

加筋壳体及块体组合结构的 有限元分析及程序

ANALYSIS AND PROGRAM FOR CHUNK AND STIFFENED
SHELL STRUCTURES BY FINITE ELEMENT METHOD

刘崇德 秦 义 王崇友
Liu Chongde Qin Yi Wang Chongyou

(机械工程一系) (计算中心)

摘 要 本文采用改进的等参壳元和偏心等参梁元求解由块体、加筋壳体组成的组合结构, 为这类组合结构的分析找到一种灵活实用的方法。算例证明方法和程序是有效的。

关键词 机械; 强度; 有限单元法; 分析; 程序
中国图书资料分类法分类号 TH114

ABSTRACT The improved isoparametric shell element and the biased Isoparametric beam element are applied to the composite structures which consist of cubic chunks and stiffened shells. A flexible and practical method is found for this type of composite structure. The example shows that the theory and program are efficient.

KEY WORDS machine, strength, finite element method, analyzing, programs

在机械结构的有限元分析中, 一种单元往往很难代表实际的结构, 而几种单元组合求解则是经常所需要的, 如由块体、壳(板)和梁单元的组合求解则经常用在分析箱体结构一类的机械结构之中。几类单元组合求解的最大问题是不同自由度的单元间的耦合问题。大型结构分析程序SAP5用读入单刚[1], ADINA用读入约束方程[2]来实现不同自由度单元间的耦合, 均需要人工准备大量数据。这在事先不知道节点、单元信息, 而采用自动分网来实现有限元分析时有很大的局限性, 并且程序也过于复杂, 这就使得实现组合结构的CAD受到限制。本文应用一种高效多功能的改进的等参壳元, 并推导一种偏心等参梁元, 可以方便地实现三维块体单元、壳(板)单元和梁单元的组装, 无需人工处理约束自由度, 因而可以用自动分网来进行组合结构的前处理和自动分析。

本文于1988年12月2日收到。

一、改进的等参壳元

建立在古典板壳理论基础上的板壳单元应用了两个假设：一是直法线假设，即变形前垂直于中性面的直线，变形后仍然保持为直线，且长度不变并垂直于变形后的中性面；二是垂直于中性面的正应力分量 $\sigma_z = 0$ 。这种没有考虑剪切变形的影响的单元仅适用于薄板和薄壳，对于厚壳（板）是不适用的，计算误差较大。同时这种板壳元每个节点有六个自由度，很难直接与其它单元耦合。

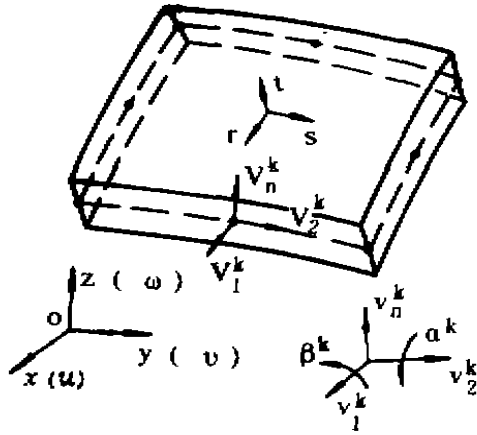


图 1

相对于原位置有一个转动，这样在厚度方向上平均的考虑了剪切变形。

根据以上的假定，可以写出如图 1 所示单元的位移插值函数表达式〔3〕：

$$u_i = \sum_{K=1}^n N_K u_i^K + \frac{t}{2} \sum_{K=1}^n a_K N_K (-\alpha^K V_{2i}^K + \beta^K V_{1i}^K) \quad (1)$$

式中， \vec{V}_2^K 、 \vec{V}_1^K 是 K 节点垂直于原法线 \vec{V}_n^K 的单位矢量， α^K 、 β^K 是 \vec{V}_n^K 绕 \vec{V}_2^K 、 \vec{V}_1^K 转动的转角， a^K 是 K 节点处壳厚， t 是局部坐标， N_K 是关于 $r-s$ 平面的形函数。

坐标变换式采用和位移插值相同的形式：

$$X_i = \sum_{K=1}^n N_K X_i^K + \frac{t}{2} \sum_{K=1}^n N_K a_K V_{ni}^K \quad (2)$$

