不可约非周期马尔可夫链状态分类定理及其在排队过程中的应用

THE CLASSIFICATION THEOREM OF THE STATES FOR AN IRREDUCIBLE APERIODIC MARKOV CHAIN AND ITS APPLICATION ON CERTAIN QUEUEING PROCESS

李银国

Li Yinguo

（应用数学系）

摘 要 本文给出了不可约非周期Markov链常返性的一个充分条件和非常返性的一个充要条件，并将F. G. Foster[1]中的定理4和定理5作为特例。从而，使我们可以在除去P的有限行之后进行状态分类研究。最后将结果应用于排队过程的嵌入Markov链，使Bailey研究的M/G/1成批服务排队过程的状态分类问题得到解决。

关键词 Markov链；状态分类；M/G/1排队过程；成批服务

ABSTRACT A sufficient condition of the recurrence and a sufficient and necessary condition of the transience for an irreducible and aperiodic Markvo chain are given in this paper. The theorem 4 and theorem 5 proved by F. G. Foster[1] are just the particular cases of them. Finally, these results are applied to the embedded Markov chain associated with queueing process so as to resolve the problem of the state classification for M/G/1 queueing process with bulk service studied by Bailey[2].

KEY WORDS markov chain; state classification; M/G/1 queueing process; Bulk service

一、引言和有关定义

直接利用Markov链的转移概率矩阵$P=(p_{ij})$来研究它的状态分类，这是理论上和应用上经常遇到的问题。许多著作都给出了这方面的判定定理[3][4]。F. G. Foster[1]曾采用

本文于1988年1月28日收到。

状态矩阵修改（Matrix Modification）方法，导出下面两个定理：

定理1.1 不可约非周期Markov链为非常返的充分必要条件是方程组

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} y_j = y_i \qquad i \neq \alpha\text{（任一非负整数）}$$

存在一个有界非常数解$\{y_i\}$。

定理1.2 若不等式组

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} y_j \leqslant y_i \qquad i \neq \alpha$$

存在一个满足$\lim\limits_{i\to\infty} y_i=\infty$的解$\{y_i\}$，则此不可约非周期Markov链是常返的。

这两个定理的特点是：利用方程组或不等式组研究常返性或非常返性时，可以忽略P矩阵的某一行，这给实际应用提供了方便。特别地，排队过程中出现的嵌入Markov链都是不可约非周期的[3]，故许多文献在研究排队系统的限极分布时，引用了这些定理[5][6]。

但是，由于定理1.1和1.2受到至多只能除去P的某一行的限制，在一些Markov链的状态分类中难以使用。例如，N. T. J. Bailey在[2]中引入的M/G/1系统成批服务排队过程的嵌入Markov链的转移矩阵

$$P=(p_{ij})=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} s+1\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{1}$$

本文考虑在除去P的有限行之后，研究其常返性和非常返性。给出了常返性充分性定理，证明了非常返性的一个充要条件，应用已证得的定理，研究M/G/1系统成批服务排队过程的状态分类。

为便于讨论，先给出几个有关的定义：

定义1.1 称转移阵P是无耗损的，如果遍历极限阵$\pi \stackrel{\Delta}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n} p^{(v)}$仍是转移阵。反之称$P$是耗损的。

定义1.2 $E=\{0,\ 1,\ 2\cdots\cdots\}$为一Markov链的状态集，$J\subset E$为一有限集。记$\widetilde{P}_J=(\widetilde{p}_{ij})$ 其中当$i\in J$时，$\widetilde{p}_{ij}=\delta_{ij}$，当$i\in\overline{J}$时，$\widetilde{p}_{ij}=p_{ij}$。称$\widetilde{P}_J$为$P$关于$J$的修改转移阵，简记$\widetilde{P}$。

定义1.3 对于$J\subset E$，定义

$$f_{iJ}^{(n)} \stackrel{\Delta}{=} p\{X(1)\in\overline{J},\cdots\cdots X(n-1)\in\overline{J},\ X(n)\in J \mid X(0)=i\}$$

$$\widetilde{f}_{ij}^{(n)} \triangleq p\{X(1)\in\overline{J},\cdots,X(n-1)\in\overline{J},\ X(n)=j\mid X(0)=i\}$$

$$f_{i,J} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} f_{iJ}^{(n)}$$

$$\widetilde{f}_{ij} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}_{ij}^{(n)}$$

