1989年5月 重庆大学学报 Vol.12, No.3
第12卷第3期 JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY May, 1989

可行方向理论的几个性质

SOME PROPERTIES OF FEASIBLE DIRECTIONS

杨新民
Yang Xinmin
（重庆师范学院数学系）

摘　要　本文将凸函数情形下的可行方向理论方面的几个性质推广到广义凸函数上并讨论了它们在多目标数学规划中的应用。

关键词　可行方向；下降方向；拟凸性，伪凸性；多目标规划

ABSTRACT　Some properties of feasible direction in the convx case are generalized to the corresponding properties in generalized covex case and their applications for multiobjective mathematical programming are discussed in this paper.

KEY WORDS　Feasible direction; descent direction; quasicovexity; pseudoconvexity; multiobjective programming

一、引　言

近年来，Ben-Tal, Ben-Israel and Zlobec等人利用可行方向理论研究非线性规划的最优性条件，得到了一系列结果[1—3]。用可行方向理论处理多目标最优化问题也获得了成功[4—6]。这无疑说明可行方向理论是很有用的工具，但遗憾的是无论单目标非线性规划，还是多目标非线性规划，可行方向理论讨论最优性条件往往涉及凸函数[1—4]。在文献[5—6]中给出了一些广义凸函数条件下最优性结果。自然会问：能否在一般广义凸函数条件下建立可行方向理论？

本文的目的就是在广义凸函数条件下建立[1]中相应的可行方向理论并且给出在多目标数学规划解的特征方面的应用。

二、主要结果

在我们正式展开讨论之前，先介绍几个将用到的概念。

本文于1987年12月23日收到。

定义 1 设S是$\mathbf{R}^n$中凸集，$x^*\in clS$。则向量$d\in\mathbf{R}^n$称为S在x^*处的一个可行方向，若存在$T>0$，使得$x^*+td\in S$，$\forall t\in(0, T)$。用$F(S, x^*)$表示S在x^*处的所有可行方向全体。

定义 2 设f是$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，$x^*\in domf$，对每个关系："关系"$\triangleq$"$<$"，"$>$"，"$=$"，"$\leqslant$"，"$\geqslant$"等等。我们表$D_f^{\text{关系}}(x^*)=\{d\in\mathbf{R}^n: \exists T>0, s.t. f(x^*+td)\text{关系}f(x^*), \forall t\in(0, T)\}$特别地，我们叫

$$\begin{cases} D_f^<(x^*)\text{为} f \text{在} x^* \text{处的下降方向集;} \\ D_f^=(x^*)\text{为} f \text{在} x^* \text{处的常值方向集;} \\ D_f^\leqslant(x^*)\text{为} f \text{在} x^* \text{处的非增方向集;} \\ D_f^\geqslant(x^*)\text{为} f \text{在} x^* \text{处的非减方向集。} \end{cases}$$

另外，我们缩写$D_k^{\text{关系}}(x^*)\triangleq D_{f_k}^{\text{关系}}(x^*)$，$D_\Omega^{\text{关系}}(x^*)\triangleq\bigcap_{k\in\Omega}D_k^{\text{关系}}(x^*)$。其中$\Omega=\phi$时，约定$D_\phi^{\text{关系}}(x^*)=\mathbf{R}^n$。

定理 1 设f: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$是拟凸函数，$x^*\in domf$，则$(a)$ $(D_f^<(x^*))^c=D_f^\geqslant(x^*)$；$(b)$ $D_f^\leqslant(x^*)=D_f^<(x^*)\cup D_f^=(x^*)$；$(c)$ $D_f^<(x^*)$是凸集；(d) $D_f^\leqslant(x^*)$是凸集；(e) $conv(D_f^=(x^*))\subseteq D_f^\leqslant(x^*)$。

