1989年7月 重 庆 大 学 学 报 Vol.12, No.4
第12卷第4期 JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY Jul.1989

关于完备超图的c度h—超星HS)分解

DECOMPOSITION OF THE COMPLETE HYPERGRAPH INTO THE C-DEGREE H-HYPERSTAR

刘 琼 荪

Liu Qiongsuu

（应用数学系）

摘 要 本文论证了超图$K^{h}_{n_1,n_2,\cdots n_r}$可$c$度$h-HS$分解的存在性条件，同时，给出了超图$K^3_n$可4度3－$HS$分解存在的充要条件，部分地解决了文献〔3〕中遗留的问题。

关键词 完备超图；超星（HS）分解；图论。

ABSTRACT This pater is concerned with the existing condition on decomposition of hypergraph $K^{h}_{n, n, \cdots n}$ into edge－disjoint elementary c－degree h－HS, and has given a necessary and sufficient condition that hypergraph K^3_n can decompose into 4－degree 3－HS.

KEY WORDS complete hypergraph; hyperstar(HS) decomposition

超图的分解问题是重要而有趣的图论问题，它与组合数学中的组合设计直接有关，在各种试验设计、计算机网络优化、电力系统分析以及管理工程等方面有广泛的应用价值。

下面先介绍一些基本概念：

设X为n元集合，由集X所产生的子集类$\varepsilon=\left\{E_i \mid E_i\subset X;\ E_i\neq\phi,\ i\in I,\ \bigcup\limits_{i\in I}E_i=X\right\}$构成的二元组（$X$，$\varepsilon$）称为一个超图[1]记为$H=(X,\varepsilon)$。称超图$H$可分解为子超图$F$是指超图$H$的边集$\varepsilon$可分解为有限个互不相交的且同构于$F$的子集序列。特别，有两类特殊超图：

1． 如果集合ε由n元集X中的一切h—子集所构成，则称超图$H=(X,\varepsilon)$为h—致完备超图，记H为K^h_n。显然：$|X|=r$；$|\varepsilon|=\binom{n}{h}$。特别$h=2$时，$K^2_n$为完备图，简记为

本文于1988年4月13日收到

K_n。

2. 如果超图H的顶点集$X=\bigcup_{i=1}^{r}X_i$，$X_i\cap X_j=\phi$，$i\neq j$，$|X_i|=n_i$，$i=1,2,\cdots,r$，$\sum_{i=1}^{r}n_i=n$；边集为：

$$\varepsilon=\{E\mid E\subset X,\ |E\cap X_i|\leqslant 1,\ i=1,2\cdots r,\ |E|=h,\ r\geqslant h\}$$

则称超图$H=(X,\varepsilon)$为r—元h—一致完备超图，记H为$K^h_{n_1,n_2\cdots n_r}$[2]。特别，$n_1=n_2=\cdots=n_r=n$，记$K^h_{n_1,n_2,\cdots n_r}$为$K^h_{r\times n}$。

定义[3]：设超图$H=(X,E_1,E_2,\cdots E_c)$，如果H的边集

$\{E_1,E_2,\cdots,E_c\}$满足：i）$|E_i|=h$　$i=1,2\cdots c$

ii）$\left|\bigcap_{i=1}^{c}E_i\right|=h-1$

则称该超图H为c度h—超星，简记为c度$h-HS$。

称$\bigcap_{i=1}^{c}E_i$为该H的根，$E_j/\left(\bigcap_{i=1}^{c}E_i\right)$ $j=1,2\cdots c$为H的叶。

本文先给出了当$r=h$时，超图$K^h_{n_1\cdots n_h}$可c度$h-HS$分解的存在性条件，然后，分析$r>h$时的情形。

注：超图$K^h_{n_1,n_2\cdots n_h}$的顶点数为$\sum_{i=1}^{h}n_i$，边数为$\prod_{i=1}^{h}n_i$

引理1：超图$K^h_{n_1,n_2\cdots n_h}$可分解为c度$h-HS$的充要条件是：至少存在一个$n_i\in\{n_1,n_2,\cdots n_h\}$，使$c\mid n_i$。