显然$f_{i,J}$为从状态 i 出发，经有限步到达状态集 J 的概率；$\widetilde{f}_{ij}$为从 i 出发，越过状态集 J 有限步到达 j 的概率。

二、常返性判定定理

引理2.1　设 $J\subset E$，则

$$f_{i,J}=1,\ i\in E \iff f_{i,J}=1 \quad i\in J$$

引理2.2　若不等式组

$$P\beta\leqslant\beta$$

有满足 $\beta\geqslant 0$，$\lim\limits_{i\to\infty}\beta_i=\infty$的解，则$P$是无耗损的。

引理2.3　设 $J\subset E$为有限集，$A=(p_{ij})$，i，$j\in\overline{J}$，　$\mathbf{e}=(1,1,\cdots\cdots)^T$，则

$$\lim_{n\to\infty} A^n\mathbf{e}=\mathbf{a} \qquad a_i=1-f_{i,J},\ i\in\overline{J}$$

引理2.1～2.3的证明参见[4]。

引理2.4　设 $J=\{0,1,2,\cdots\cdots n\}$，$\widetilde{P}$为$P$的修改转移阵，$\widetilde{\pi}$是$\widetilde{P}$的遍历极限阵，取 $\widetilde{y}=(1,\cdots\cdots 1,f_{n+1,J},\ f_{n+2,J},\ \cdots\cdots)^T$；$e_J=(1,\ 1,\ \cdots\cdots 1,\ 0\cdots\cdots)^T$，则有

$$\widetilde{\pi}e_J=\widetilde{y}$$

〔证〕：　由$\widetilde{P}$定义知$\widetilde{P}$形为

$$\widetilde{P}=\begin{bmatrix} I_{n+1} & \mathbf{0} \\ P_1 & A \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{P}e_J=\begin{bmatrix} I_{n+1} & \mathbf{0} \\ P_1 & A \end{bmatrix}\cdot\left(\mathbf{e}-\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ \vdots\end{pmatrix}\right)=\mathbf{e}-\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ A\mathbf{e}\end{bmatrix}$$

由归纳法易推知：

$$\widetilde{P}^{(n)}e_J = \mathbf{e} - \begin{bmatrix} 0 \\ A^n\mathbf{e} \end{bmatrix}$$

另一方面由引理2.3知

$$\lim_{n\to\infty} A^n\mathbf{e} = (1-f_{n+1,J},\ 1-f_{n+2,J},\ \cdots\cdots)^T$$

所以
$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{P}^{(n)}e_J = \mathbf{e} - (0,\cdots 0,1-f_{n+1,J},\ 1-f_{n+2,J},\ \cdots\cdots)^T = \widetilde{y}$$

由于$\widetilde{P}$遍历状态存在，所以$\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{P}^{(n)} = \widetilde{\pi}$，从而得证$\widetilde{\pi}e_J = \widetilde{y}$

引理2.5 设母函数$\widetilde{F}_{ij}(z) = \sum\limits_{v=1}^{\infty} \widetilde{f}_{ij}^{(v)}z^v$，$|z|<1$　$p_{ij}(z) = \sum\limits_{v=0}^{\infty} p_{ij}^{(v)}z^v$，$|z|<1$；

设$J\subset E$为有限集，方阵$P(z)=(p_{ij}(z))$，$i,j\in J$，$\widetilde{F}(z)=(\widetilde{F}_{ij}(z))$，$i$，$j\in J$，则有下面的矩阵方程成立：

$$[I-\widetilde{F}(z)]P(z) = I \qquad (2)$$

〔证〕 不妨设$J=\{0,1,2,\cdots\cdots n\}$，$\forall i$，$j\in J$

$$p_{ij}^{(k)} = p\{X(k)=j\,|X(0)=i\}$$

$$= \sum_{v=1}^{k} p\{X(1)\in\overline{J},\ \cdots\cdots X(v-1)\in\overline{J},X(v)\in J,X(k)=j|\,X(0)=i\}$$