证 (a) $D_f^\geqslant(x^*)\supseteq(D_f^<(x^*))^c$是显然的，下面证明其反包含关系，设$d\notin D_f^\geqslant(x^*)$，由定义，对每个$T>0$，存在$t_1\in(0, T)$，使得$f(x^*+t_1d)<f(x^*)$，由$f$的拟凸性，有$f(x^*+td)\leqslant f(x^*)$，$\forall t\in(0, t_1)$。下面分两种情况进行讨论。(i) $\forall t_2\in(0, t_1)$，都存在$t_3\in(0, t_2)$，使得$f(x^*+t_3d)=f(x^*)$。若$f(x^*+td)=f(x^*)$，$\forall t\in(0, t_3)$，则$d\in D_f^=(x^*)\subset D_f^\geqslant(x^*)$这与$d\notin D_f^\geqslant(x^*)$矛盾。若存在$t_4\in(0, t_3)$使得$f(x^*+t_4d)<f(x^*)$，则由$f$的拟凸性，有$f(x^*+t_3d)\leqslant max\{x^*+t_1d), f(x^*+t_4d)\}<f(x^*)$这与$f(x^*+t_3d)=(x^*)$矛盾，所以仅有下述情况：存在$t_2\in(0, t_1)$，使得$f(x^*+td)<f(x^*)\ \forall t\in(0, t_2)$即$d\in D_f^<(x^*)$，从而$d\notin(D_f^<(x^*))^c$。于是$D_f^\geqslant(x^*)\supseteq(D_f^<(x^*))^c$。综上讨论得$D_f^\geqslant(x^*)=(D_f^<(x^*))^c$。

(b) 显然$D_f^=(x^*)\cup D_f^<(x^*)\subseteq D_f^\leqslant(x^*)$，由$(a)$有$D_f^\leqslant(x^*)\cap(D_f^<(x^*))^c=D_f^\leqslant(x^*)\cap D_f^\geqslant(x^*)=D_f^=(x^*)$。于是$D_f^<(x^*)\cup D_f^=(x^*)=D_f^<(x^*)\cup[D_f^\leqslant(x^*)\cap(D_f^<(x^*))^c]=D_f^<(x^*)\cup D_f^\leqslant(x^*)$，即$D_f^\leqslant(x^*)\subseteq D_f^<(x^*)\cup D_f^=(x^*)$。从而有$D_f^\leqslant(x^*)=D_f^<(x^*)\cup D_f^=(x^*)$

(c) 设$d^0, d^1\in D_f^<(x^*)$，不妨设$f(x^*+td^i)<f(x^*)\ \forall t\in(0, 1)$，$i=0,1$。现令$d^\lambda=\lambda d^1+(1-\lambda)d^0$，$\forall\lambda\in[0, 1]$反设若存在$\lambda\in[0, 1]$使得$d^\lambda\notin D_f^<(x^*)$，由定义知$\forall T>0$，存在$t_1\in(0, T)$，使得$f(x^*+t_1d^\lambda)\geqslant f(x^*)$…(※)但特别取$T=1$时，由前面假设知$t_1<1$且$f(x^*+t_1d^i)<f(x^*)$，$i=0,1$。而$x^*+t_1d^\lambda=\lambda((x^*+t_1d^1)+(1-\lambda)(x^*+t_1d^0)$。由$f$的拟凸性有$f(x^*+t_1d^\lambda)\leqslant Max\{f(x^*+t_1d^0), f(x^*+t_1d_1)\}<f(x^*)$这与(※)矛盾。从而$d^\lambda\in D_f^<(x^*)$ 即$D_f^<(x^*)$是凸集。

(d) 设$d^0, d^1\in D_f^\leqslant(x^*)$不妨设$f(x^*+td^0)\leqslant f(x^*)$，$f(x^*+td^1)\leqslant f(x^*)$，$\forall t\in[0, 1]$。现令$d^\lambda=\lambda d^1+(1-\lambda)d^0$，$\forall\lambda\in[0, 1]$。反设存在$\lambda\in(0, 1)$使得$d^\lambda\notin D_f^\leqslant(x^*)$，由定义存在$t_1\in(0, 1)$使得$f(x^*+t_1d^\lambda)>f(x^*)$。另一方面，由$x^*+t_1d^\lambda=\lambda(x^*+t_1d^0)+(1-\lambda)(x^*+$

t_1d^1)和 f 的拟凸性，有 $f(x^*+t_1d^\lambda)\leqslant max\{f(x^*+t_1d^0), f(x^*+t_1d^1)\}\leqslant f(x^*)$ 这与 $f(x^*+t_1d^\lambda)>f(x^*)$ 矛盾。$\therefore d^\lambda\in D_f^<(x^*)$ 即 $D_f^<(x^*)$ 是凸集。

