

全息云纹法的傅里叶解释

EXPLANATION OF FOURIER'S OPTICS ON
HOLOGRAPHIC MOIRE' METHODS

王伯初

Wang Bochu

(工程力学系)

摘要 自从D. Post提出全息云纹干涉技术后, 现已发展到各个方面, 如断裂力学、复合材料力学、生物力学的性质测试上等均有应用。然而, 对全息光栅、全息云纹技术在理论上发展存在欠缺。本文用傅里叶光学理论推导全息光栅的栅频、全息云纹的位移公式, 进一步完善了全息云纹技术的理论, 为全息云纹技术广泛应用提供了理论依据。

关键词 傅里叶光学; 全息光栅; 全息云纹法

ABSTRACT Since D. Post promoted the holographic moire' interferometric techniques, It has been developed in all kinds of aspects. It is applied in measuring mechanical parameters in the fields of fracture mechanics, composite material mechanics, biomechanics etc. However, some problems in the development of the holographic grating and holographic moire' techniques theory are still existed. This paper deducted the frequency of holographic grating and the equation of moire' method's displacement with Fourier optics, and improved the holographic moire' technologic theory. It provides a theoretic foundation for extensive applying of the holographic moire' techniques.

KEY WORDS Fourier's optics; Holographic grating; Holographic moire' methods

一、全息光栅的频率

由傅里叶光学理论可知, 全息光栅是利用二束相干光干涉获得的。如图1所示的两束相干平行光在满足相干条件下相交于空间, 就形成一稳定的光干涉系统, 即一系列明暗相间的平行平面, 与屏幕(或底片)相交时, 即形成一系列明暗相间的平行线——全息光栅

本文于1988年6月4日收到。

线。

由傅里叶光学理论可知，光在一个平面上的复振幅分布为：

$$U(x,y) = Ae^{jK(x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta)} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} Z_0}$$

$$= A_0 e^{(x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta)}$$

其中 $A_0 = Ae^{j \frac{2\pi}{\lambda} Z_0}$ 是一个常数， $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ 。

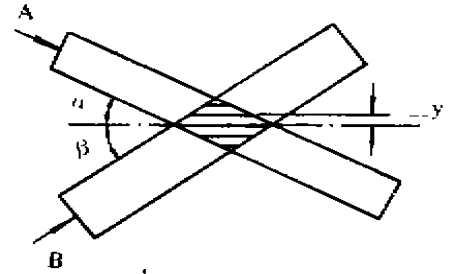


图 1

在 $Z = Z_0$ 平面上各点复振幅的差别仅在于不同的 (x, y) 处有不同的位相，而在 $Z = Z_0$ 这个平面上，我们只关心它的振幅分布。

而 α, β 角分别是入射光与 x, y 轴之间的夹角，具体见图 2、图 3 所示。

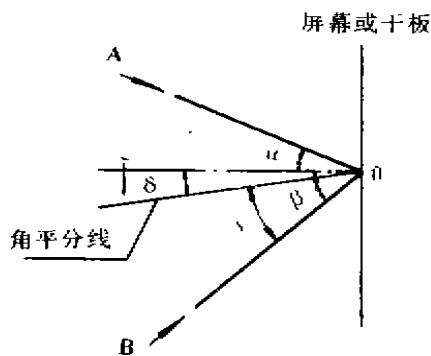


图 2

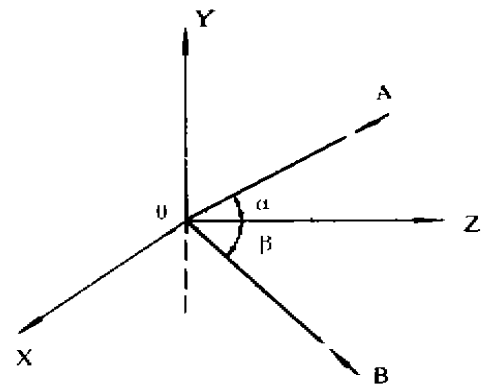


图 3

设 A, B 两束光都在 yoZ 平面内，对 A 束光的振幅分布为 U_1 ：

$$U_1(x, y) = A_1 e^{jK[x \cdot \cos 90^\circ + y \cdot \cos(90^\circ + \alpha)]} \tag{1}$$

同理， B 束光的振幅分布 U_2 为：

$$U_2(x, y) = A_2 e^{jK[x \cos 90^\circ + y \cos(90^\circ + \beta)]} \tag{2}$$

且 A, B 两束光一般都出于同一光源，则有：

$$A_1 = A_2 = A$$

化简(1)、(2)式可得：

$$\left. \begin{aligned} U_1(x, y) &= Ae^{jKysina} \\ U_2(x, y) &= Ae^{-jKysin\beta} \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