这样就可以按照一般等参壳元的推导过程来推导其刚度阵。

这种单元适合于组合结构分析是在于：

1. 单元节点的自由度可以选择。从(1)式看出，处于壳中面的节点有五个自由度 (u_1^K 、 u_2^K 、 u_3^K 、 α^K 、 β^K)，单元的节点也可以取在底面和顶面（如图 2），其位移插值函数就是一般三维等参元的形式(3)式：

$$u_i = \sum_{K=1}^n N_K u_i^K \quad (3)$$

其形函数要按照三维块体单元的形函数在 $r-s-t$ 局部坐标系中作修正。与(1)式相比，

等式右端第二项没有了，而单元的应力—应变规律在局部坐标系下仍按壳元的假设取。由于这种壳元的节点的自由度只有三个移动自由度（ u_1^k, u_2^k, u_3^k ），就可以直接和三维块体单元拼装，从而实现由三维块体单元向壳（板）单元的过渡，无需处理自由度的耦合问题（图3）。

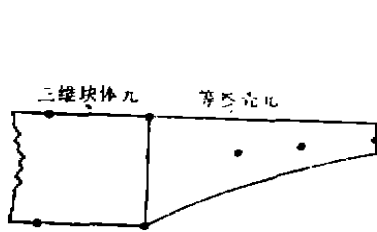


图 2

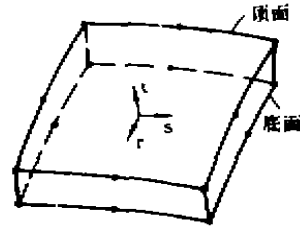


图 3

2. 从这类单元的插值函数的构造形式得到启示：由于这种单元的插值函数具有一般等参单元的通用形式，它就可以很容易地改造为多功能的等参单元，以一种单元替代多种单元。前面提到等参壳元既能处理薄壳（板），又能处理厚壳（板），但不能处理三维块体。虽然当单元的节点取在底面和顶面时（图2），等参壳元的位移插值函数具有和三维块体元相同的形式，但根据前面的假设 $\sigma_z=0$ ，推导刚度矩阵和应力求解时的弹性矩阵 $[D]$ 在局部坐标系中取为：

$$[D] = \frac{E}{(1-\mu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-\mu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-\mu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (4)$$

E 、 μ 为弹性模量和泊松比。因而由上面 $[D]$ 矩阵推导的单元垂直方向和纵向刚度有一定差异，直接用于求解三维块体会得出错误的结果，这就是用ADINA程序中的等参壳元求解三维块体结构误差很大的原因。前面已经提到，当单元节点均取在顶面和底面时（图2），插值形函数是在局部坐标系 $r-s-t$ 中取的，而不是在 $r-s$ 平面取，就得到节点自由度为（ u_1^k, u_2^k, u_3^k ）的插值函数表达式，其单元刚度矩阵的推导，刚度矩阵的形式与三维块体元完全一样，程序结构也完全一样，所不同的是在单元局部坐标系下的弹性矩阵应是取一般三维空间各向同性的弹性矩阵，而不是(4)式那样的形式。这样就使得我们利用等参壳元来处理三维块体时只需修正弹性矩阵和形函数，而无需专门的三维块体元程序，也不存在单元间的拼装问题，使组合结构分析程序更加精练而有效。同样地，通过对节点自由度的约束和修正弹性矩阵，还可以处理平面应力问题，使这类单元成为一种多功能的等参单元，而这正是组合结构求解时所期望找到的一种途径。

二、偏心等参梁元

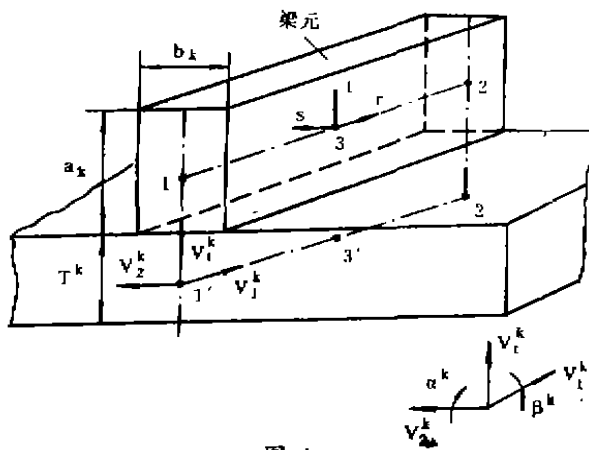


图 4

在处理箱体一类结构时，加筋壳（板）是经常遇到的，通常是用壳（板）单元与梁单元组合求解，这里也存在自由度间的耦合问题。要避免人工准备数据、完成结构的CAD，并更为灵活地处理加筋问题，必须实现单元间的直接拼装。为了实现单元的直接拼装以及满足作为加强筋的梁单元与等参壳元间位移的协调，本文推导一种偏心等参梁元。

