1989年7月 重庆大学学报 Vol.12, No.4
第12卷第4期 JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY Jul.1989

一类灰线性规划及其对偶理论研究

RESEARCH ON A KIND OF GREY LINEAR PROGRAMMING AND THEIR DUAL THEORIES

李毛亲 段虞荣

Li Maoqin Duan Yurong

（应用数学系）

摘要 本文讨论了一类灰系数为区间的灰线性规划，定义了其第一和第二白化线性规划及其灰对偶规划，探讨了它们的解与原规划的解之间的关系，并得出了一些新的结论。

关键词 灰线性规划；第一白化线性规划；第二白化线性规划；灰对偶线性规划；灰可行解；灰最优解

ABSTRACT In this paper, a kind of grey linear programming with grey interval coefficients is discussed, the definitions of the first and second whitenized linear programmings and the grey dual linear programmings are presented, the relationships between the solutions of the above three kinds of programming and the solution of the primal programming are explored, and some new conclusions are obtained.

KEY WORDS grey linear programming; the first whitenized linear programming; the second whitenized linear programming; grey dual linear programming; grey feasible solution; grey optimal solution

一、引言及记号

灰色系统理论在八十年代初由邓聚龙教授[1]提出以来，得到了广泛的研究和发展，并跨出了控制论领域及技术学科而渗透到社会、经济、管理决策、气象、生物、水利及生态环境等各个领域，逐渐形成一个横向学科。其内容包括灰色建模，灰色预测、灰色决策和灰色控制等。本文所讨论的灰色线性规划属于灰色决策的范畴。下面主要叙述有关灰色线性规划的进展与成果，这方面的文章笔者见到的很有限，主要来自于文献[1]。

1. 把灰色生成数预测模型（GM（1.1））引进了线性规划，在某种程度上克服了线

本文于1988年10月21日收到

性规划静态的缺点。适用于约束条件的约束值随时间变化，并可以用时间序列表示的情形。

2. 把灰数引入线性规划，即允许线性规划的系数是灰数，特别是在区间上取值的灰数，并对目标值相应于灰数而变化的范围即目标值的漂移范围进行讨论。

3. 提出了相对解的概念，即灰线性规划的目标函数并不要求达到严格极值，而只要求它落在某一预先指定的范围，此时的解称为灰线性规划的相对解。

迄今为止，有关灰线性规划的讨论只停留在具体应用和举例上，在基础理论甚至基本概念方面的探讨尚欠缺。本文试图在此基础上，对一类灰系数在区间取值的灰线性规划作一些理论上的探讨，从而为实际应用提供一定的的理论依据和求解方法。

以下是本文中使用的一些符号：$\otimes$为一般灰数；$\otimes(a_i)$为以a_i为白化值的灰数；$\widetilde{\otimes}$或$\widetilde{\otimes}(a_i)$表示灰数$\otimes$的白化值，$\widetilde{\otimes}(a_i)$可能是a_i也可能不是a_i；$\otimes(A)$表示灰矩阵，$\otimes(b)$，$\otimes(c)$表示灰向量。

二、灰线性规划及其灰最优解

本文将讨论如下形式的灰线性规划：

$$(GL)\begin{cases}\max z=\widetilde{\otimes}(c)^T x\\ \text{s.t.}\ \widetilde{\otimes}(A)x\leqslant\widetilde{\otimes}(b)\\ x\geqslant 0\end{cases}$$

其中 $\widetilde{\otimes}(c)=(c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$，$c_j\in[\underline{c}_j, \overline{c}_j]$；

$\widetilde{\otimes}(A)=(a_{ij})_{m\times n}$，$a_{ij}\in[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$；$\widetilde{\otimes}(b)=(b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$，$b_i\in[\underline{b}_i, \overline{b}_i]$，

$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，$x_j\in R$，$i=1, \cdots, m$，$j=1, \cdots, n$。

为了求解灰线性规划，我们给出两个有关的规划，（FGL）称为（GL）的第一白化线性规划：

$$(FGL)\begin{cases}\max\ z=\overline{c}^T x\\ \text{s.t.}\ \underline{A}x\leqslant\overline{b}\\ x\geqslant 0\end{cases}$$