这两束光在空中相遇时的合振幅为：

$$U = U_1 + U_2 = A(e^{jKysina} + e^{-jKysin\beta}) \tag{4}$$

光强 $I = U \cdot U^*$

其中 U^* 是 U 的共扼复数。

将(4)式代入上式可得:

$$I = 2A^2 \{1 + \cos[Ky(\sin\alpha + \sin\beta)]\} \quad (5)$$

其中利用了 $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$

讨论:

$$1. \text{ 当 } \cos[Ky(\sin\alpha + \sin\beta)] = -1 \text{ 时} \quad (6)$$

则光强 $I = 0$, 即条纹为黑条纹。

化简(6)式可得:

$$y = \frac{(2n+1)\lambda}{2(\sin\alpha + \sin\beta)}$$

其中 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

$$\text{则 } \Delta y = y_1 - y_0 = \frac{\lambda}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

其中 Δy 是两条黑条纹之间的间距, 具体见图 2 所示。

$$\text{则光栅频率 } f = \frac{1}{\Delta y} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\lambda} \quad (6')$$

由图 2 可知:

$$\begin{cases} \nu + \delta = \beta \\ \nu - \delta = \alpha \end{cases} \quad (6'')$$

由式(6')和(6'')两式化简, 可得:

$$f = \frac{2\sin\nu \cos\delta}{\lambda} \quad (7)$$

$$2. \text{ 当 } \delta = 0 \text{ 时, 即 } A、B \text{ 两束光入射角相同时, 则 } f = \frac{2\sin\nu}{\lambda} \quad (7')$$

结论: 当 $\lambda = \text{const}$ 时, 可以通过改变角度 ν , 可以得到不同频率的栅线。

二、Moire' 条纹的形成

现用两块全息光栅相叠加, 说明 Moire' 条纹的形成。由傅里叶光学可知, 光栅的特性可用它的透射系数或透射率表征。为了简明起见, 先研究一维的情况。设两块光栅在 x 方向的周期为 T_1 和 T_2 或空间频率为 $f_1 = 1/T_1$ 和 $f_2 = 1/T_2$, 由傅里叶光学可知光栅透射率可写成:

$$T_1 = 1 + \cos 2\pi \frac{x}{T_1} = 1 + \cos 2\pi f_1 x = 1 + \cos 2\pi m_1 \quad (8)$$

$$T_2 = 1 + \cos 2\pi \frac{x}{T_2} = 1 + \cos 2\pi f_2 x = 1 + \cos 2\pi m_2 \quad (9)$$

式中 m_1 和 m_2 是光栅线条的序数, 并有 $m_1 = f_1 x$, $m_2 = f_2 x$ 。设有强度为 U_0 的平面光波连

续通过这两块光栅，则透射强度为：

$$U = U_0 \gamma_1 \gamma_2 = U_0 \left[1 + \cos 2\pi f_1 x + \cos 2\pi f_2 x + \frac{1}{2} \cos 2\pi (f_1 + f_2) x + \frac{1}{2} \cos 2\pi (f_1 - f_2) x \right] = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \quad (10)$$

式中第一项是平均光强度，第二三项是原来光栅的周期结构，第四项为和频率项，其空间频率为两光栅空间频率之和，条纹变密；第五项为差频率项，其空间频率为两光栅空间频率之差，条纹变疏。前者称为等频率和线（或条纹），后者称为等频率差线（或条纹）。即常称 Moire' 条纹。令：

$$\begin{cases} p = m_1 + m_2 \\ q = m_1 - m_2 \end{cases} \quad (11)$$

p 、 q 分别称为等频率和线和 Moire' 条纹的序数方程。

在图 4 中，两族实线代表两光栅的透光部分，水平的虚线是等频率差线，竖直的虚线是等频率和线，Moire' 条纹是等频率差线。在全息云纹法中，频率 f 一般在 1000~4000 线/mm，且等频率和线序数方程 $p = m_1 + m_2 = (f_1 - f_2)x$ 。当 $x = 1\text{mm}$ 时，设 $f_1 = f_2 = 1000$ 线/mm，即得 $p = 2000$ 线，即在一个单位毫米中存在有 2000 条条纹，是根本无法分辨的。所以，一般在条纹再现是不可能出现等频率和线的，只有等频率差线，即 Moire' 条纹出现。

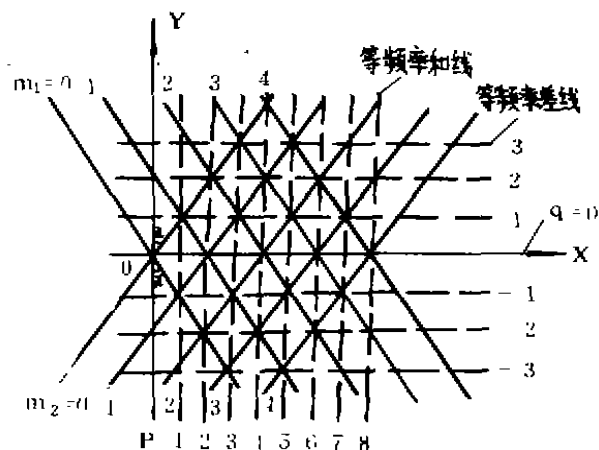


图 4

三、位移方程

由(10)式求得 Moire' 条纹的透射强度为 U_4 ，

$$U_4 = \frac{1}{2} U_0 \cos 2\pi (f_1 - f_2) x \quad (12)$$

由几何关系可得，相位差 $\varphi = Kx \sin \alpha$ ，具体见图 5 所示。其中 $K = 2\pi/\lambda$ 。所以 $\varphi_1 = f_1 \pi x$ ， $\varphi_2 = f_2 \pi x$ ，其中利用了(7)式，将上两式代入(12)式，可得：

$$U_4 = \frac{1}{2} U_0 \cos 2(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (13)$$