证明："充分性"。

因存在$n_i\in\{n_1,n_2,\cdots n_h\}$，使$c\mid n_i$，故$n_i=cz$（$z>0$，整数）。存在集合$X_i$，使得$|X_i|=n_i$。将集合$X_i$划分成$z$个互不相交的$c$—元集$S_1$，$S_2$，$\cdots S_z$。又由$\{X_1,X_2,\cdots X_h\}/\{X_i\}$及它产生的一切—（$h-1$）—子集族$\tilde{\varepsilon}\triangleq\left\{\tilde{E}\mid\tilde{E}\subset\bigcup_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{h}X_j,\ |\tilde{E}\cap X_j|\leqslant 1,\right.$ $j=1,2,\cdots h$，$j\neq i$；$|\tilde{E}|=h-1\}$，构成新的（$h-1$）—元（$h-1$）—致完备超图$K^{h-1}_{n_1,\cdots n_{i-1},n_{i+1}\cdots n_h}$，则对该超图的任意一边$\tilde{E}$以及任意一个$c$—元集$S_i=\{x_1^i,x_2^i,\cdots x_c^i\}i\in\{1,2,\cdots z\}$，定义$h$—边集序列：$\{(\tilde{E},x_1^i),(\tilde{E},x_2^i)\cdots(\tilde{E},x_c^i)\}$，$i=1,2\cdots z$，它构成一个$c$度$h-HS$，共产生$\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{h}n_j\right)z$个互不相交的$c$度$h-HS$，正是超图

$K^h_{n_1,n_2,\cdots n_h}$ 的 c 度 $h-HS$ 分解。

"必要性"。

如果 $K^h_{n_1,n_2\cdots n_h}$ 可分解为 c 度 $h-HS$，按 c 度 $h-HS$ 的定义及超图 $K^h_{n_1\cdots n_h}$ 的边集的性质知，对超图 $K^h_{n_1,\cdots n_h}$ 的任一 c 度 $h-HS$ 因子 $(E_1,E_2,\cdots E_c)$，$E_i\in\varepsilon(K^h_{n_1\cdots n_h})$，其分解形式只能是：叶 $\left\{E_j/\bigcap\limits_{k=1}^{c}E_k,\ j=1,\ 2\cdots c\right\}\subseteq X_i$（对某个 i）根 $\bigcap\limits_{k=1}^{c}E_k\in\varepsilon$ $(K^h_{n_1\cdots n_{i-1},n_{i+1},\cdots n_h})$，因此，至少存在某个 i，使得 $|X_i|=n_i\geqslant c$。否则，超图 $K^h_{n_1,n_2\cdots n_h}$ 不可 c 度 $h-HS$ 分解。令 $I=\{i\,|\,|X_i|=n_i\geqslant c\}\subseteq\{1,\ 2\cdots h\}$ $I\neq\phi$，设 $n_i=cq_i+p_i$，$i\in I$，$0\leqslant p_i<c$，$q_i\geqslant 1$ 整数。由于任一 c 度 $h-HS$ 因子的叶只可能产生于 X_i，$i\in I$ 中，则对超图 $K^h_{n_1\cdots n_h}$ 中一切边集进行如下划分：

$$i\in I,\ \varepsilon(K^h_{n_1,n_2,\cdots n_h})=\varepsilon(K^h_{n_1\cdots cq_i\cdots n_h})+\varepsilon(K^h_{n_1\cdots p_i\cdots n_h})$$

若 $p_i=0$，则 $\varepsilon(K^h_{n_1\cdots p_i\cdots n_h})=\phi$，且 $n_i=cq_i$ 必要性已得证。若 $p_i>0$，由充分性的证明知，$\varepsilon(K^h_{n_1\cdots cq_i\cdots n_h})$ 可分解为 c 度 $h-HS$，又由已知条件知，$\varepsilon(K^h_{n_1\cdots p_i\cdots n_h})$ 一定可 c 度 $h-HS$ 分解。但 $p_i<c$ 故必存在 $i'\in I$，不妨设 $i'<i$，使得 $\varepsilon(K^h_{n_1\cdots p_i\cdots n_h})=$ $\varepsilon(K^h_{n_1\cdots cq_{i'}\cdots p_i\cdots n_h})+\varepsilon(K^h_{n_1\cdots p_{i'}\cdots p_i\cdots n_h})$ 同上分析，若 $p_{i'}=0$ 问题得证，若 $p_{i'}>0$，必存在 $i''\in I$，使得 $\varepsilon(K^h_{n_1\cdots p_{i'}\cdots p_i\cdots n_h})$ 又继续分解，由于 I 是一个有限集，最终要使边集 $\varepsilon(K^h_{n_1\cdots p_{i'}\cdots p_i\cdots n_h})$ 能 c 度 $h-HS$ 分解，必存在某个 i_0，使 $p_{i_0}=0$，即 $n_{i_0}=cq_{i_0}$。必要性得证。