其中 $\overline{c}=(\overline{c}_1, \overline{c}_2, \cdots, \overline{c}_n)^T$；$\underline{A}=(\underline{a}_{ij})_{m\times n}$；$\overline{b}=(\overline{b}_1, \overline{b}_2, \cdots, \overline{b}_m)^T$，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$。

（SGL）为（GL）的第二白化线性规划：

$$(SGL)\begin{cases}\max\ z=\underline{c}^T x\\ \text{s.t.}\ \overline{A}x\leqslant\underline{b}\\ x\geqslant 0\end{cases}$$

这里 $\underline{c}=(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \cdots, \underline{c}_n)^T$，$\overline{A}=(\overline{a}_{ij})_{m\times n}$，

$\underline{b}=(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \cdots, \underline{b}_m)^T$, $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$。

定义2.1 x称为(GL)的灰可行解，若存在某$\tilde{\otimes}(A)$及$\tilde{\otimes}(b)$，使$\tilde{\otimes}(A)x\leqslant\tilde{\otimes}(b)$且$x\geqslant 0$

灰可行解的全体称为(GL)的灰可行域，记作$R(GL)$。

定义2.2 x_0称为(GL)的灰最优解，若存在$\tilde{\otimes}(c)$，$\tilde{\otimes}(A)$及$\tilde{\otimes}(b)$，使x_0为白化线性规划：

$$(\widetilde{GL})\begin{cases}\max\ z=\tilde{\otimes}(c)^T x,\\ \text{s.t.}\ \tilde{\otimes}(A)x\leqslant\tilde{\otimes}(b),\\ \qquad x\geqslant 0。\end{cases}$$

的最优解。

(GL)的全体灰最优解所成之集称为(GL)的灰最优解集，记作$S(GL)$。

引理2.1 (GL)的灰可行域与(FGL)的可行域相同，即：$R(GL)=R(FGL)$。

引理2.2 设x_1是(FGL)的最优解，x_2是(SGL)的最优解，则：

$$\overline{c}^T x_1=\max\{\tilde{\otimes}(c)^T x\mid x\in S(GL)\},$$

$$\underline{c}^T x_2=\min\{\tilde{\otimes}(c)^T x\mid x\in S(GL)\}。$$

引理2.3 对(GL)的任一白化线性规划($\widetilde{GL}$)有：$R(SGL)\sqsubseteq R(\widetilde{GL})\sqsubseteq R(FGL)$。

对应于原灰线性规划(GL)，我们考虑如下形式的灰线性规划：

$$(DGL)\begin{cases}\min\ z=\otimes(b)^T v,\\ \text{s.t.}\ \otimes(A)^T v\geqslant\otimes(c)^T,\\ \qquad v\geqslant 0\end{cases}$$

其中 $v=(v_1, v_2, \cdots, v_m)^T$为$m\times 1$列变元向量。

称(GL)为原灰线性规划，(DGL)为对偶灰线性规划。它们互为灰对偶，下面将证明此结论。

(FD)为(DGL)的第一白化线性规划：

$$(FD)\begin{cases}\min\ z=\underline{b}^T v,\\ \text{s.t.}\ \overline{A}^T v\geqslant\underline{c}^T,\\ \qquad v\geqslant 0。\end{cases}$$

(SD)为(DGL)的第二白化线性规划：

$$(SD)\begin{cases}\min\ z=\overline{b}^T v,\\ \text{s.t.}\ \underline{A}^T v\geqslant\overline{c}^T,\\ \qquad v\geqslant 0。\end{cases}$$