图4，梁节点取在壳元的中性面上（与壳单元同节点），假定梁的变形满足平截面假设，即变形前垂直于梁中性轴的截面变形后仍保持平面，但不一定垂直于中性轴，梁

可以在该平面内产生均匀扭转。取梁的局部坐标系与壳中面节点的局部坐标系平行，由于变形的协调性，梁单元没有绕轴的转动，偏置的梁节点的自由度为：

$$\{u^k\} = \{u_1^k, u_2^k, u_3^k, \alpha^k, \beta^k\}^T$$

1. 位移插值函数

如图4，偏心梁中线 $1'-3'-2'$ 上任意一点的位移：

$$u_i = \sum_{K=1}^n N_K u_i^K \quad (5)$$

梁内任意一点的位移可以用矢量 \vec{V}_1, \vec{V}_2 的变化来表示，处于平面 $122'1'$ 内任意点的位移：

$$u_i = \sum_{K=1}^n N_K u_i^K + \sum_{K=1}^n \left[\frac{1}{2} (T^K + a_K) + \frac{l}{2} \cdot \alpha^K \right] N_K \Delta V_{1i}^K \quad (6)$$

梁内任意一点的位移：

$$u_i = \sum_{K=1}^n N_K u_i^K + \sum_{K=1}^n \left[-\frac{1}{2} (T^K + a_K) + \frac{l}{2} \cdot \alpha^K \right] N_K \Delta V_{1i}^K + \sum_{K=1}^n \frac{s}{2} b_K N_K \Delta V_{2i}^K \quad (7)$$

将 $\Delta V_{1i}^K, \Delta V_{2i}^K$ 用 α^K, β^K 表示（ α^K, β^K 是梁绕变形前的 \vec{V}_2^K, \vec{V}_1^K 的转动），得出偏心

等参梁元的位移插值函数表达式:

$$u_i = \sum_{K=1}^n N_K u_i^K + \sum_{K=1}^n \left[\frac{1}{2}(T^K + a_K) + \frac{t}{2} a_K \right] \cdot N_K (-\alpha^K V_{2i}^K + \beta^K V_{1i}^K) + \frac{s}{2} \sum_{K=1}^n b_K N_K \beta^K V_{1i}^K \quad (8)$$

其中, N_K 是 r 方向插值函数, 根据壳单元在该方向上取节点数的多少, 梁单元可以 2—4 个节点。 T^K 、 a_K 、 b_K 分别是 K 节点处壳厚度、梁截面的尺寸。 \vec{V}_1^K 、 \vec{V}_2^K 是垂直于 \vec{V}_3^K 且分别平行于 r 、 s 方向的单位矢量, r 、 s 、 t 是处于梁中性轴的局部坐标。

2. 形函数矩阵

从 (8) 式得出形函数矩阵:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & (tg_{21}^1 + g_{41}^1)N_1 & (g_{11}^1 t + g_{31}^1 + g_{51}^1 s)N_1 \\ 0 & N_1 & 0 & (tg_{22}^1 + g_{42}^1)N_1 & (g_{12}^1 t + g_{32}^1 + g_{52}^1 s)N_1 \\ 0 & 0 & N_1 & (tg_{23}^1 + g_{43}^1)N_1 & (g_{13}^1 t + g_{33}^1 + g_{53}^1 s)N_1 \\ \dots & N_n & 0 & (tg_{2n}^n + g_{4n}^n)N_n & (g_{1n}^n t + g_{3n}^n + g_{5n}^n s)N_n \\ \dots & 0 & N_n & (tg_{22}^n + g_{42}^n)N_n & (g_{12}^n t + g_{32}^n + g_{52}^n s)N_n \\ \dots & 0 & 0 & N_n (tg_{23}^n + g_{43}^n)N_n & (g_{13}^n t + g_{33}^n + g_{53}^n s)N_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中, $g_{1i}^K = \frac{1}{2} a_K V_{1i}^K$, $g_{2i}^K = -\frac{1}{2} a_K V_{2i}^K$,

$$g_{3i}^K = \frac{1}{2} (T^K + a_K) V_{1i}^K, \quad g_{4i}^K = -\frac{1}{2} (T^K + a_K) V_{2i}^K$$

$$g_{5i}^K = \frac{1}{2} b_K V_{1i}^K$$

3. 坐标变换式

采用一般等参元的处理方法, 坐标变换式取与位移插值函数相似的形式:

$$X_i = \sum_{K=1}^n N_K X_i^K + \sum_{K=1}^n \left[\frac{1}{2}(T^K + a_K) + \frac{t}{2} a_K \right] N_K V_{1i}^K + \frac{s}{2} \sum_{K=1}^n b_K N_K V_{2i}^K \quad (10)$$