$$= \sum_{v=1}^{k}\sum_{l=0}^{n} p\{X(1)\in\overline{J},\cdots\cdots X(v-1)\in\overline{J},\ X(v)=l\ ,X(k)$$
$$=j\,|X(0)=i\}$$

$$= \sum_{v=1}^{k}\sum_{l=0}^{n} p\{X(1)\in\overline{J},\cdots\cdots X(v-1,)\in\overline{J},\ X(v)=l\,|X(0)=i\}.$$

$$P\{X(k)=j\,|X(0)=i,\ X(1)\in\overline{J},\ \cdots\cdots X(v-1)\in\overline{J},\ X(v)=l\}$$

$$= \sum_{v=1}^{k}\sum_{l=0}^{n} p\{X(1)\ \overline{J},\ \cdots\cdots X(v-1)\in\overline{J},\ X(v)=l\,|\,X(0)=i\}.$$

$$p\{X(k)=j\,|X(v)=l\}$$

$$= \sum_{v=1}^{k}\sum_{l=0}^{n} \widetilde{f}_{il}^{(v)}\cdot p_{lj}^{(k-v)} \qquad (3)$$

上面推导中用到Markov性。根据$p_{ij}(z)$和$\widetilde{F}_{ij}(z)$定义不难推知：

$$p_{ij}(z)=\delta_{ij}+\sum_{l=0}^{n}\widetilde{F}_{il}(z)p_{lj}(z) \tag{4}$$

即 $$P(z)=I+\widetilde{F}(z)P(z)$$

引理得证。

引理2.6　设 P 为Markov链的转移阵，$J\subset E$ 为非空有限集，若

$1°$　$f_{ii}=1$，　$i\in J$

$2°$　存在 $\alpha\in J$，使得 $\widetilde{f}_{i\alpha}>0$，　$i\in J-\{\alpha\}$，则状态 α 为常返状态。

〔证〕　若 $J=\{\alpha\}$ 为单点集，由 $1°$ $f_{\alpha\alpha}=1$ 推知 α 为常返状态。下设 J 不为单点集。由引理2.5知，$(I-\widetilde{F}(z))P(z)=I$。下面考察 $(I-\widetilde{F}(z))$ 的可逆性，为方便计，不妨设 $J=\{0,1,2,\cdots\cdots n\}$。

（一）　$(I-\widetilde{F}(1))$ 的可逆性：

$\widetilde{F}(1)=\lim\limits_{z\to 1-0}\widetilde{F}(z)=(\widetilde{f}_{ij}),i,j\in J$。$\widetilde{F}(1)$ 的任一行元素之和

$$\sum_{j=0}^{n}\widetilde{f}_{ij}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{v=1}^{\infty}\widetilde{f}_{ij}^{(v)}=\sum_{v=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\widetilde{f}_{ij}^{(v)}=\sum_{v=1}^{\infty}f_{ii}^{(v)}=f_{ii}=1 \tag{5}$$

$$|I-\widetilde{F}(1)|=\begin{vmatrix}1-\widetilde{f}_{00}, & -\widetilde{f}_{01}\cdots\cdots & -\widetilde{f}_{0n}\\ -\widetilde{f}_{10} & 1-\widetilde{f}_{11},\cdots\cdots & -\widetilde{f}_{1n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ -\widetilde{f}_{n0} & -\widetilde{f}_{n1}\cdots\cdots & 1-\widetilde{f}_{nn}\end{vmatrix}$$

将此行列式各列加到1列，并注意到(5)式得知 $|I-\widetilde{F}(1)|=0$

（二）　当 $0<z<1$ 时 $(I-\widetilde{F}(z))$ 的可逆性：

任给 $i\in J$，由 $\sum\limits_{j=0}^{n}\widetilde{f}_{ij}=1$ 知至少有一 j^* 使得 $\widetilde{f}_{ij^*}>0$，从而 $f_{ij^*}^{(v)}$ $(v=1,2,\cdots\cdots)$ 不全为零，所以

$$\widetilde{F}_{ij^*}(z)=\sum_{v=1}^{\infty}\widetilde{f}_{ij^*}^{(v)}z^v<\sum_{v=1}^{\infty}\widetilde{f}_{ij^*}^{(v)}=\widetilde{f}_{ij^*}$$