以下将讨论(GL)与(DGL)以及它们的解之间的一些关系。

引理2.4 (FGL)的对偶规划是(SD)；(SGL)的对偶规划为(FD)。

命题2.1 若$R(SGL)\neq\phi$，$S(FGL)\neq\phi$，则(GL)的任一白化线性规划都有最优

解。

证，由引理2.3，有：$R(SGL)\subseteq R(\widetilde{GL})\subseteq R(FGL)$。∴由$R(SGL)\neq\phi$得：$R(\widetilde{GL})\neq\phi$ $\forall x\in R(\widetilde{GL})$，并设$x_0\in S(FGL)$。由引理2.2：

$$\widetilde{\otimes}(c)^Tx\leqslant\overline{c}^Tx\leqslant\overline{c}^Tx_0,\quad \therefore S(\widetilde{GL})\neq\phi.$$

命题2.2　若$R(SD)\neq\phi$，$R(\widetilde{GL})\neq\phi$，则$(\widetilde{GL})$有最优解；若$R(SGL)\neq\phi$，$R(\widetilde{DGL})\neq\phi$，则$(\widetilde{DGL})$有最优解。

证：若$R(SD)\neq\phi$，设某$(\widetilde{GL})$，$R(\widetilde{GL})\neq\phi$，取$v_0\in R(SD)$，$x\in R(\widetilde{GL})$：

$\widetilde{\otimes}(c)^Tx\leqslant\overline{c}^Tx\leqslant(\underline{A}^Tv_0)^Tx=v_0^T\underline{A}x\leqslant v_0^T\widetilde{\otimes}(A)x\leqslant v_0^T\widetilde{\otimes}(b)$。

$\therefore S(\widetilde{GL})\neq\phi$.

同理可证后一结论。

命题2.3　(GL)与(DGL)的任一白化线性规划均有最优解的充要条件是$R(SD)\neq\phi$且$R(SGL)\neq\phi$。

证：必要性显然。

充分性：由$R(SGL)\neq\phi$得(GL)的任一白化线性规划$(\widetilde{GL})$的可行域非空，即$R(\widetilde{GL})\neq\phi$，从而有$R(FGL)\neq\phi$，$R(SD)\neq\phi$，再由命题2.2知：

$S(\widetilde{GL})\neq\phi$即$(\widetilde{GL})$有最优解。

同理可证，对任一$(\widetilde{DGL})$，$S(\widetilde{DGL})\neq\phi$。

命题2.4　若(GL)的任一白化线性规划均有最优解，则(DGL)的任一白化线性规划也有最优解。

证：事实上，(DGL)的任一白化线性规划必为(GL)的某一白化线性规划的对偶，再由线性规划的对偶原理，当$(\widetilde{GL})$有最优解时，其对偶$(\widetilde{DGL})$也有最优解。

综合以上各命题，关于(GL)与(DGL)，我们得出如下关系：

1. $S(GL)\neq\phi$，$S(DGL)\neq\phi$，即它们的灰最优解集均非空集；
2. $R(GL)=\phi$，$R(DGL)=\phi$，即它们的灰可行解域均为空集。
3. 一个灰线性规划有灰可行解，但其任一白化线性规划的目标函数在此灰可行域上无界，而另一灰线性规划无灰可行解。

于是，我们可以将(GL)与(DGL)看成一对灰色对偶对，且它们互为对偶。

由于本文所讨论的灰色线性规划，其灰系数为区间，所以其目标函数也有其特殊的性质，以下将讨论这方面的问题。

下面仍用引理2.2的记号，即x_1表示(FGL)的最优解，x_2表示(SGL)的最优解，并记：

$$f_1=\overline{c}^Tx_1,\quad f_2=\underline{c}^Tx_2.$$

命题2.5 （GL）的任一白化线性规划的最优目标值均落入区间$[f_2, f_1]$。

证：由引理2.3：$R(SGL)\subset R(\widetilde{GL})\subset R(FGL)$，其中$(\widetilde{GL})$为$(GL)$的任一白化线性规划，设其最优目标值为$\widetilde{f}=\widetilde{\otimes}(c)^Tx'$，有：

$$f_2=\underline{c}^Tx_2\leqslant\widetilde{\otimes}(c)^Tx_2\leqslant\widetilde{f}=\widetilde{\otimes}(c)^Tx'\leqslant\overline{c}^Tx_1=f_1.$$

$$\therefore\qquad \widetilde{f}\in[f_2,\ f_1]。$$

命题2.6 对任意$\widetilde{f}\in[f_2, f_1]$，必有（$GL$）的某一白化线性规划（$\widetilde{GL}$），使得$(\widetilde{GL})$的最优目标值等于$\widetilde{f}$。