4. 应变矩阵 $[B]$

$$[B] = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_n]$$

根据 (8)—(10) 式推出矩阵 $[B_K]$

$$[B_K] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_K}{\partial X_1} & 0 & 0 & g_{21}^K G_{X1}^K + g_{41}^K G_{Z1}^K & g_{11}^K G_{X1}^K + g_{31}^K G_{Z1}^K + g_{51}^K G_{Y1}^K \\ 0 & \frac{\partial N_K}{\partial X_2} & 0 & g_{22}^K G_{X2}^K + g_{42}^K G_{Z2}^K & g_{12}^K G_{X2}^K + g_{32}^K G_{Z2}^K + g_{52}^K G_{Y2}^K \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_K}{\partial X_3} & g_{23}^K G_{X3}^K + g_{43}^K G_{Z3}^K & g_{13}^K G_{X3}^K + g_{33}^K G_{Z3}^K + g_{53}^K G_{Y3}^K \\ \frac{\partial N_K}{\partial X_2} & \frac{\partial N_K}{\partial X_1} & 0 & (g_{21}^K G_{X2}^K + g_{41}^K G_{Z2}^K) & (g_{11}^K G_{X2}^K + g_{31}^K G_{Z2}^K + g_{51}^K G_{Y1}^K) \\ & & & + (g_{22}^K G_{X1}^K + g_{42}^K G_{Z1}^K) & + (g_{12}^K G_{X1}^K + g_{32}^K G_{Z1}^K + g_{52}^K G_{Y1}^K) \\ 0 & \frac{\partial N_K}{\partial X_3} & \frac{\partial N_K}{\partial X_2} & (g_{23}^K G_{X3}^K + g_{43}^K G_{Z3}^K) & (g_{12}^K G_{X3}^K + g_{32}^K G_{Z3}^K + g_{52}^K G_{Y3}^K) \\ & & & + (g_{23}^K G_{X2}^K + g_{43}^K G_{Z2}^K) & + (g_{13}^K G_{X2}^K + g_{33}^K G_{Z2}^K + g_{53}^K G_{Y2}^K) \\ \frac{\partial N_K}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial N_K}{\partial X_1} & (g_{21}^K G_{X1}^K + g_{43}^K G_{Z1}^K) & (g_{13}^K G_{X1}^K + g_{33}^K G_{Z1}^K + g_{53}^K G_{Y1}^K) \\ & & & + (g_{21}^K G_{X3}^K + g_{41}^K G_{Z3}^K) & + (g_{11}^K G_{X3}^K + g_{31}^K G_{Z3}^K + g_{51}^K G_{Y3}^K) \end{bmatrix}$$

其中, $G_{X_i}^K = \frac{\partial N_K \cdot t}{\partial X_i}$, $G_{Y_i}^K = \frac{\partial N_K S}{\partial X_i}$, $G_{Z_i}^K = \frac{\partial N_K}{\partial X_i}$

由[B]矩阵可以推导出偏心等参梁元的刚度矩阵, 这里从略。

由于偏心等参梁元的节点同壳元中面节点是同一节点, 自由度也相同, 因而可以直接把梁单元的刚度迭加到壳单元的刚度上去, 从而解决了加筋壳体的单元拼装问题。

三、程序及算例

应用改造过的等参壳元和推导的偏心梁单元编制的程序不仅能处理块体、壳(板)、加筋壳(板), 也能处理几种单元的组合结构, 能很好解决目前机械设计中各类减速箱体的分析计算问题, 并且大大减少了处理不同单元耦合时的数据准备工作, 从而可以实现减速箱体及类似结构的CAD。尤其是处理加强筋不需要单独布置节点, 因而就可以在分析设计时, 通过人机对话随意的布置加强筋。本程序已经应用于减速箱体的结构分析及拉制三通管的结构分析, 其中, 拉制三通管的结果经电算验证, 这里提供两个简单算例。

1. 算例 1

一水平放置的№10普通热轧槽型钢制悬臂梁(图5), 受载荷P作用, $P=1000 \text{ kg}$ 。横截面尺寸 $h=100 \text{ mm}$, $b=53 \text{ mm}$, $r=5.3 \text{ mm}$, $z_0=15.2 \text{ mm}$ 。 $E=2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$, $\mu=0.3$ 。悬臂梁划分为2个8节点等参壳元和4个偏心等参梁元(图6), 共13个节点。取图5 A—

