1989年11月 重 庆 大 学 学 报 Vol.12.No.6
第12卷第6期 JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY Nov.1989

广义牛顿程序

THE GENERALIZED NEWTON ITERATIVE PROCEDURE

杨 铎

Yang To

（四川省达县师范专科学校）

摘 要 本文提出了一种广义牛顿迭代程序，作为特例，它包含了通常的车贝谢夫程序、切双曲线程序和最速下降程序。

关键词 牛顿迭代法；车贝谢夫方法；最速下降法/切双曲线方法

中国图书资料分类法分类号 O177.99

ABSTRACT We suggest a class of generalized Newton method in this paper. As special exampls, it contains the usual Chebyshev method, tangent-hypobolic method and steepest descent method.

KEY WORDS Newton iteration method; Chebyshev method; steepest descent method / tangent-hypobolic method

一 引 言

在求解泛函方程的各种方法中，牛顿迭代是最基本而重要的方法之一。早在四十年代，苏联著名数学家康托诺维奇就对此作过重要的贡献，他将解一般非线性方程的牛顿—莱普生方法推广到 *Banach* 空间的泛函方程上[1]。我国许多数学家如关肇直、林群等人也对此有系统的研究[3]。本文的主要工作是对文〔1〕附录的推广，大致包含两个方面，一是将文〔1〕附录中定理1的条件给予了减弱，用ЛЯПУНОВ条件（即熟知的Hölder条件）代替了原来的Lipschitz条件，讨论了迭代的收敛性和敛速估计．二是将牛顿迭代中的$F'(x_n)^{-1}$代之以一般形式的函数$G(F'(x_n))$使定理具有更强的概括性，包含了通常的车贝谢夫程序、切双曲线程序和最速下降程序作为特例。在定理3又进一步用ЛЯПУНОВ条件代替了对$G(F'(x), F(x))$有有界导算子的要求。

本文于1988年8月26日收到

二、定理和例题

定理 1：假设泛函方程：

$$P(x)=0 \tag{1}$$

$P(x)$是由巴拿赫（Banach）空间X到巴拿赫（Banach）空间Y中的算子，$P'(x)$在x_0的某邻域$G\subset X$中存在。于是，若：

1．$P'(x_0)^{-1}$存在，$\|P'(x_0)^{-1}\|\leqslant\beta$，且$\|P(x_0)\|\leqslant L$；

2．$p'(x)$在G中球域：

$$\|x-x_0\|\leqslant r$$

满足ляпуновъ条件：

$$\|P'(x_1)-P'(x_2)\|\leqslant M\|x_1-x_2\|^{\alpha'},\ \alpha'\text{为任何实数} \tag{2}$$

3．$\beta^2ML+2\beta Mr\alpha'<2$。

其中，$r=\beta\left|\sum_{K=0}^{\infty}\alpha^{(1+\alpha')^K-1}\right|$，$\alpha=\dfrac{\beta^2ML}{2(1-\beta Mr\alpha')}$，（从而$\alpha<1$），则泛函方程（1）在球：

$$\|x-x_0\|\leqslant r$$

中有唯一的解x^*，且牛顿程序：

$$x_{n+1}=x_n-P'(x_n)^{-1}P(x_n)\quad(n=0,1,2,\cdots) \tag{3}$$

收敛到x^*，敛速估值为：

$$\|x_n-x^*\|\leqslant r_\alpha^{(1+\alpha')^n-1} \tag{4}$$

证明：类同于参考文献〔1〕中$P.251$—$P.253$的证明，仅需将$P.252$（8）式更正为：

$$\|P(x_n)\|\leqslant\frac{M}{2}\|x_n-x_{n-1}\|^{1+\alpha'}$$

即可，其余各部分证明相同。

讨论：当$\alpha'=1$时，此即〔1〕中$P251$之定理1。当$\alpha'>1$与$\alpha'<1$扩大了实用范围。当$\alpha'>1$比$\alpha'=1$的收敛速率更大。

