{w_{f0}}\right)^{0.8}-\left(\frac{w_f}{w_{f0}}\right)\right] \tag{17}$$

$$\frac{\partial\Delta\theta_m}{\partial t}=K_4\cdot\left(\frac{w_f}{w_{f0}}\right)^{0.8}(\Delta\theta_f-\Delta\theta_f)+K_5\cdot(\Delta\theta_s-\Delta\theta_m)$$
$$+K_6\cdot\left[\left(\frac{w_f}{w_{f0}}\right)^{0.8}-1\right] \tag{18}$$

$$K_7\cdot\frac{\partial\Delta\theta_S}{dt}=G_V(h_0-h')-(h_0-h')_0 G_{V0}$$

$$-\alpha_{Vm}U^0L\int_0^1(\Delta\theta_S-\Delta\theta_m)d\xi \tag{19}$$

其中　$\xi=x/L\in[0,\ 1]$

$$K_1=w_f/L,\qquad K_2=\alpha_{mf0}\cdot U_i/\rho_f\cdot C_{pf}A_f$$

$$K_3=K_2\cdot(\theta_{m0}(\xi)-\theta_{f0}(\xi)),\qquad K_4=-\alpha_{f0}U_i/C_{pm}\rho_mA_a$$

$$K_5=\alpha_{Vm}U_0/C_{pm}\rho_mA_a,\qquad K_6=K_4(\theta_{m0}(\xi)-\theta_{f0}(\xi))$$

$$K_7=V_V\cdot\frac{d(\rho''h'')}{d\theta_S}+V_c\cdot\frac{d(\rho'h')}{d\theta_S}+C_mW_m$$

K_1~K_6为仅与静态值有关的常数，但K_7是一个动态量，它表示蒸汽侧的热惯性。

利用正交配置法可以将上述分布参数系统化为集总参数系统。按第二节的方法有

$$\left.\frac{d\Delta\theta_f}{dt}\right|_j=-w_f\cdot K_1\sum_{i=1}^{N}A_{ji}\Delta\theta_{fi}+K_2\left(\frac{w_f}{w_{f0}}\right)^{0.8}(\Delta\theta_m-\Delta\theta_f)_j+K_3\cdot\left[\left(\frac{w_f}{w_{f0}}\right)^{0.8}-\left(\frac{w_f}{w_{f0}}\right)\right]_j \tag{20}$$

$$\left.\frac{d\Delta\theta_m}{dt}\right|_j=-K_4\cdot\Delta\theta_{fj}+(K_4-K_5)\Delta\theta_{mj}+K_5\Delta\theta_S+K_6\cdot\left[\left(\frac{w_f}{w_{f0}}\right)^{0.8}-1\right]_j \tag{21}$$

$$\frac{d\Delta\theta_S}{dt}=\frac{1}{K_7}\Big[G_V(h_0-h')-(h_0-h')_0G_{V0}-\alpha_{Vm}U_0L\Delta\theta_S+\alpha_{Vm}U_0L\cdot\sum_{j=1}^{N}W_j\Delta\theta_{mj}\Big] \tag{22}$$

（20）～（22）中还含边界条件，即

$\Delta\theta_{f1}=\Delta\theta_{fin}^{(t)}$，　$h_0=h_0^{(t)}$　　　$G_V=G_V^{(t)}$，　$G_f=G_f^{(t)}$

将其从方程中分离出来，便可以进行求解。

4.　仿真结果

该加热器的主要数据如下：

给水流量　$G_f=169.4\ Kg/S$

抽汽量　$G_V=9.22\ Kg/S$

抽汽焓　$h_0=3135.83\ KJ/Kg$

饱和温度　$\theta_S=241.4$℃

汽侧压力　$P_S=34.32bar$

进口水温　$\theta_{fi}=215.4$℃

出口水温　$\theta_{f0}=240$℃

仿真时先按正交配置法将分布参数模型化为集中参数模型，然后为了快速仿真所得的非线性微分方程组，本文利用线性化的隐式欧拉方法[6]。试验表明当正交配置法的阶数增至4～5时，再增加配置点对仿真结果没有明显影响。

图 2 是当加热器给水流量减少时，加热器出口水温和汽侧饱和温度的动态响应。图 3 是加热器给水入口温 度上升10℃时， 加热器的动态响应。 图 4 是加热 器抽汽焓增加10％的情形，图 5 则是加热器抽汽量增加10％时的动态响应。