证：为了有助于命题的论证，引入如下参数线性规划：

$$P(\alpha):\quad \begin{aligned}&\max\ z=c(\alpha)^Tx,\\ &\text{s.t.}\ A_1(\alpha)x\leqslant b_1(\alpha),\\ &\qquad x\geqslant 0.\end{aligned}$$

其中 $c(\alpha)=\underline{c}+\alpha(\overline{c}-\underline{c})$，$A(\alpha)=\overline{A}-\alpha(\overline{A}-\underline{A})$，$b(\alpha)=\underline{b}+\alpha(\overline{b}-\underline{b})$，$x=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$0\leqslant\alpha\leqslant1$。

显然，$P(0)$即为（SGL），$P(1)$即为(FGL)，并且对于任意固定的$\alpha\in[0, 1]$，$P(\alpha)$均为（GL）的一个白化线性规划。

对于参数线性规划$P(\alpha)$，由于目标函数及约束条件中的函数$c(\alpha)^Tx$，$A(\alpha)x$，$b(\alpha)$均为α的连续函数，由$T.Gal$[3]知，其最优值函数$z^*(\alpha)$也为α的连续函数。且显然有$z^*(0)=f_2$，$z^*(1)=f_1$，从而任取$\widetilde{f}\in[f_2, f_1]$，必有$\alpha_0\in[0, 1]$，使$z^*(\alpha_0)=\widetilde{f}$，即$\widetilde{f}$为（$GL$）的白化线性规划：

$$\begin{cases}\max\ z=c(\alpha_0)^Tx,\\ \text{s.t.}\ A(\alpha_0)x\leqslant b(\alpha_0),\\ \qquad x\geqslant 0.\end{cases}$$

的最优目标值。

称$[f_2, f_1]$为（GL）的灰最优目标区间。

命题2.6的证明使我们看到，参数线性规划$P(\alpha)$不仅是（GL）的一部分，而且是使我们了解（GL）的重要的一部分，因此，有必要对$P(\alpha)$作一些探讨。

引理2.5 对任意的α_1，$\alpha_2\in[0, 1]$，$\alpha_1\leqslant\alpha_2$有$R(\alpha_1)\subseteq R(\alpha_2)$，这里，$R(\alpha_1)$及$R(\alpha_2)$表示$P(\alpha_1)$及$P(\alpha_2)$的可行域。

证：$\forall\alpha_1$，$\alpha_2\in[0, 1]$，$\alpha_1\leqslant\alpha_2$，$x\in R(\alpha_1)$。

$$\begin{aligned}[\overline{A}-\alpha_2(\overline{A}-\underline{A})]x&=[\overline{A}-\alpha_1(\overline{A}-\underline{A})]x+(\alpha_1-\alpha_2)(\overline{A}-\underline{A})x\\ &\leqslant\underline{b}+\alpha_1(\overline{b}-\underline{b})+(\alpha_1-\alpha_2)(\overline{A}-\underline{A})x\\ &\leqslant\underline{b}+\alpha_1(\overline{b}-\underline{b})\\ &\leqslant\underline{b}+\alpha_2(\overline{b}-\underline{b}).\end{aligned}$$

$\therefore \quad x \in R(\alpha_2)$　即$R(\alpha_1) \subseteq R(\alpha_2)$。

以上不等式成立，因为$x \geqslant 0$，$(\alpha_1 - \alpha_2) \leqslant 0$，$(\bar{A} - \underline{A}) \geqslant 0$，

$$\therefore \quad (\alpha_1 - \alpha_2)(\bar{A} - \underline{A})x \leqslant 0$$

命题2.7　最优值函数$z^*(\alpha)$是α的单调函数。即对任意α_1，$\alpha_2 \in [0, 1]$，$\alpha_1 \leqslant \alpha_2$，有$z^*(\alpha_1) \leqslant z^*(\alpha_2)$。