(e) 由 $D_f^=(x^*)\sqsubseteq D_f^<(x^*)$ 和(d)即得。

定义 3 [7]：设 $C\subseteq R^n$ 为凸集，f 称为 C 上伪凸，若 $\forall x^1, x^2\in C$，$f(x^1)>f(x^2)$ 存在正数 α 和 τ，$\tau\leqslant 1$ 一般 α 和 τ 都依赖于(x^1 和 x^2)使得对每个 $0<\theta<\tau$，有 $f[(1-\theta)x^1+\theta x^2]\leqslant f(x^1)-\theta\alpha$。

引理 1 [7] 设 f：$C\to R$ 是可微函数，C 为 R_n 中凸集，则 f 是 C 上的伪凸函数之充要条件是 $\forall x^1, x^2\in C$，当 $(x^1-x^2)^T\nabla f(x^2)\geqslant 0$ 时，有 $f(x^1)\geqslant f(x^2)$。

定理 2　设 f 是伪凸函数，$x^*\in domf$，则

(a) $D_f^<(x^*)=\{d: f'_+(x^*, d)<0\}$ 这里 $f'_+(x^*,d)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\dfrac{f(x^*+\lambda d)-f(x^*)}{\lambda}$

(b) $D_f^=(x^*)\sqsubseteq\{d: f'(x^*,d)=0\}$，这里 $f'(x^*, d)=\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{f(x^*+\lambda d)-f(x^*)}{\lambda}$

(c) $D_f^<(x^*)\sqsubseteq\{d: f'_+(x^*, d)\leqslant 0\}$

(d) $D_f^=(x^*)=\{d\in D_f^=(x^*)\mid\{f'(x^*,d)=0\}$

证(a) 显然 $D_f^<(x^*)\supset\{d: f'_+(x^*,d)<0\}$，下证反包含关系，设 $d\in D_f^<(x^*)$，由定义知存在正数 T，使得 $f(x^*+Td)<f(x^*)$，由伪凸定义知存在正数 α 和 τ，$\tau\leqslant 1$ 使得 $0<\theta\leqslant\tau$，$f(x^*+\theta Td)\leqslant f(x^*)-\theta\alpha$。于是 $f'_+(x^*,d)=\lim\limits_{\theta\to 0^+}\dfrac{f(x^*+\theta Td)-f(x^*)}{T\theta}\leqslant-\dfrac{\alpha}{T}<0$

所以　$d\in\{d: f'_+(x^*,d)<0\}$ 即 $D_f^<(x^*)\subset\{d: f'_+(x^*,d)<0\}$

综上所述，$D_f^<(x^*)=\{d: f'_+(x^*, d)<0\}$

(b) 显然

(c) 由(a)，(b)和定理1(b)易得

定理 3　设 f 是可微伪凸函数，$x^*\in domf$，则

(a) $D_f^<(x^*)=\{d: \nabla f(x^*)^Td<0\}$；

(b) $D_f^=(x^*)$ 是凸锥且 $D_f^=(x^*)\subset\{d: \nabla f(x^*)^Td=0\}$，

(c) $D_f^\leqslant(x^*)=\{d: \nabla f(x^*)^Td<0$，当 $\nabla f(x^*)^Td=0$ 时有 $d\in D_f^=(x^*)\}$

证(a) 显然 $D_f^<(x^*)\supset\{d: \nabla f(x^*)^Td<0\}$，下证反包含关系。事实上由 f 的伪凸性及引理1知当 $\nabla f(x^*)^Td\geqslant 0$ 时，对 $\forall t\geqslant 0$，有 $f(x^*+td)\geqslant f(x^*)$，即 $d\notin D_f^<(x^*)$ 这说明当 $d\notin\{d: (x^*)^Td<0\}$ 时，$d\notin D_f^<(x^*)$，即 $\{d\nabla f(x^*)^Td<0\}\supset D_f^<(x^*)$ 故

