1989年5月 重庆大学学报 Vol.12. No.3
第12卷第3期 JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY May. 1989

遗传Helly超图和遗传保形超图的充要条件及等价性

A NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION ON HEREDITARY HELLY HYPERGRAPHS AND CONFORMAL HYPERGRAPHS AND THEIR EQUIVALENCE

谢 玢
Xie Ben
（计 算 中 心）

摘 要 本文给出遗传K-Helly超图和遗传K秩保形超图的一个充要条件以及它们的等价性。

关键词 超图；图论；组合数学

ABSTRACT We show in this paper, a necessary and sufficient condition on hereditary K-Helly hypergraphs and conformal hypergraphs and their equivalence.

KEY WORDS hypergraph; graph theory; combinatorial mathematics

C. Berge 在[1]中讨论了超图保形性质和 Helly 性质的充要条件以及保形与 Helly 性质成对偶关系。尔后，R. P. Anstee[2]将保形概念推广到K-保形，将相应的结论推广到 K-保形和K-Helly性质，还给出遗传K-保形的一个充要条件。同年，贾仁安[3]将保形概念推广到K秩保形，并也将 Berge 的结论推广到K秩保形和K-Helly性质。由定义知，K-保形必为K秩保形，反之则不然。本文给出遗传 K-Helly 性质的一个充要条件（定理10），并推广R. P. Anstee的工作，即给出遗传K秩保形的一个充要条件（定理14），利用这两个充要条件，我们得到K-Helly性质和K秩保形这一对对偶性质在遗传意义下变为等价性质的结论(定理15)。

本文未定义的术语见[1]。

设$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$是一个有限集合。ε由X的非空子集组成，记为$\varepsilon=\{E_1,\cdots E_m\}$，如满足$\bigcup_{i=1}^{m}E_i=X$，称$H=(X,\varepsilon)$为超图。

本文于1988年4月28日收到

定义 1　H的一个偏超图$(X_{\mathcal{F}},\ \mathcal{F})$是由集族$\mathcal{F}\subset\varepsilon$所导出，其中$X_{\mathcal{F}}=\bigcup_{E_i\in\mathcal{F}}E_i$；

H的一个子超图$H_A=(A,\ \varepsilon_A)$是由点集$A\subset X$所导出，其中$\varepsilon_A=\{E_i\cap A\,|E_i\in\varepsilon,\ E_i\cap A\neq\phi\}$，

H的一个偏子超图H'是存在H的一个偏超图，使得H'是此偏超图的子超图。

定义 2　若有$r+1$条边$E_1,\ \cdots,\ E_{r+1}\in\varepsilon$，满足：

$$\bigcap_{i=1}^{r+1}E_i=\phi\qquad 且\ \bigcap_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{r+1}E_i\neq\phi,\qquad j=1,\ \cdots,\ r+1,$$

则称由$E_1,\ \cdots,\ E_{r+1}$构成的超图为r-单形。

定义 3　C_K^S是定义在K个顶点的一个超图，其边由K个顶点的所有S子集构成。

引理 4　如H中有r-单形，则必存在偏子超图C_{r+1}^r含于此r-单形内。

证　如H中有一个r-单形为$\{E_1,\ \cdots,\ E_{r+1}\}$，则有关系式：

$$x_1\in\bigcap_{\substack{i\neq1\\ i=1}}^{r+1}E_i,\ x_2\in\bigcap_{\substack{i\neq2\\ i=1}}^{r+1}E_i,\ \cdots,\ x_{r+1}\in\bigcap_{\substack{i\neq r+1\\ i=1}}^{r+1}E_i$$

且由r-单形的定义，$x_1,\cdots,\ x_{r+1}$必互不相同，这$r+1$个点均各属于r条边，则$\{E_1,\ \cdots,\ E_{r+1}\}$存在子超图$H_{A_0}=(A_0,\ \varepsilon')$，其中

$$A_0=\{x_1,\ \cdots,\ x_{r+1}\},$$

$$\varepsilon'=\{E_i\cap A_0,\quad i=1,\ \cdots,\ r+1\}.$$

易证　$H_{A_0}=C_{r+1}^r$，故结论成立。

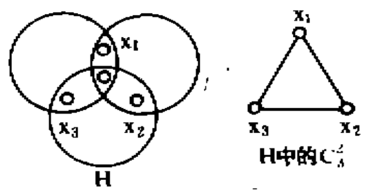

图　1

注：引理4的逆命题不成立，这可以从图看出。

定义 5　如果对任意的$\varepsilon'\subset\varepsilon$，$\varepsilon'$满足其它任意$K$个相交非空，则

$$\bigcap_{E\in\varepsilon'}E\neq\phi,$$

称超图$H=(X,\ \varepsilon)$满足K-Helly性质。也称H为K-Helly超图。

特别当$K=2$时，2-Helly性质也称Helly性质。

如果超图具有性质(p)，且此超图的任何偏子超图仍具有性质(p)，我们称此超图对性质(p)具有遗传性。

定义 6　H为K-Helly超图。若H的任何偏子超图仍为K-Helly超图，则称H为遗传K-Helly超图。

我们将用到以下结论：

定理 7　(H. M. Mülder[4])H为K-Helly超图当且仅当对任意的$r\geqslant K$，H不含r-单形。

引理 8　H为遗传K-Helly超图当且仅当对任意的$r\geqslant$K，H不含C_{r+1}^r类偏子超图。

证 必要性：若H含某个C^r_{r+1}($r\geqslant K$)，由于C^r_{r+1}不满足K-Helly性质，而C^r_{r+1}又为H的偏子超图，故H非遗传K-Helly超图。