证：设α_1，$\alpha_2 \in [0, 1]$，$\alpha_1 \leqslant \alpha_2$，由引理2.5知，$R(\alpha_1) \subseteq R(\alpha_2)$。

又$\because \underline{c} + \alpha_1(\bar{c} - \underline{c}) \leqslant \underline{c} + \alpha_2(\bar{c} - \underline{c})$即：$c(\alpha_1) \leqslant c(\alpha_2)$，而$x \geqslant 0$

$$\therefore \quad z^*(\alpha_1) = \max_{x \in R(\alpha_1)} c(\alpha_1)^T x \leqslant \max_{x \in R(\alpha_1)} c(\alpha_2)^T x \leqslant \max_{x \in R(\alpha_2)} c(\alpha_2)^T x = z^*(\alpha_2),$$

$$\therefore \quad z^*(\alpha_1) \leqslant z^*(\alpha_2)。$$

由以上的讨论可以看出，我们所定义的（GL）的第一白化和第二白化线性规划是解（GL）的关键，解出（FGL）和（SGL）我们就可对（GL）的最优目标有个大概而基本的了解，因为（GL）的最优目标值构成一个区间，而此区间的两个端点正好是这两个白化线性规划的最优目标值。而参数线性规划$P(\alpha)$无疑可以作为解（GL）的一个有力工具，因为它的最优目标值所成区间与（GL）的灰最优目标区间相同，从而它代表了（GL）的最重要的一部分，另外，$P(\alpha)$的最优值函数$z^*(\alpha)$具有很好的性质——单调性，这在实际工作中无疑会带来方便。特别是在解灰线性规划问题时，常有一类是预先给定了目标期望值的，这时，先求出$z^*(0)$与$z^*(1)$，构成（GL）的灰目标区间，与期望区间进行比较，根据$z^*(\alpha)$的单调性，选出适当α_0，求解$P(\alpha_0)$而得出较满意的解。

为了对前面的讨论作实验性说明，兹举例如下：

例：求解下述灰线性规划：

$$(GL)\begin{cases} \max\ z = \otimes_1 x_1 + \otimes_2 x_2, \\ \text{s.t.} \otimes_{11} x_1 + \otimes_{12} x_2 \leqslant \otimes(b_1), \\ \qquad \otimes_{21} x_1 + \otimes_{22} x_2 \leqslant \otimes(b_2), \\ \qquad \otimes_{31} x_1 + \otimes_{32} x_2 \leqslant \otimes(b_3), \\ \qquad x \geqslant 0。\end{cases}$$

其中　$\otimes_1 \in [1, 7]$，$\otimes_2 \in [4, 12]$；$\otimes_{11} \in [1, 2]$，$\otimes_{12} \in [4, 10]$，$\otimes_{21} \in [4, 6]$，$\otimes_{22} \in [1, 3]$，$\otimes_{31} \in [1, 3]$，$\otimes_{32} \in [-1, 1]$；
$\otimes(b_1) \in [200, 240]$，$\otimes(b_2) \in [150, 200]$，$\otimes(b_3) \in [30, 40]$。

解：1)先写出（GL）的第一和第二白化线性规划：

$$(FGL)\begin{cases} \max\ z = 7x_1 + 12x_2, \\ \text{s.t.}\ x_1 + 4x_2 \leqslant 240, \\ \qquad 4x_1 + x_2 \leqslant 200, \\ \qquad x_1 - x_2 \leqslant 40, \\ \qquad x \geqslant 0。\end{cases} \qquad (SGL)\begin{cases} \max\ z = x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.}\ 2x_1 + 10x_2 \leqslant 200, \\ \qquad 6x_1 + 3x_2 \leqslant 150, \\ \qquad 3x_1 + x_2 \leqslant 30, \\ \qquad x \geqslant 0。\end{cases}$$