所以，$$\sum_{j=0}^{n}\widetilde{F}_{ij}(z)<\sum_{j=0}^{n}\widetilde{f}_{ij}=1$$

即矩阵 $\widetilde{F}(z)$ 各行元素之和小于1。由圆盘定理（Gerschgorin定理）$\widetilde{F}(z)$ 的任一特征值 λ 都

满足 $|\lambda-\widetilde{F}_{ii}(z)|\leqslant R_i=\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\widetilde{F}_{ij}(z)\quad i\in J$ 由此可推知$|\lambda|<1$，即当$0<z<1$时，

$\lambda=1$不是$\widetilde{F}(z)$的特征值，$|I-\widetilde{F}(z)|\neq 0$，$(I-\widetilde{F}(z))$可逆。

（三） $z\to 1^{-0}$时$(I-\widetilde{F}(z))^{-1}$的情况：

由（二）知

$$(I-\widetilde{F}(z))^{-1}=\frac{(I-\widetilde{F}(z))^{*}}{|I-\widetilde{F}(z)|}\qquad 0<z<1\qquad (6)$$

其中$(I-\widetilde{F}(z))^{*}$为$(I-\widetilde{F}(z))$的伴随矩阵。设$A_{ii}(z)$为$\widetilde{F}(z)$主对角线上的余子式，则$(I-\widetilde{F}(z))^{*}$主对角线元素为$|I-A_{ii}(z)|$，由条件2°知$\widetilde{f}_{i,a}>0\quad i\in J-\{a\}$，不妨设$a=0$，则

$$A_{00}(z)=\begin{vmatrix}\widetilde{F}_{11}(z), & \widetilde{F}_{1,2}(z) & \cdots\cdots & \widetilde{F}_{1,n}(z)\\ \widetilde{F}_{21}(z), & \widetilde{F}_{22}(z) & \cdots\cdots & \widetilde{F}_{2,n}(z)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \widetilde{F}_{n,1}(z), & \widetilde{F}_{n,2}(z), & \cdots\cdots & \widetilde{F}_{nn}(z)\end{vmatrix}$$

不难证明$A_{00}(z)$各行之和$\sum_{j=1}^{n}\widetilde{F}_{ij}(z)<1\ (0\leqslant z\leqslant 1)$由圆盘定理知$|I-A_{0,0}(z)|\neq 0$。再由（2）式和（6）式得

$$p_{00}(z)=\frac{|I-A_{00}(z)|}{|I-\widetilde{F}(z)|}\qquad 0\leqslant z<1$$

结合（一）的结果可推知$p_{00}(1)=\lim\limits_{z\to 1-0}p_{00}(z)=\infty$到此证明了$i=0$为常返状态。证毕。

定理2.1 不可约非周期Markov链为常返的充分条件是存在非空有限集$J\subset E$，使得

1° 不等式组

$$\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}y_j\leqslant y_i\qquad i\in\overline{J}$$

有满足$\lim\limits_{i\to\infty}y_i=\infty$的解$\{y_i\}$

2° 存在$a\in J$，使得$\widetilde{f}_{i,a}>0$，$i\in J-\{a\}$

〔证〕 不失一般性，设$J=\{0,1,\cdots\cdots n\}$，$\widetilde{P}$是P的修改转移阵，由$\widetilde{P}$的结构和条件1°知$\widetilde{P}y\leqslant y$有$y_i\to\infty$的解。根据引理2.2知$\widetilde{P}$为无耗损的。即 $\widetilde{\pi}e=e$　　（7）

若$\overline{J}$中有常返状态，则定理得证。设$\overline{J}$中均为非常返状态，则$\sum_{v=1}^{\infty}p_{ii}^{(v)}<\infty\ (i>n)$

易知$\widetilde{P}_{ii}^{(n)} \leqslant p_{ii}^{(n)}(\, i > n\,)$，从而$\sum_{1}^{\infty} \widetilde{p}_{ii}^{(v)} < \infty(\, i > n\,)$，所以$i \in \overline{J}$也是$\widetilde{P}$的非常返状态。