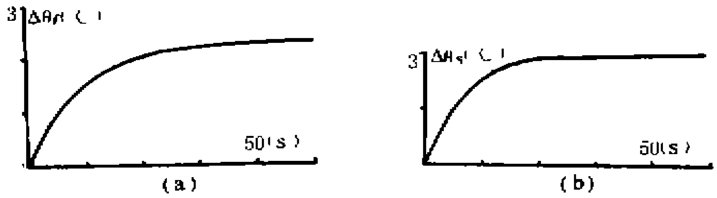

图 2　加热器给水流量减少10％时.（ a ）给水出口温度；
（ b ）加热器饱和蒸汽温度的响应。

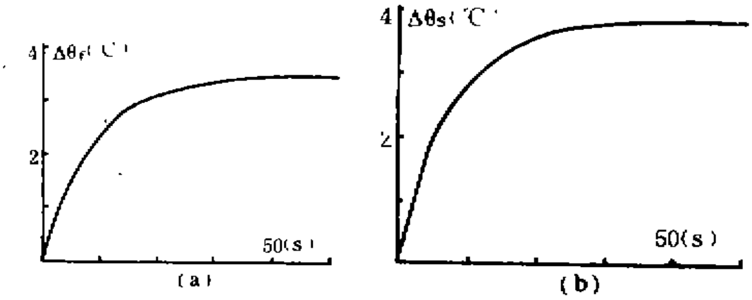

图 3　加热器给水进口温度增加10℃时，（ a ）给水出口温度；
（ b ）加热器饱和蒸汽温度的响应。

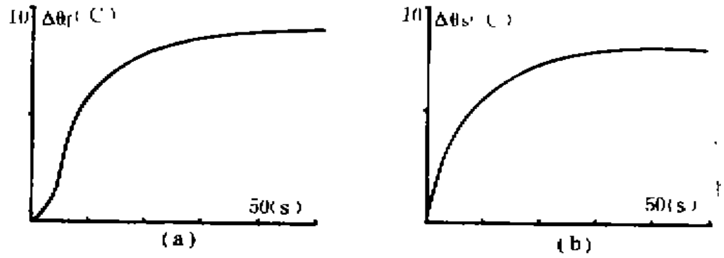

图 4　加热器抽汽焓增加10％时，（ a ）给水出口温度；
（ b ）加热器饱和蒸汽温度的响应。

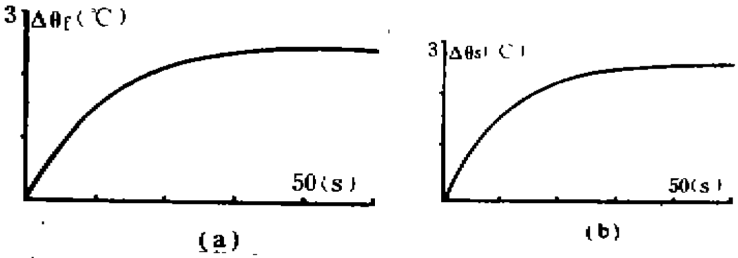

图 5　加热器抽汽量增加10％时，（ a ）给水出口温度；
（ b ）加热器饱和蒸汽温度的响应。

以上各图中，并没有画出压力的响应曲线。由于饱和压力同饱和温度是一一对应关系，二者可以很容易转换。

四、结　论

正交配置方法可以方便地将偏微分方程（组）的初边值问题，化为常微分方程组的初值问题。由于利用它时所获得的是各配置点的解，而通常的权余法所获得的是试函数中的待定系数或待定函数的值，前者要直接、方便得多。

用正交配置法研究换热器的动态特性时，配置点仅需 4～5 个便可获得较满意的精度，从而提供了一种将分布参数系统集中化的有效方法。

参 考 文 献

〔1〕 Finlayson, B, A：The Method of Weighted Residuals and Varitional Principles, Academic Press, 1972

〔2〕 Ball, D. J：Nonlinear Modelling of Counterflow Processes Using Weightd Residuals Methods, Appl Math Modelling, Vol, 3, P429-432（1979）

〔3〕 Terasaka, H, Kanoh, H, & Machbuchi, M, Approximate Dynamic Analysis of Crossflow Heat Exchanger by the Method of Weighted Residuals, Bulletin of JSME, Vol 23, No 177 P432-438 （1980）

〔4〕 徐次达：加权余量法解固体力学问题，《力学与实践》Vol 2 No 4 （1980）

〔5〕 Wysocki, M.：Application of Orthogonal Collocation to Simulation and Control of First Order Hyperbolic Systems, Mathematics and Computer simulation, Vol 25, P335-345, （1983）

〔6〕 Lausterer, G. K, Franke, J, Eitelberg, E. Modular Modelling Applied to Benson, Boiler, IFAC Modelling & Control of Elertric Power Plant, Italy, （1983）

〔7〕 Heidemann, R. A：Dynamics of Convection Heat Exchangers, The Cana. J. of Chem. Eng., Vol 49, P145-153 （1971）

〔8〕 Lanczos, C：Applied Analysis, Prentice-Hall （1956）