定理1：如果 $r>h$，集合 $\{n_1\cdots n_r\}$ 中有 $r-h+1$ 个元素能被 c 整除，则超图 $K^h_{n_1\cdots n_r}$ 可 c 度 $h-HS$ 分解。

证明：因超图 $K^h_{n_1\cdots n_r}$ 的边数为 $\sum\limits_{\forall\{i_1\cdots i_h\}\subset\{1,\ 2\cdots r\}} n_{i_1}n_{i_2}\cdots n_{i_h}$，故考虑超图 $K^h_{n_1\cdots n_r}$ 的边分解：

$$\varepsilon(K^h_{n_1\cdots n_r})=\bigcup_{\forall\{i_1\cdots i_h\}\subset\{1,\ 2\cdots r\}}\varepsilon(K^h_{n_{i_1}\cdots n_{i_h}})$$

其中 $\varepsilon(K^h_{n_{i_1}\cdots n_{i_h}})\cap\varepsilon(K^h_{n_{j_1}\cdots n_{j_h}})=\phi$，$\{i_1\cdots i_h\}\neq\{j_1\cdots j_h\}$

又因集合 $\{n_1\cdots n_r\}$ 中只有 $h-1$ 个元数不能被 c 整除，故集合 $\{n_1\cdots n_r\}$ 中的任意 h—元子集 $\{n_{i_1}\cdots n_{i_h}\}$ 至少有一个元 n_{i_l} 能被 c 整除。由引理知，超图 $K^h_{n_{i_1}\cdots n_{i_h}}$ $\forall\{i_1\cdots i_h\}\subset\{1,\ 2\cdots r\}$ 可 c 度 $h-HS$ 分解，则超图 $K^h_{n_1\cdots n_r}$ 也可 c 度 $h-HS$ 分解。

推论：当$r\geqslant h$，$c\mid n$时，超图$K^{h}_{r\times n}$可c度$h-HS$分解。

证明：（略）

定理2：如果超图$K^{h}_{n_1\cdots n_r}$（$r\geqslant h$）可$p\cdot q$度$h-HS$分解，（p，$q\geqslant 1$整数），则超图$K^{h}_{n_1\cdots n_r}$也可p度（或q度）$h-HS$分解。

证明：对$K^{h}_{n_1\cdots n_r}$的任一$p\cdot q$度$h-HS$因子$\{E_1\cdots E_{p\cdot q}\}$，可划分为$q$个$p$—元集（或$p$个$q$—元集），则显然得到该定理的结论。

注：1.对完备二元图K_{n_1,n_2}，利用引理得知K_{n_1,n_2}，可c度星分解的充要条件是$c\mid n_1$或$c\mid n_2$。

2.对完备r—元图$K_{n_1\cdots n_r}$，$r>2$，如果c是集$\{n_1,n_2,\cdots n_r\}$中的$r-1$个元素的公因子，则$K_{n_1\cdots n_r}$可c度星分解。

下面，利用定理1，将给出超图K^3_n可4度$3-HS$分解的充分条件。部分地证实了文献中〔3〕提出的猜想的正确性。

文献〔3〕中已得到结果，超图K^3_n可4度$3-HS$分解的必要条件是$4\left|\binom{n}{3}\right.$，$n\geqslant 8$，本文要证，该必要条件也是充分条件。为此，先给出两个命题。

命题1：超图K^3_8可分解为$\frac{1}{4}C^3_8$个4度$3-HS$。

证明：设超图K^3_8的顶点集为$X=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，具体构造分解如下：

根（roots）	叶（leaves）	根（roots）	叶（leaves）
12	5，3，7，8	56	8，2，3，4，
23	5，6，4，8	67	1，5，3，4，
34	5，6，7，8	78	1，2，3，4，
14	5，6，7，8	58	1，2，3，4，
13	5，4，7，8	57	1，8，3，4，
24	5，6，1，8	68	7，2，3，4，
16	2，3，5，8	27	3，4，5，6，

可以验证：共有$\frac{1}{4}C^3_8=14$个4度$3-HS$，且边无重复、无遗漏，从而得到超图K^3_8的4度$3-HS$分解。

命题2：超图K^3_9，K^3_{10}均可分解为4度$3-HS$。

证明：类似于命题1的构造，略。

注：文献〔3〕中已证明超图K^3_{12}，K^3_{14}可4度$3-HS$分解。

引理2：n为奇数，$n\geqslant 9$，$4\mid C^3_n$的充要条件是$n=8k+1$，$k\geqslant 1$整数。

证明："必要性"。

因$n\geqslant 9$，n为奇数，故设$n=4t+1$或$n=4t+3$，$t\geqslant 2$整数。

1）．当$n=4t+3$，$t\geqslant 2$整数时，

$$\frac{1}{4}C_n^3=\frac{(4t+3)(4t+2)(4t+1)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