由$\widetilde{\pi}$的结构知$\widetilde{\pi} e_i = 0(\, i > n\,)$由(7)式

$$\mathbf{e} = \widetilde{\pi}\ \mathbf{e} = \widetilde{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} e_i = \widetilde{\pi} e_J$$

再根据引理2.4得

$$\mathbf{e} = \widetilde{\pi} e_J = \widetilde{y} = (1,\ 1,\ \cdots\cdots 1,\ f_{n+1,J},\ f_{n+2,J},\ \cdots\cdots)^T$$

从而$f_{i,J} = 1$，$(\, i \in \overline{J}\,)$再由引理2.1推知$f_{i,J} = 1(\, i \in J\,)$。利用引理2.6和条件2°知存在$\alpha \in J$为常返状态，故此不可约Markov链为常返链。证毕。

特别地，当$J = \{\alpha\}$为单点集时，定理2.1和定理1.2条件一致。即F·G·Foster[1]中的定理 5 是本文定理2.1的一个特例。

推论2.1　设$J \subset E$为一有限集，P是不可约非周期Markov链的转移阵，若

1°　不等式组$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} y_j \leqslant y_i \quad i \in \overline{J}$存在满足$\lim_{i \to \infty} y_i = \infty$的解$\{y_i\}$

2°　存在$\alpha \in J$，使得$p_{i\alpha} > 0$，$i \in J - \{\alpha\}$

则此Markov链为常返链。

〔证〕　因为$\widetilde{f}_{i\alpha} = \sum_{v=1}^{\infty} \widetilde{f}_{i\alpha}^{(v)} \geqslant \widetilde{f}_{i\alpha}^{(1)} = p_{i\alpha} > 0$，根据定理2.1，推论得证。

推论2.1 的条件2°仅要求方阵(p_{ij})，i，$j \in J$的某一列除对角线上元素外，其余均不为零。这在实际中是容易满足的。

三、非常返性判定定理

引理3.1　设$J = \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots n\} \neq \phi$，则$\widetilde{P}\widetilde{y} = \widetilde{y}$。其中$\widetilde{P}$和$\widetilde{y}$定义见二

〔证〕　$f_{i,J} = \sum_{v=1}^{\infty} f_{i,J}^{(v)} = p\{X(1) \in J \mid X(0) = i\} + \sum_{v=2}^{\infty} p\{X(1) \in \overline{J}, \cdots\cdots X(v-1) \in \overline{J},\ X(v) \in J \mid X(0) = i\}$

$$= p_{i,J} + \sum_{v=2}^{\infty} \sum_{l=n+1}^{\infty} p_{il} f_{l,J}^{(v-1)}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} p_{il} + \sum_{l=n+1}^{\infty} p_{il} f_{l,J}$$

由此不难看出方程$\widetilde{P}\widetilde{y}=\widetilde{y}$成立。

引 理3.2 $\widetilde{y}$是方程组$\widetilde{P}y=y$满足$y\geqslant 0$，$\min\limits_{i\in J} y_i=1$的最小解。

〔证〕 由引理3.1知$\widetilde{y}$是$\widetilde{P}y=y$满足上述条件的一个解。设另有一解y，即$\widetilde{P}y=y$，$y\geqslant 0$，由此推知$\widetilde{P}^{(v)}y=y$，$\frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n}\widetilde{P}^{(v)}y=y$，由法杜定理$\widetilde{\pi}\ y=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n}\widetilde{P}^{(v)}\right)$.