定理 2：对泛函方程：

$$F(x)=0 \tag{5}$$

假设所有的G、F是作用于Banach空间中的算子，Q是G、F定义域中一开集，Q中以k为半径的球k，当其：

$$\|x-x_0\|\leqslant k$$

又若：

（i）　G与F皆有一、二阶连续导算子。

（ii）　$\|G(F'(x_0))\cdot F(x_0)\|\leqslant\eta$，$x_0\in G$。

（iii）　$\|I-[G(F'(x))\cdot F(x)]'\|\leqslant\alpha$，$0<\alpha<1$，$I$为单位算子，$x\in k$。

（iv）　$\eta/(1-\alpha)k\leqslant1$

则对广义牛顿程序：

$$x_{n+1}=x_n-G(F'(x_n))\cdot F(x_n) \tag{6}$$

序列$\{x_n\}$收敛到x^*，它是方程(5)的唯一解，且误差估计式在球：

$$\|x-x_0\|\leqslant k$$

中为：

$$\|x_n-x^*\|\leqslant\alpha^n k \tag{7}$$

证明：由(i)

$$\begin{aligned}\|x_1-x_0\|&=\|-G(F'(x_0)\cdot F(x_0)\|\\&\leqslant\eta\\&\leqslant(1-\alpha)k\\&\leqslant k\end{aligned}$$

$\therefore\quad x_1\in k.$

$$\begin{aligned}\because\quad\|x_2-x_1\|&=\|(x_1-x_0)-[G(F'(x_1))F(x_1)-G(F'(x_0))F(x_0)]\|\\&=\|I-[G(F'(x_{10}))\cdot F(x_{10})]'\|\cdot\|x_1-x_0\|\\&\leqslant\alpha\|x_1-x_0\|\\&\leqslant\alpha\eta\\&\leqslant\alpha k\\&<k\end{aligned}$$

其上由(i)：

$$x_{10}=x_0+\theta(x_1-x_0),\quad 0<\theta<1$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad\|x_2-x_0\|&=\|x_2-x_1+x_1-x_0\|\\&\leqslant\|x_2-x_1\|+\|x_1-x_0\|\\&\leqslant\alpha\eta+\eta\\&=(1+\alpha)\eta\\&>\frac{\eta}{1-\alpha}\\&\leqslant k\end{aligned}$$

$\therefore\quad x_2\in k.$

一般设x_{n-1}，$\cdots x_1\in k$。则

$$\begin{aligned}\|x_n-x_{n-1}\|&=\|(x_{n-1}-x_{n-2})-[G(F'(x_{n-1}))\cdot F(x_{n-1})-G(F'(x_{n-2}))F(x_{n-2})]\|\\&\leqslant\alpha\|x_{n-1}-x_{n-2}\|\\&\leqslant\alpha^{n-1}\|x_1-x_0\|\\&\leqslant\alpha^{n-1}\eta.\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\|x_n-x_0\|&\leqslant\|x_n-x_{n-1}\|+\cdots+\|x_1-x_0\|\\&\leqslant(\alpha^{n-1}+\cdots+\alpha+1)\eta\\&=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\eta\end{aligned}$$

$$< \frac{1}{1-\alpha}\eta$$

$$= k$$

$\therefore$ $x_n \in k$。

又$\because$ $||x_{n+p}-x_n|| \leqslant ||x_{n+p}-x_{n+p-1}|| + \cdots + ||x_{n+1}-x_n||$