$$D_f^<(x^*)=\{d: \nabla f(x^*)^Td<0\},$$

(b) $D_f^=(x^*)$ 是锥由定义易知，下证 $D_f^=(x^*)$ 是凸集。事实上，设 $d^0, d^1\in D_f^=(x^*)$，不妨设 $f(x^*+td^i)=f(x^*)$，$\forall t\in[0, 1]$，$i=0, 1$ 现设 $d^\lambda=\lambda d^1+(1-\lambda)d^0$，$\forall\lambda\in[0, 1]$。由 f 是伪凸一定拟凸知 $f(x^*+td^\lambda)\leqslant\max\{f(x^*+td^0), f(x^*+td^1)\}=f(x^*)$，$\forall t\in 0,1]$。另一方面，由 $d^0, d^1\in D_f^=(x^*)$，易知 $\nabla f(x^*)^Td^0=0$，$\nabla f(x^*)^Td^1=0$。从而 $\nabla f(x^*)^Td^\lambda=\nabla f(x^*)^T[\lambda d^1+(1-\lambda)d^0]=0$，由引理1知 $f(x^*+td^\lambda)\geqslant f(x^*)$，$\forall t\geqslant 0$。综述上面两个方面，我们有

$f(x^*+t\mathbf{R}^*)=f(x^*)$, $\forall t\in[0,1]$。 即

$d^\lambda\in D_j^=(x^*)$ 所以 $D_j^=(x^*)$是凸集

(c) 由(a)，(b)和定理1(b)

定义 4 令$S=\{x: f^K(x)\leqslant 0, k\in P\}$, $P(x)=\{k\in P: f^K(x)=0\}$, $P^==\{k\in P, \forall x\in S, f^k(x)=0\}$, $P^<(x)=P(x)\setminus P^==\{k\in P(x): \exists x^k\in S$, 使得$f^k(x^k)<0\}$, $P^<=P\setminus P^==\{k\in P: \exists x^k\in S$。使得$f^k(x^k)<0\}$ $|P^<(x)|$表示$P^<(x)$中元素的个数。

定理 4 设P是有限指标集，$S=\{x: f^R(x)\leqslant 0\}$。$f^R$: $R^n\to\mathbf{R}$是严格拟凸函数，$k\in P$, $x\in S$，则当$p^<(x)\neq\phi$时，存在$\hat{x}\in S$，使得$f^k(\hat{x})<0$, $k\in P^<$。

证 由$P^<(x)$定义知，对任意$k\in P^<(x)$，存在$x^k\in S$，使得$f^k(x^k)<0$。令$\overline{x}=\frac{1}{|P^<(x)|}\sum\limits_{k\in P^<(x)} x^R$，由$f^k$的严格拟凸性，有$f^k(\overline{x})<\max\limits_{i\in P^<(x)} f^R(x^i)\leqslant 0$, $\forall k\in P^<(x)$。再由$P^<=\bigcup\limits_{x\in S}P^<(x)$和$P$是有限指标集，不难知存在$x_1$, …, $x_r\in S$使得$P^<=\bigcup\limits_{i=1}^{T}P^<(x_i)$。且存在$\overline{x_1}$, …, $\overline{x_r}$，有$f^k(\overline{x_i})<0$, $\forall k\in P^<(x_i)$, $i=1$, …, r。现取$\hat{x}=\frac{1}{r}\sum\limits_{i=1}^{r}\overline{x_i}$，由$f^k$的严格拟凸性，有$f^k(\hat{x})<\max\limits_{1\leq i\leq r} f^R(\overline{x_i})\leqslant 0$, $\forall k\in P^<=\bigcup\limits_{i=1}^{r}P^<(x_i)$。

三、在多目标数学规划中的应用

我们考虑下述多目标数学规划问题：

$$(P)\begin{cases} V-\min F(x) \\ g(x)\geqq 0, \quad R=\{x\,|\,g(x)\geqq 0\}\end{cases}$$

其中$F(x)=(f_1(x), f_2(x), \cdots, fp(x))^T$, $g(x)=(g_1(x), \cdots, g_m(x))^T$, $f_i(x)$, $(i=1, 2, \cdots, p)$, $g_j(x)(j=1, 2, \cdots, m)$是定义在$\mathbf{R}^n$上的实值函数。

由第二节定理4和[6]中定理6、定理7我们不难得下述结果。

定理 5 设$F(x)$，$-g(x)$分别是连续凸和严格拟凸函数，则x^0为弱有效解之充要条件是：

$$Q\triangleq\{z\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}/\exists\overline{a}>0, \text{使得}F(x^0+az)<F(x^0),$$
$$g_{E\setminus\Omega_=}(x^0+az)>0, \quad g_{\Omega_=}(x^0+az=0)a\in(0, \overline{a}]\}=\phi$$