$y\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n}\widetilde{P}^{(v)}y=y$，又由引理2.4知，$\widetilde{\pi}e_J=\widetilde{y}$，从而

$$y\geqslant\widetilde{\pi}y\geqslant\widetilde{\pi}e_J=\widetilde{y}$$

引理得证。

引理3.3 若$f_{iJ}<1$，$i\in J\neq\phi$，则$i\in J$均为非常返状态。

〔证〕 应用Gerschgorin定理，同引理2.6〔2〕的讨论可得$|I-\widetilde{F}(1)|\neq 0$，由(2)式可得式

$$P(1)=\frac{(I-\widetilde{F}(1))^{*}}{|I-\widetilde{F}(1)|}$$

存在。任取$i\in J$，$\sum\limits_{v=1}^{\infty}p_{ii}^{(v)}=p_{ii}(1)<\infty$。故$i$为非常返状态。证毕。

引理3.4 设$J\subset E$为非空有限集，若

1° $I=\{l|f_{lJ}<1,\ l\in\overline{J}\}\neq\phi$

2° 任给$i\in J$，存在$l\in I$，使得$\widetilde{f}_{il}>0$。则$f_{iJ}<1$，$i\in J$。

〔证〕 任取$i\in J$，从i出发越过J而有限步到达$l\in I$的概率$\widetilde{f}_{il}>0$，而从l出发有限步不能到达J的概率$1-f_{lJ}>0$，故从i出发有限步不能返回J的概率$1-f_{iJ}\geqslant\widetilde{f}_{il}(1-f_{lJ})>0$即$f_{iJ}<1$。证毕。

定理3.1 不可约非周期Markov链为非常返的充分必要条件是存在非空有限集$J\subset E$满足

1° 方程组$\widetilde{P}y=y$存在$y\geqslant 0$，$\min\limits_{i\in J}y_i=1$的有界解$\{y_i\}$。

2° $\Omega=\{l\,|\,y_l<1,\ \ l\in\overline{J}\}\neq\varphi$

3° 任给$i\in J$，存在$l\in\Omega$，使得$\widetilde{f}_{il}>0$

〔证〕 充分性：不失一般性，设$J=\{0,1,\cdots\cdots m\}\neq\phi$。设$y$是满足1°，2°的解，则由引理3.2知，$\widetilde{y}\leqslant y$，且存在$l\in\overline{J}$使得$y_l<1$，所以$f_{lJ}=e_l'\widetilde{y}\leqslant e_l'y=y_l<1$，从而$I=\{l\,|\,f_{lJ}<1,\ \ l\in\overline{J}\}\supset\Omega$由于$\Omega\neq\phi$，所以$I\neq\phi$。再由3°和引理3.4知$f_{iJ}<1$，$i\in J$。根据引理3.3和不可约性知此Markov链为非常返的。

必要性：只要取 $J=\{\alpha\}$ 为单点集，由引理3.1和引理2.1以及不可约性易证明，对应的 $\widetilde{y}$ 满足条件1°～3°。证毕。

实际上，F·G·Foster导出的定理1.1便是定理3.1当 $J=\{\alpha\}$ 时的特例。为说明这一点，只需证明当 $J=\{\alpha\}$ 时，定理1.1的条件和定理3.1的条件1°、2°、3°是等价的：

（1） 若定理1.1的条件满足，即方程组

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}y_j = y_i \qquad i \neq \alpha$$

存在一个有界非常数解 $\{y_i\}$。设 $y=(y_0,y_1\cdots\cdots)^T$，不失一般性，设 $\alpha=0$，则 $\widetilde{P}\,y=y$，由于 y_i 有界，设 $-m\leqslant y_i\leqslant M$，$i\in E$，则 $0\leqslant(y_i+m)/(M+m)\leqslant 1$，令

$$z_i=\frac{y_i+m}{M+m}+\left(1-\frac{y_0+m}{M+m}\right) \qquad i\in E$$

可以验证：$0\leqslant z_i\leqslant 2$，$z_0=1$。令 $z=(z_0,z_1\cdots\cdots)^T$，则 z 满足 $\widetilde{P}\,z=z$ 的有界非常数解，故当 $i\geqslant 1$ 时 z_i 不全为1。若有某 $z_l<1$，（$l\geqslant 1$），则 z 满足定理3.1的条件1°，2°。否则，一定存在某 $z_l>1$（$l\geqslant 1$），再令 $x_i=2-z_i$，则 $0\leqslant x_i\leqslant 1$，$x_0=1$，$x_l<1$（$l\geqslant 1$）。令 $x=(x_0,\ x_1,\ \cdots\cdots)^T$，此时 x 满足条件1°，2°。另外，由Markov链的不可约性知，$f_{0l}>0$ 恒成立，此时有 $\widetilde{f}_{0\cdot l}=f_{0\cdot l}>0$，$i\in E$，即定理3.1的条件3°也满足。