$$\leqslant (\alpha^{p-1}+\cdots+\alpha+1)\alpha^n\eta$$

$$< \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\eta$$

$$\leqslant \alpha^n k \qquad (8)$$

$\therefore$当 $0<\alpha<1$ 时，基本序列 $\{x_n\}$ 是Banach空间中的Cauchy序列，由Banach空间的完备性，有

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$$

(8)中 n 固定．令 $q \longrightarrow \infty$ 有：

$$||x^*-x_n|| \leqslant \alpha^n k$$

由(i)G与F分别属于一、二阶连续导算子

$\therefore$ $$x^* = x^* - G(F'(x^*))\cdot F(x^*)$$

当G可逆时有

$\therefore$ $$F(x^*) = 0$$

现证x^*是(5)式唯一的解。设有(5)之另一解Z，那么由(6)有：

$$||x^*-Z|| = ||(x^*-Z)-[G(F'(x^*))\cdot F(x^*)-G(F'(Z))\cdot F(Z)]||$$

$$\leqslant \alpha ||x^*-Z||$$

$$< ||x^*-Z||$$

但上述不等式不成立。$\therefore$(5)式解x^*唯一。

下面举例以说明其应用。

例1　若在(6)中取：

$$G(F'(x_n)) = [P'(x_n)]^{-1}$$

$$F(x_n) = P(x_n)$$

(5)就变化成了一般牛顿程序。

例2　对车比雪夫Chebyshev程序：

$$x_{n+1} = x_n - \left[I + \frac{1}{2}\frac{P(x_n)P''(x_n)}{P'^2(x_n)}\right]\frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \qquad (9)$$

(9)可变形为：

$$x_{n+1} = x_n - \left\{\frac{3}{2}I - \frac{1}{2}\left[\frac{P(x_n)}{P'(x_n)}\right]'\right\}\frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$$

在(6)中取

$$F(x_n) = \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$$

$$G(F'(x_n)) = \frac{3}{2}\mathrm{I} - \frac{1}{2}F'(x_n)$$

即为(9)。

例3。对切双曲线程序：

$$x_{n+1}=x_n - \left[\mathrm{I} - \frac{1}{2}\frac{P(x_n)P''(x_n)}{P'^2(x_n)} \right]^{-1} \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \tag{10}$$

(10)可变形为，

$$x_{n+1}=x_n - \left\{ \frac{1}{2}\mathrm{I} + \frac{1}{2}\left[\frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \right]' \right\}^{-1} \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$$

当在(6)中取：

$$F(x_n)= \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$$

$$G(F'(x_n)) = \left[\frac{1}{2}\mathrm{I} + \frac{1}{2}F'(x_n) \right]^{-1}$$

即为(10)。

例4. 对最速下降程序

$$x_{n+1}=x_n - \frac{F'(x_n)}{\|F'(x_n)\|^2}F(x_n) \tag{11}$$

在(6)中取：

$$F(x_n)=F(x_n)$$

$$G(F'(x_n)) = \frac{F'(x_n)}{\|F'(x_n)\|^2}$$

在(11)式中变化为(6)。

又若对最速下降程序：

$$x_{n+1}=x_n-\lambda_n F(x_n) \tag{12}$$

当其$\lambda_n = C\frac{(F(x_n),\ F(x_n))}{(F'(x_n)F(x_n),F(x_n))}$

在(6)中取$G(F'(x_n),\ F(x_n))= \lambda_n =\frac{(F(x_n),\ F(x_n))}{(F'(x_n)F(x_n),F(x_n))}C$，此时在(6)中必须扩充$G(F'(x_n))$为$G(F'(x_n),\ F(x_n))$，上定理2的条件必须相应变更，这也是可能的。此时(12)式变为(6)式。

注1：上列各式中，$\frac{1}{p'(x)}$的写法应理解为导算子之逆。

定理3：对泛函方程(5)，假设G与F是作用于Banach空间中的算子，Q是G，F定义域中一开集，当在Q中球k，

$$\|x - x_0\|\leqslant k$$

有；

（i）　G与F分别为一、二阶连续导算子。

（ii）　$G(F'(x_0))$存在，$\|G(F'(x_0))\|\leq\beta$，且$\|F(x_0)\|\leq L$。

（iii）　$G(F'(x))^{-1}$在O中一球

$$\|x-x_0\|\leq r$$

中，满足李雅普略夫条件：

$$\|G(F'(x_1))^{-1}-G(F'(x_2))\|\leq M\|x_1-x_2\|^{\alpha'}\quad，\alpha'\text{任何实数}\tag{13}$$