2)　（GL）的灰对偶线性规划如下：

$$(DGL)\begin{cases}\min\ z=\otimes(b_1)v_1+\otimes(b_2)v_2+\otimes(b_3)v_3,\\ \text{s.t.}\ \otimes_{11}v_1+\otimes_{21}v_2+\otimes_{31}v_3\geqslant\otimes_1,\\ \quad\otimes_{12}v_1+\otimes_{22}v_2+\otimes_{32}v_3\geqslant\otimes_2,\\ \quad v\geqslant 0。\end{cases}$$

也可写出（DGL）的第一和第二白化线性规划：

$$(FD)\begin{cases}\min\ z=200v_1+150v_2+30v_3,\\ \text{s.t.}\ 2v_1+6v_2+3v_3\geqslant 1,\\ \quad 10v_1+3v_2+v_3\geqslant 4,\\ \quad v\geqslant 0.\end{cases}$$

$$(SD)\begin{cases}\min\ z=240v_1+200v_2+40v_2,\\ \text{s.t.}\ v_1+4v_2+v_3\geqslant 7,\\ \quad 4v_1+v_2-v_3\geqslant 12,\\ \quad v\geqslant 0.\end{cases}$$

显然，（FD）即为（SGL）的对偶，（SD）即为（FGL）的对偶。

3） 用对偶单纯形法解得：

（FGL）的最优解为（x_1^*，x_2^*）$=\left(\frac{112}{3},\ \frac{152}{3}\right)$，（$SD$）的最优解为（$v_1^*$，$v_2^*$，$v_3^*$）$=\left(\frac{41}{15},\ \frac{16}{15},\ 0\right)$，它们的共同最优值为$z^*=869$；（$SGL$）的最优解为（$x_1^*$，$x_2^*$）$=\left(\frac{25}{7},\ \frac{135}{7}\right)$，（$FD$）的最优解（$v_1^*$，$v_2^*$，$v_3^*$）$=\left(\frac{11}{28},\ 0,\ \frac{1}{14}\right)$，它们的最优目标值为：$z^*=81$。于是，（$GL$）的灰最优目标区间为〔81，869〕，（$GL$）的任一白化线性规划均有最优解，且其最优目标值落入区间〔81，869〕。

4） 若预先给定目标区间〔500，700〕，求出一个使目标值落入该区间的灰最优解。

我们用参数线性规划解这个问题：

$$P(\alpha)\begin{cases}\max\ z=(1+6\alpha)x_1+(4+8\alpha)x_2,\\ \text{s.t.}\ (2-\alpha)x_1+(10-6\alpha)x_2\leqslant 200+40\alpha,\\ \quad(6-2\alpha)x_1+(3-2\alpha)x_2\leqslant 150+50\alpha,\\ \quad(3-2\alpha)x_1+(1+2\alpha)x_2\leqslant 3)+10\alpha,\\ \quad x\geqslant 0.\end{cases}$$

显然，$P(0)$即为（SGL），$P(1)$即为（FGL）。所以有$z^*(0)=81$，$z^*(1)=869$，$z^*(\alpha)$为α的单调函数，考虑到区间〔500，700〕与区间〔81，869〕之关系，我们试算$P(0.8)$，得$z^*(0.8)=556\in$〔500，700）$\cap$〔81，869〕，且得（x_1^*，x_2^*）$=\left(\frac{829}{26},\ \frac{12593}{338}\right)$为所求之解。

结　语

本文对一类灰系数为区间的灰线性规划作了探讨，给出了一些基本概念和定义，如灰可行解，灰最优解及第一和第二白化线性规划等。并定义和探讨了其灰对偶线性规划及它们的解之间的关系，不仅为灰线性规划作了一些理论方面的研究，同时也提出了一些解灰线性规划问题的方法。

参 考 文 献

〔1〕 邓聚龙，灰色系统基本方法，华中工学院出版社，1987。

〔2〕 邓聚龙，灰色控制系统，华中工学院出版社，1987。

〔3〕 Gal, T., Linear parametric programming——A brief survey. Math. Prog. Study. 1984, 21.

〔4〕 俞玉森，数学规划的原理与方法，华中工学院出版社，1985。