（2） 若定理3.1的条件满足，由1°知方程组

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}y_j = y_i \qquad i \neq \alpha$$

存在有界解 $\{y_i\}$ 且 $y_\alpha=1$。由2°知存在某 $y_l<1$（$l\neq\alpha$），从而 $\{y_i\}$ 不是常数解。所以定理1.1的条件也满足。

推论3.1　对于不可约非周期Markov链，若存在非空有限集 J，使得：

1°　方程组 $\widetilde{P}\,y=y$　存在 $y\geqslant 0$　$\min\limits_{i\in J} y_i=1$ 的有界解 $\{y_i\}$。

2°　$\Omega=\{l\mid y_l<1,\ \ l\in\overline{J}\}\neq\phi$

3°　任给 $i\in J$，存在 $l\in\Omega$，使得 $p_{i\cdot l}>0$，则此Markov链为非常返的。

〔证〕　只需注意到 $\widetilde{f}_{i\cdot l}\geqslant\widetilde{f}_{i\,l}^{(1)}=p_{il}>0$ 即可。

特别地，若任给 $i\in J$，$p_{i\cdot l}>0$，$l\in\overline{J}$，则推论3.1成立。

推论3.2　对于不可约非周期Markov链，若存在非空有限集 J，使得：

1°　方程组 $\widetilde{P}\,y=y$ 存在 $y\geqslant 0$ 且分量递减的解 $\{y_i\}$。

2°　任给 $i\in J$，p_{ij}（$j\in\overline{J}$，）不全为零，则此Markov链为非常返的。（证明略）

四、M/G/1成批服务排队过程

设两批服务时间间隔ξ服从独立的同分布，分布函数为B(t)。顾客源为参数为λ的Poisson流，则两批服务间隔内到达n个顾客的概率。

$$a_n=\int_{0^-}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}dB(t)\qquad(n=0,1,2,\cdots\cdots)$$

设每批服务的最大容量为S（$\geqslant 1$），则每批顾客服务完毕时刻的队长所生成的嵌入Markov链$\{q_n\}$的转移阵为（1）式。显然此Markov链为不可约、非周期的。设

$$\frac{1}{\mu}=\int_{0^-}^{\infty}t\,dB(t)$$

服务强度

$$\rho=\frac{\lambda}{s\mu}$$

再设此系统的极限分布$\{x_i\}$的母函数为$X(z)$，$\{a_i\}$的母函数为$A(z)$。可以证明

$$s\rho=\sum_{n=0}^{\infty}n\,a_n \tag{8}$$

$$X(z)=\frac{A(z)\sum_{i=0}^{s-1}(z^i-z^s)x_i}{A(z)-z^s} \tag{9}$$

N. T. J. Bailey（见〔2〕或〔6〕）曾证明：若$A(z)$在$|z|<1+\delta$（$\delta>0$）内解析，则当$\rho<1$时，此链为遍历的。下面证明：此Markov链为遍历的必要条件是$\rho<1$；常返的充分条件是$\rho=1$，非常返的充分条件是$\rho>1$。

定理4.1　Markov链$\{q_n\}$为遍历的（非周期且正常返）必要条件是$\rho<1$。

〔证〕：若$\{q_n\}$为遍历链，则有极限分布$\{x_i\}$满足（9）式，且$\lim\limits_{z\to 1^{-0}}X(z)=1$。将(9)式变形得：

$$X(z)=\frac{1-z}{A(z)-z^S}A(z)\sum_{i=0}^{S-1}z^i(z^{S-i-1}+\cdots+z+1)x_i$$

由于$x_i>0$（$i=1,2,\cdots\cdots$），从而推知

$$\lim_{z\to 1^{-0}}\frac{1-z}{A(z)-z^s}>0$$

即

$$\lim_{z\to 1^{-0}}\frac{A(z)-z^s}{1-z}=\lim_{z\to 1^{-0}}\left[-\frac{A(1)-A(z)}{1-z}+\frac{1-z^s}{1-z}\right]$$

$$=-\frac{dA(z)}{dz}\bigg|_{z=1}+\lim_{z\to 1^{-0}}\left[1+z+\cdots\cdots+z^{s-1}\right]$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}n\,a_n+s>0$$