（iv）当其：

$$\|F'(x)-G(F'(x))^{-1}\|<\delta，\beta+\beta Mk^{\alpha'}<1$$

且：

$$max(\delta，\beta/(1-\beta Mk^{\alpha'}))=\beta/(1-\beta Mk^{\alpha'})=\alpha\quad（从而\alpha<1）$$

$$r=\beta L\sum_{K=0}^{\infty}\alpha^{2^n}$$

则泛函方程（5）式在球：

$$\|x-x_0\|\leq k$$

中，存在唯一解x^*，并且广义牛顿程序：

$$x_{n+1}=x_n-G(F'(x_n))\cdot F(x_n)，（n=0，1，2，\cdots）\tag{14}$$

收敛于x^*，敛速估值为：

$$\|x_n-x^*\|\leq k\,\alpha^{2^n}\tag{15}$$

证明：类同参考文献〔1〕中，$P.251-P.253$定理1的证明过程。此时其$P.252$的（8）式中应为：

$$\begin{aligned}\|F(x_n)\|&=\|F(x_n)-F(x_{n-1})-G(F'(x_{n-1}))^{-1}(x_n-x_{n-1})\|\\&\leq\int_0^1\|F'(x_{n-1}+t(x_n-x_{n-1}))-G(F'(x_{n-1}))^{-1}\|dt\cdot\|x_n-x_{n-1}\|\\&<\delta\|x_n-x_{n-1}\|\\&\leq\frac{\beta}{1-\beta Mk^{\alpha'}}\|x_n-x_{n-1}\|\end{aligned}$$

其余各步骤类同〔1〕中$P.251—P.253$，即参考文献中〔1〕，的定理1各证明。

但对参考文献〔1〕中，$P.251—P.253$的定理1的（10）式这里有：

$$\begin{aligned}\|x^*-Z\|&\leq\|G(F'(x_0))\|\cdot\|G(F'(x_0))^{-1}(x^*-Z)\|\\&=\|G(F'(x_0))\|\cdot\|F(x^*)-F(Z)-G(F'(x_0))^{-1}(x^*-Z)\|\\&\leq\beta\int_0^1\|F(Z+t(x^*-Z))-G(F'(x_0))^{-1}\|dt\cdot\|x^*-Z\|\\&\leq\beta\delta\|x^*-Z\|\\&<\|x^*-Z\|\end{aligned}$$

这∵　$0<\delta<1$

$0<\beta<1$

$\therefore \qquad 0<\delta\beta<1$

注 2 本文定理 3 与参考文献〔1〕P.251—P.253的定理 1 的敛速之比较：

当其：

$$\frac{\beta}{1-\beta M k^{a'}}<\frac{\beta^2 M L}{2(1-\beta M r)}$$

取 $k=r$ 时：

$$1-\beta M r^{a'}>\frac{2(1-\beta M r)}{\beta M L}$$

$$\beta M r^{a'}<1-\frac{2(1-\beta M r)}{\beta M L}$$

$$a'<\log_r\left[\frac{1}{\beta M}-\frac{2(1-\beta M r)}{\beta^2 M^2 L}\right]$$

故本文定理 3 之敛速比通常的牛顿程序更快。

注 3 本文定理 3 与本文定理 1 的收敛速率的比较：当取 $k=r$ 时，要求

$$\beta/(1-M\beta r^{a'})<\beta^2 M L/2(1-\beta M r^{a'})$$

当 $\beta M L>2$ 时上述不等式成立。故本文定理 3 比本文定理 1 的敛速更大，但增添了一个条件

$$\|F'(x)-G(F'(x)^{-1}\|<\delta$$

注 4 当把 $G(F'(x_n))$ 扩充为

$G(F(x_n),F'(x_n),\cdots,F^{(K)}(x_n),\cdots)$ 时，则可得出更广义的最速下降程序及其它几个广义程序。

参 考 文 献

〔1〕 李文清，泛函分析，北京，科学出版社，1960

〔2〕 吉田耕作，泛函分析，上海科技出版社，1962

〔3〕 Kantorovich, L., On Newton's method for functional equations (Russion) DoRl. Akad. Nauk, SSSR 59, 1237～1240