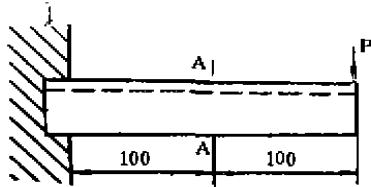


图 5

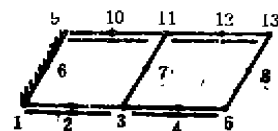
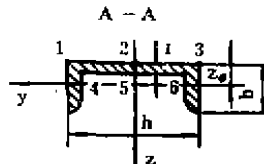


图 6

A截面分析, 将有限元计算值与材料力学计算值比较如下:

表 1

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 材料力学计算值 | 594 | 594 | 594 | 387 | 387 | 387 |
| 有限元计算值 | 574 | 530 | 574 | 363 | 342 | 363 |

2. 算例 2

一轴承座(图7), 受水平推力 P 作用, $P=1000\text{kg}$ 。轴承座尺寸如图7所示, $E=2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$, $\mu=0.3$ 。轴承座用三种方式计算: ① 本文程序计算, 将孔座和底座划分为8个8节点三维块体元, 幅板作为一个厚壳元, 加强筋用本文推导的2个偏心等参梁元处理, 共41个节点; ② 仍如上面的划分, 采用ADINA程序处理不同单元间的耦合问题; ③ 全部划分为三维块体元计算, 共34个单元, 92个节点。现将三种方式计算得出的在六个典型位置A、B、C、D、E、F的主应力值 σ_1 列表比较如下:

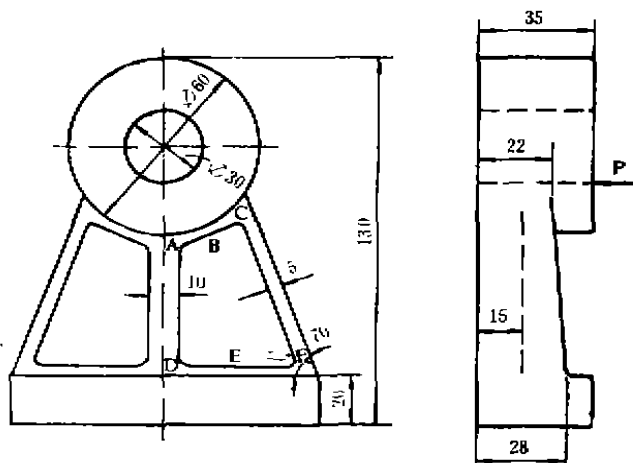


图 7

表 2

| | A | B | C | D | E | F |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 组合结构计算值 | 377 | 351 | 261 | 450 | 821 | 291 |
| ADINA计算值 | 383 | 360 | 309 | 467 | 330 | 292 |
| 三维块体计算值 | 381 | 345 | 323 | 471 | 306 | 273 |

四、结 论

1. 应用本文理论编制的程序的电算结果与电测值、材料力学计算值、以及 *ADINA* 程序计算值较接近, 证明理论是正确的、程序是可靠的。

2. 运用组合结构程序求解, 对于某些复杂结构划分的单元数、节点数可以大大减少, 如算例 2, 用 8 个三维块体元、一个等参厚壳元和两个偏心等参梁元求解, 只需 41 个节点。而仅用三维块体元计算却需 34 个单元、92 个节点。这种优越性对大型复杂结构的数据准备工作尤为突出, 并能大大减少计算时间。

3. 与大型通用结构分析程序比较, 无需人工处理不同自由度单元的耦合问题, 可实现组合结构的自动分网和随意布置加强筋。

4. 程序精练, 求解功能较强。

5. 本程序只适用于小挠度弹性范围内的加筋壳体, 对于大挠度的要作适当修正; 对于曲梁作为加强筋的情况作者正在作此工作。

参 考 文 献

- 〔1〕 王秉愚, *SAP5* 结构分析程序中三种罚单元的应用, 交流资料, 1981
- 〔2〕 贝斯, K.J. 著, 赵兴华等译: *ADINA/ADINT* 使用手册—自动动态增量非线性分析有限元程序, 机械工业出版社, 1986
- 〔3〕 赵兴华等, 线性与非线性连续体有限元分析 (*ADINA* 程序理论部分), 郑州机械研究所, 1982