所以 $-s\rho+s>0$，$\rho<1$。证毕。

定理4.2　若 $\rho=1$，则Markov链$\{q_n\}$为常返的。

〔证〕　因为 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n = s\rho = s$，取 $y_i = i\ (i\in E)$ 则 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j y_j = y_s$

取 $J=\{0,1,\cdots\cdots,s-1\}$，不难证明$\{y_i\}$是方程组$\widetilde{P}y=y$满足$y_i\to\infty$的解。又因为任取 $\alpha\in J$，都有$p_{i\alpha}=a_\alpha>0$，$(i\in J)$，所以由推论2.1知此Markov链为常返的。证毕。

引理4.1　设$\{p_n\}$$(n=0,1,2\cdots\cdots)$为一概率分布且$p_0>0$，若 $\sum_{n=0}^{\infty} np_n > s \geqslant 1$，则方程

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = z^s$$

在 $0<z<1$ 内有解

〔证〕　设幂级数$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n - z^s$，注意到$f(0)=p_0>0$，$f(1)=0$，$\lim\limits_{z\to1^{-0}} f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} np_n - s > 0$ 即知有解 $0<\theta<1$。

定理4.3　若 $\rho>1$，则Markov链$\{q_n\}$为非常返的。

〔证〕　因为 $\sum_{n=0}^{\infty} na_n = s\cdot\rho > s$，$a_0>0$，由引理4.1知：存在$0<\theta<1$，使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\theta^n = \theta^s \tag{10}$$

令 $J=\{0,1,\cdots\cdots s-1\}$，$y_i=\theta^i\ (i=0,1,2,\cdots\cdots)$，由(10)式不难验证$\{y_i\}$是方程组$\widetilde{P}y=y$满足 $y\geqslant0$ 且分量递减的解。由P的结构知$p_{ij}>0$，$i\in J$，故由推论3.2知此Markov链为非常返的。证毕。

如果两批服务时间间隔ξ的分布密度函数当 $t\to\infty$时以负指数级趋于零，可以证明，$A(z)=B^*(\lambda(1-z))$在$|z|<1+\delta$内解析，其中$B^*(z)$为$B(t)$的Laplace－Stieltjes变换，δ为充分小的正数。此时，综合上面各定理可得$M/G/1$系统成批服务排队过程的嵌入Markov链$\{q_n\}$的状态分类：

(i)　当$\rho<1$时，$\{q_n\}$为遍历链，此时存在唯一的平稳分布$\{\pi_i\}$。

(ii)　当$\rho=1$时，$\{q_n\}$为零常返链，此时不存在平稳分布。

(iii) 当$\rho>1$时，$\{q_n\}$为非常返链，此时系统为不稳定的。

最后，我们指出，定理2.1和定理3.1及其推论可应用于更广泛一类的Markov链的研究。例如，若考虑S不再是定值，而是一离散的随机变量时的$M/G/1$系统成批服务排队过程，对应的转移阵P的形式更为复杂。但是应用上述定理，也可以解决其嵌入Markov链的状态分类问题（证明略）。

参考文献

〔1〕 Foster F G. On the Stochastic Matricis with Certain Queuing Processes. Ann Math Statist, 1953; 24: 355～360

〔2〕 Bailey N T J On Queueing Processes with Bulk Service. J Roy Statist SOC. Ser B, 1954; 16: 80～87

〔3〕 Feller W. An Introduction to Probability Theory and its Application. 2nd ed. New York: John Wiley, 1957

〔4〕 胡迪鹤. 可数状态的马可夫过程论。武汉：武汉大学出版社，1983

〔5〕 徐光辉。随机服务系统。北京：科学出版社，1980

〔6〕 Bharucha-Reid A T著；杨纪柯，吴立德译。马尔柯夫过程论初步及其应用。上海：上海科学技术出版社，1979：388～449