光强 $I_5 = U_0^* U_4$

$$I_5 = \frac{1}{4} U_0^2 \cos^2 2(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (13')$$

而全息云纹法的形成过程是，第一次曝光形成全息光栅，变形后（第一次形成的光栅随试件一起变形，作为试件栅）再进行第二次曝光。

在图 6 中，只有入射角 α_1 角、刚体转动 $d\alpha$ 和刚体位移 dz 的分布情况，而入射角 α_2 角与刚体转动，刚体位移的关系与入射角 α 的情况相同，这是在入射角方向不一样而已，所以在图 6 中未标出。

由图 5、6 的几何关系可得：

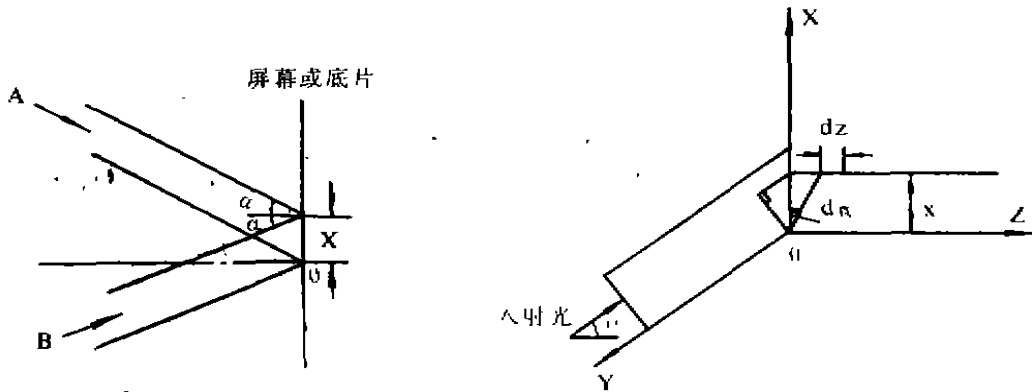


图 5

图 6

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & Kx' \sin(\alpha_1 + d\alpha) \\ & + Kdz \cos(\alpha_1 + d\alpha) \\ & - Kx' \sin(\alpha_2 + d\alpha) \\ & - Kdz \cos(\alpha_2 + d\alpha) \end{aligned} \quad (14)$$

因为位相差 φ_1 是由两束光所形成的位相差的增量。其中 $Kdz \cos(\alpha + d\alpha)$ 项是由刚体位移 dz 引起的位相差， $d\alpha$ 是刚体转动角（在 xoy 平面内）。

$$\varphi_2 = Kx \sin \alpha_1 - Kx \sin \alpha_2 \quad (15)$$

由(13)、(14)、(15)式可得：

$$\text{当 } 2(\varphi_1 - \varphi_2) = 2n_2\pi \text{ 时, } n_2 = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

$I_0 \rightarrow \max$ (最大值)

$$\begin{aligned} \text{则 } \varphi_1 - \varphi_2 = & Kx' \sin(\alpha_1 + d\alpha) + Kdz \cos(\alpha_1 + d\alpha) - Kx' \sin(\alpha_2 + d\alpha) \\ & - Kdz \cos(\alpha_2 + d\alpha) - Kx \sin \alpha_1 + Kx \sin \alpha_2 \end{aligned} \quad (17)$$

将 $K = 2\pi/\lambda$ 代入(17)式，注意到 $X - X' = v$ ，忽略高价小量可得到：

$$u = nx p_x + \frac{p_x}{\lambda} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) (x' d\alpha + dz) \quad (18)$$

同理可得：

$$v = n_y p_y + \frac{p_y}{\lambda} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) (y' d\alpha + dz) \quad (19)$$

讨论：

当 $|\alpha_1| = |\alpha_2|$ 时，即两束入射光对称时，

则得
$$\begin{cases} u = n_x p_x \\ v = n_y p_y \end{cases} \quad (20)$$

其中 p_x 是在 x 方向光栅的节距； p_y 是在 y 方向光栅的节距。

由(18)、(19)式可知，刚体位移，刚体转动对面内位移 u 、 v 均有影响，所以在做全息云纹实验时，要使试件严格的定位，否则要影响测量精度。

四、结 论

由上面分析推导可知，本文是从傅里叶光学理论出发推出了全息光栅栅频、Moire'条纹的形成及位移方程，这无疑是为全息云纹技术的推广应用提供了新的理论依据。

参 考 文 献

- [1] Post D. Development in moire' Interferometry, opt. Engin. 1982, 21(3): 458
- [2] 于美文。光学全息及信息处理，国防工业出版社，1983
- [3] 负自强。傅里叶光学讲义。重庆大学物理系，1986