因分子不含因子8故$\frac{1}{4}C_n^3$非整数，按必要性条件知，排斥$n=4t+3$，$t\geqslant 2$的情形。

2）．当$n=4t+1$，$t\geqslant 2$整数时。

$$\frac{1}{4}C_n^3=\frac{(4t+1)(4t)(4t-1)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \qquad (*)$$

因任何连续三个正整数之积必含因子3，所以，要使（*）式为整数，只需$8|4t$，即$2|t$，令$t=2k$，$k\geqslant 1$整数，故$n=8k+1$、（$k\geqslant 1$）

"充分性"，显然。

定理3：如果$n=8k+1$，$k\geqslant 1$整数，则超图K_n^3可4度$3-HS$分解。

证明：设超图K_n^3的顶点集为$X=\{1,2,\cdots n\}$，又$n=8k+1$，$k\geqslant 1$整数，当$k=1$时，$n=9$，由命题2知，超图K_n^3可4度$3-HS$分解。故设$k\geqslant 2$，将集合X划分为$k-1$个互不相交的8—元集S_1、S_2，$\cdots S_{k-1}$和一个9—元集S'_k，且$S_i\cap S'_k=\phi$，$i=1,2\cdots k-1$。由此，将超图K_n^3的边集划分为3类：

1）．ε_1为所有子超图$K_8^3[S_i]$，$i=1,2,\cdots k-1$，$K_9^3[S'_k]$的边集的并。其中$K_8^3[S_i]$表示由顶点集S_i生成的子完备超图。

2）．ε_2为超图$K^3_{\underbrace{8,8,\cdots 8}_{k-1},9}[S_1,S_2,\cdots S_{k-1},S'_k]$的边集。注：当$k=2$时，$\varepsilon_2=\phi$。

3）．ε_3为子超图$K_{8,8}^3[S_i,S_j]i\neq j$，$i,j=1,2\cdots k-1$，$K_{8,9}^3[S_i,S'_k]$的全体边集的并。

可以计算：$|\varepsilon_1|=(k-1)C_8^3+C_9^3$；

$$|\varepsilon_2|=C_{k-1}^3\cdot 8^3+C_{k-1}^2\cdot 8^2\cdot 9;$$

$$|\varepsilon_3|=2C_{k-1}^2\cdot C_8^2\cdot C_8^1+C_{k-1}^1[C_8^2C_9^1+C_8^2C_8^1]，$$

且$|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|+|\varepsilon_3|=C_n^3$　（具体验证略）。

由命题1，2及定理1知，边集ε_1，ε_2均可分解为4度$3-HS$。只需证明ε_3的分解可行性。而在类ε_3中只证超图$K_{8,9}^3[S_i,S'_k]\forall i\in\{1,2\cdots k-1\}$中形如$\{E|\ |E\cap S_i|=2$，

$|E\cap S_h'|=1$，$|E|=3\}$的边可分解为4度3—HS即可，对e_3中其它情形的分解显然是可行的。设$S_i=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，以及$S_h'=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$具体安排分解如下：

根（roots）	叶（leaves）								
	I				II				
(1) 2	(a),	b,	c,	d,	e,	f,	g,	h,	i
(1) 3	(a),	b,	c,	d,	e,	f,	g,	h,	i
(1) 4	(a),	b,	c,	d,	e,	f,	g,	h,	i
1 (5)	a,	b,	c,	d,	(e),	f,	g,	h,	i
1 (6)	a,	b,	c,	d,	e,	(f),	g,	h,	i
1 (7)	a,	b,	c,	d,	e,	f,	(g),	h,	i
(1) 8	(a),	b,	c,	d,	e,	f,	g,	h,	i
(2) 3	a,	(b),	c,	d,	e,	f,	g,	h,	i
(2) 4	a,	(b),	c,	d,	e,	f,	g,	h,	i
(2) 5	a,	(b),	c,	d,	e,	f,	g,	h,	i
2 (6)	a,	b,	c,	d,	e,	(f),	g,	h,	i
2 (7)	a,	b,	c,	d,	e,	f,	(g),	h,	i
(2) 8	a,	(b),	c,	d,	e,	f,	g,	h,	i
(3) 4	a,	b,	(c),	d,	e,	f,	g,	h,	i
(3) 5	a,	b,	(c),	d,	e,	f,	g,	h,	i
(3) 6	a,	b,	(c),	d,	e,	f,	g,	h,	i
3 (7)	a,	b,	c,	d,	e,	f,	(g),	h,	i
(3) 8	a,	b,	(c),	d,	e,	f,	g,	h,	i
(4) 5	a,	b,	c,	(d),	e,	f,	g,	h,	i.
(4) 6	a,	b,	c,	(d),	e,	f,	g,	h,	i
(4) 7	a,	b,	c,	(d),	e,	f,	g,	h,	i
(4) 8	a,	b,	c,	(d),	e,	f,	g,	h,	i
(5) 6	a,	b,	c,	d,	(e),	f,	g,	h,	i
(5) 7	a,	b,	c,	d,	(e),	f,	g,	h,	i
(5) 8	a,	b,	c,	d,	(e),	f,	g,	h,	i
(6) 7	a,	b,	c,	d,	e,	(f),	g,	h,	i
(6) 8	a,	b,	c,	d,	e,	(f),	g,	h,	i
(7) 8	a,	b,	c,	d,	e,	f,	(g),	h,	i