充分性：若H不含C^r_{r+1}类偏子超图，由引理4知H必不含r-单形。由定理7知，H满足K-Helly性质。下只需证H满足遗传K-Helly性质，即证对任意的$A\subset X$，$H_A=(A, \varepsilon_A)$也满足K-Helly性质。

若存在$A_0\subset X$，使得$H_{A_0}=(A_0, \varepsilon_{A_0})$不满足K-Hell性质，则$H_{A_0}$必含有$r$-单形$\varepsilon'$（由定理7）。由于$\varepsilon'$中含有$C^r_{r+1}$子超图，故$H_{A_0}$含$C^r_{r+1}$类偏子超图，且$C^r_{r+1}$类仍为H中的$C^r_{r+1}$类偏子超图。矛盾。故H必为遗传K-Helly超图。□

引理9 若H不含C^K_{K+1}，则对任意的$r\geqslant K$，H不含C^r_{r+1}。

证 若H含有C^r_{r+1}($r\geqslant K$)，设C^r_{r+1}的顶点集为：

$$X(C^r_{r+1})=\{x_1, \cdots, x_{r+1}\},$$

C^r_{r+1}的$r+1$条边C_1，…，C_{r+1}有$x_i\notin C_i$，$i=1$，…，$r+1$。在$X(C^r_{r+1})$中任取$K+1$个点，不妨设取$\{x_1, \cdots, x_{k+1}\}$，则C_1，…，C_{k+1}都含有x_{k+2}，x_{k+3}，…，x_{r+1}，共$r-k$个点，

设 $C'_i=C_i\setminus\{x_{k+2}, x_{k+3}, \cdots, x_{r+1}\}$，

则 $|C'_i|=K$，仍有$\bigcap\limits_{i=1}^{k+1}C'_i=\phi$。

所以$\{C'_1, \cdots, C'_{k+1}\}$为$H$的$C^k_{k+1}$。矛盾。 □

由引理8、引理9，有

定理10 K为遗传K-Helly超图当且仅当不含C^k_{k+1}类偏子超图。

证 由于对任意的$r\geqslant K$，H不含C^r_{r+1}必不含C^k_{k+1}，又据引理9，H不含C^k_{k+1}，则对任意的$r\geqslant K$，H不含C^r_{r+1}。所以由引理8知结论成立。

定义11 超图H=(X, ε)，集合$A\subset X$称为H的K秩紧点团，如果满足$|A|\geqslant K$，并且A的任何K子集都含在H的一条边中；

如果H中每个K秩紧点团都包含在H的一条边中，则称H为K秩保形超图。

特别，当$k=2$时，2秩保形即为保形。

定义12 H为K秩保形超图。若H的任何偏子超图仍为K秩保形超图，则称H为遗传K秩保形超图。

为了给出遗传K秩保形超图的充要条件，我们首先推广Anstee的一个结论，即去掉[2]中定理3的"超图边秩$\geqslant K$和边无包含关系"这一前提条件。

定理13 如H不含偏子超图C^k_{k+1}，则H是K秩保形。

证 设A是H的K秩紧点团，$|A|=r(r\geqslant K+1)$。

因为A的任何K子集含于H的边中，则对任何A的$K+1$子集A'均含在H的某边中。事实上，若A'不含于H的边中，则A'中的$K+1$个K子集必属于H中不同的边E_1，…，E_{k+1}，从而这$K+1$条边构成的H偏子超图C^k_{k+1}，矛盾

同理，并由引理9知，A中任何$K+2, K+3, \cdots, r-1$子集含于H的边中，从而有A含于H的边中。

故H为K秩保形。

定理14　H为遗传K秩保形当且仅当H无C^k_{k+1}类偏子超图。

证　必要性：若H含C^k_{k+1}类偏子超图，由于C^k_{k+1}的顶点集本身为不含于超图C^k_{k+1}的边中的一个K秩紧点团，故H非遗传K秩保形。

充分性：因为H无偏子超图C^k_{k+1}，则H的任形偏子超图H'也不含C^k_{k+1}，由定理13知H'为K秩保形。故H为遗传K秩保形。□

由定理10和定理14，有以下结论：

定理15　H为遗传K秩保形超图当且仅当H为遗传K-Helly超图。

定义16　H中一个三圈$\mu=(x_1, E_1, x_2, E_2, x_3, E_3, x_1)$的三边$E_1$，$E_2$，$E_3$之一含$\mu$中所有三点，则称$\mu$为平衡三圈，否则称非平衡三圈。

显然，非平衡三圈是超图的一类偏超图。

特别，对Helly超图和保形超图，我们有

推论17　H满足遗传的Helly性质当且仅当H不含非平衡三圈。

证　因为H中存在C^2_3等价于存在非平衡三圈。□

推论18　H为遗传保形超图当且仅当H不含非平衡三圈。□

推论19　H是一个遗传保形超图当且仅当H满足遗传Helly性质。

推论20　若H无非平衡三圈，则H保形且满足Helly性质。

参考文献

[1] Berge C. B., Graphs and Hypergraphs, North-Holland, Amsterdam, 1976

[2] Anstee R. P., Extension of the notion of conformality in hypergraphs, Congressur Numerantium, 1983, 39: 83-88

[3] 贾仁安，超图的r秩Helly条件、保形性及表示图，江西大学学报（自），1983，(2)：77-82

[4] Mulder H. M., The number of edges in a K-Helly hypergraph, Annals of Discrete Mathematics, 1983, 17: 497-501