定理 6 设$F(x)$，$-g(x)$分别是可微凸和可微严格拟凸函数。则是弱有效解之充要条件是

$$Q\triangleq\{z\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}/\exists\overline{a}>0, \text{使得}F_x(x^0)z<0, g_{E\setminus\Omega_=x}(x^0)z>0,$$
$$g_{\Omega_=}(x^0+az)=g(x^0)=0, \ a\in(0, \overline{a}]\}=\phi$$

引理 2 [1,5] (Dubovitskij-Milyutin) 设c_0, c_1, …, c_l 为凸集，且$o \in c/c_k$, $k=0$, 1, 2, …, l。而c_R, $k=1$, 2, …, l 是开的，则 $\bigcap\limits_{R=0}^{l} c_R=\phi \Longleftrightarrow$ 存在不全为0的 $y^R \in c_R^*$, $R=0,1,\cdots,l$, 使得有 $\sum\limits_{R=0}^{l} y^R=0$ 成立。

其中 $c_R^*=\{y \in \mathbf{R}^n: \forall x \in c_R \Rightarrow y^T \leqslant 0\}$

由引理 2，我们有定理 6 的对偶形式：

定理 7 设$F(x)$, $-g(x)$分别是可微凸和可微严格拟凸函数。则x^0是弱有效解之充要条件是存在向量λ_i, $i=1$, 2, …, p和向量μ_j, $j \in E \setminus \Omega_-$,使得$\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i f_{ix}(x^0)-\sum\limits_{j \in E \setminus \Omega_-} \mu_j g_{jx}(x^0) \in -c(E \setminus \Omega_-)^+$, $\lambda_i \geqslant 0$, $i=1$, 2, …, p, $\mu_j \geqslant 0$, $j \in E \setminus \Omega_-$不全为 0。其中 $c(E \setminus \Omega_-)^+$ 为凸锥，$c(E \setminus \Omega_-)=\{z \mid g_{\Omega_-}(x^0+\alpha z)=0, \alpha \in [0, \bar{\alpha}]\}$

证　令　$c_i=\{z \mid f_{ix}(x^0)z<0\}$　$i=1$, 2, …p, $D_j=\{z \mid g_{jx}(x^0)z>0\}$, $j \in E/\Omega_-$, 不难验证c_i, D_i均为凸锥，且$o \in cl c_i$, , $i=1$, 2…, …p. $o \in cl D_j$, $j \in E/\Omega_-$。由定理 6，x^0为弱有效解当且仅当

$$\left(\bigcap_{i=1}^{p} c_i\right) \cap \left(\bigcap_{j \in E \setminus \Omega_-} D_j\right) \cap c(E/\Omega_-)=\phi$$

而　$c(E/\Omega_-)$ 是包含 0 的凸锥。注意 $c_i^+=\{\lambda_i f_{ix}(x^0)^T \mid \lambda_i \geqslant 0\}$, $i=1$, 2, …p, $D_j^+=\{-\mu_j g_{jx}(x^0) \mid \mu_j \geqslant 0\}$, $j \in E \setminus \Omega_-$, 这样由引理 2 即得所要证结论。

参 考 文 献

[1] Ben-Israel A, Ben-Tal A, Zlobec S. Optimality in nonlinear programming-A feasible direction approach. New York, 1931

[2] Ben-Tal A, Ben-Israel A, Zlobec S. Characterization of optimality in lonvex programming without quelification. J optm. theory and applications 1976; 20(4): 417～437

[3] Ben-Israel A, Ben-Tal A. On a Charactorization of optimality in Convex programming. Math. Prog., 1976; (11): 81～88

[4] Ben-Israel A, Ben-Tal A, Charnes A. Necessary and Sufficient Conditions for a pareto optimum in lonvex programming. Econometrica, 1977; 45: 811～820

[5] 应玫茜，多目标数学规划有效解和弱有效解的充要条件和判别准则。应用数学学报，1979; 2(3)

[6] 罗国光，杨新民，多目标数学规划解的充要条件。重庆大学学报，1987年; 10(4)

[7] Avriel M. Nonlinear Programming-analysis and methods. Prentice-Hall Inc., 1976: 172