在叶的栏目中，取出带“（ ）”的边，添加含元素i的边，取出的一切带符号“（ ）”的边，组成7个新的4度$3-HS$：

根（ioots）	叶（leaves）
1 a	2，3，4，8，
2 b	3，4，5，8，

$3c$	4，5，6，8，
$4d$	5，6，7，8，
$5e$	6，7，8，1，
$6f$	1，7，8，2，
$7g$	8，2，1，3

故ε_3可4度$3-HS$分解。所以，当$n=8k+1$，$k\geqslant 1$时，超图K_n^3可4度$3-HS$分解。

定理4：如果$n\geqslant 8$偶，$4 \mid C_n^3$则超图K_n^3可4度$3-HS$分解。

证明：因$n\geqslant 8$偶，$4\mid C_n^3 \Longleftrightarrow n=8k+r$，$r=0，2，4，6$，$k\geqslant 1$整数，分以下几种情况讨论：

情形i)．当$n=8k$时，（$k\geqslant 1$）

如果$k=1$，$n=8$由命题1知K_n^3可4度$3-HS$分解。不妨设$k\geqslant 2$，类似于定理3的证明，设K_n^3的顶点集$X=\{1，2，\cdots n\}$，则将集合X划分为k个互不相交的8—元集S_1，S_2，$\cdots S_k$（$k\geqslant 2$），又将超图K_n^3的边集划分为互不相交的三类：

1)．ε_1：所有K_8^3〔S_i〕$i=1，2\cdots k$的边集；

2)．ε_2：超图$K_{k\times 8}^3$〔S_1，S_2，$\cdots S_k$〕的边集；

3)．ε_3：所有超图$K_{8,8}^3$〔S_i，S_j〕$i\neq j$，i，$j=1，2，\cdots k$的边集。

显然，这三类边集均可分解为4度$3-HS$，故超图K_n^3的4度$3-HS$分解是可行的。

情况ii)：当$n=8k+2$，$k\geqslant 1$时，

当$k=1$时，由命题2知，该定理结论成立。设$k\geqslant 2$，类似于定理3的分析，只是S_k'是一个10—元集，要使4度$3-HS$分解可行，只证超图$K_{8,10}^3$〔S_i，S_k'〕$\forall i\in\{1，2\cdots k-1\}$中形如$\{E \mid |E\cap S_i|=2，|E\cap S_k'|=1，|E|=3\}$的边可分解为4度$3-HS$。具体安排这类边集的分解，方法类似定理3的证明，略。

对于情况iii)、iv）即当$n=8k+4$以及$n=8k+6$，$k\geqslant 1$整数时，利用超图K_{12}^3，K_{14}^3其分解的可行性[3]以及定理3的证明方法，可证超图K_n^3是可4度$3-HS$的分解的。（略）

最后，综合定理3，4以及文献〔3〕中的必要条件，有下述定理：

定理5：超图K_n^3可4度$3-HS$分解的充要条件是$4\mid C_n^3$，$n\geqslant 8$。

本研究承刘松副教授的热情支持和帮助，谨此致以衷心感谢。

参 考 文 献

〔1〕 Berge, C., Graphs and Hypergraphs, North-Holland, Amsterdam, 1973.

〔2〕 Baranyai, zs., The edge-coloring of complete hypergraph I. J. Combinatorial Theory, 26(B), 1979, 276-294.

〔3〕 Yamamoto, S. and S. Tazawa, Hyperclaw decomposition of complete hypergraphs, Annals of Discrete Math. 6 1980. 385-391.