

# 多相固体的等效导热系数

EQUIVALENCE HEAT CONDUCTION COEFFICIENTS IN MULTIPHASE SOLIDS

张培源      严波  
Zhang Peiyuan      Yan Bo

(工程力学系)

**摘 要** 文章以复合材料为背景,叙述了多相固体宏观等效导热系数的理论和建立预报设计公式的基本方法;具体地导出了单向纤维复合材料和空心微珠复合材料等效导热系数的组分设计公式。

**关键词** 等效导热系数;多相体;复合材料  
中国图书资料分类法分类号 O414.11

**ABSTRACT** With the background of composite materials, this paper approaches the theory of the equivalence heat conduction coefficients in multiphase solids and the method that concerns with the prediction formula for design. The equivalence heat conduction coefficients of fiber reinforced and hollow sphere filled composite materials would be particularly proposed.

**KEY WORDS** equivalence heat conduction coefficients; multiphase solids; composite material

## 一、引 言

按照 Fourier 定律,均匀介质中热流矢量 $\mathbf{q}$ 和温度梯度 $G_i$ 的关系可以用唯象定律表示为

$$\mathbf{q}_i = -\lambda_{ij} G_j \quad (1)$$

式中 $\lambda_{ij}$ 称为导热系数张量。按 Onsager 原理,它具有对称性

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji} \quad (2)$$

以复合材料的工程应用为背景,我们总希望建立多相固体的等效均匀体模型,多相固体 $V_m$ 和它的等效均匀体 $V$ 具有相同的几何外形, $V$ 的热流矢量和温度梯度就是 $V_m$ 的等效热流矢量 $\overline{\mathbf{q}}$ 和等效温度梯度 $\overline{G}_i$ ,其间的关系仍旧用线性的唯象定律表示

本文于1988年11月11日收到。

$$-\bar{q} = \bar{\lambda}_i \bar{G}_i \quad (3)$$

式中 $\bar{\lambda}_i$ 称为等效导热系数张量。按照这种连续介质的模型,文<sup>[1,2,3]</sup>提出了单向纤维复合材料等效导热系数的预报公式。文<sup>[4]</sup>用体积平均定义等效热流矢量和等效温度梯度,用自协调方法(Self Consistent)讨论了振荡温度下的等效导热性质。由于处理问题中用了不同的近似方法,这些文章给出的单向纤维复合材料的等效导热系数预报公式不尽相同。此外,对于日益得到重视的空心球型填充复合材料,目前还缺乏导热系数的预报公式。

本文根据连续介质的热传导理论,系统地提出预报等效导热系数的理论和方法,对于单向纤维复合材料和空心微珠复合材料,具体地给出了等效导热系数的组分设计公式。

## 二、导热系数的等效理论

(一) 我们讨论无内热源的多相固体 $V_m$ 的定常温度分布边值问题。对于常矢量 $G_k^*$ ,  $V_m$ 的温度场 $T(X)$ 满足如下场方程和边值条件

$$(\lambda_{ki} T_{,i})_{,k} = 0 \quad \underline{X} \in (V_m - S) \quad (4)$$

$$T = G_k^* x_k \quad \underline{X} \in \partial V_m \quad (5)$$

$$(T)_{,i} = (T)_{,i} \quad \underline{X} \in S \quad (6)$$

$$(\lambda_{ki} T_{,i})_{,i} N_k = (\lambda_{km} T_{,m})_{,i} N_k \quad \underline{X} \in S \quad (7)$$

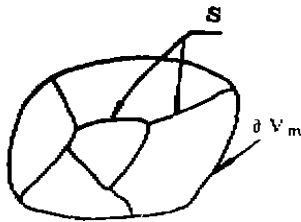


图1 多相体和相界面

式中 $\underline{X}$ 为物质坐标,  $\partial V_m$ 为一个封闭曲面,把多相物体 $V_m$ 看作它内部的物质区域,  $S$ 为 $V_m$ 内的相界面。我们假设相界面是按片光滑的,用 $N_k$ 表示 $S$ 的法线单位矢量。曲面 $S$ 的正侧和负侧是根据法线 $N_k$ 的确定取向而决定,图1。由方程(4)~(7)确定的温度场在 $V_m$ 中分区光滑。温度梯度和热流矢量则由温度场分别决定如下

$$G_k = T_{,k} \quad \underline{X} \in (V_m - S) \quad (8)$$

$$q_k = -\lambda_{ki} T_{,i} \quad \underline{X} \in (V_m - S) \quad (9)$$

利用方程(9)、(7)和(4)容易证明,对物体 $V_m$ 流入热量的总和为零,即

$$\int_{\partial V_m} q_k N_k dA = 0 \quad (10)$$

式中 $N_k$ 为 $\partial V_m$ 的外法线单位矢。

事实上,由式(9)

$$-\int_{\partial V_m} q_k N_k dA = + \int_{\partial V_m} \lambda_{ki} T_{,i} N_k dA + \int_S [(\lambda_{ki} T_{,i})_{,i} N_k - (\lambda_{km} T_{,m})_{,i} N_k] dA$$

这里加上了为零的第二个面积分。经过积分曲面的重新组合,右端可以表示为各子区域 $V^{(i)}$ 的封闭表面 $\partial V^{(i)}$ 上面积分之和:

$$-\int_{\partial V_m} q_K N_K dA = \sum_{i=1}^m \int_{\partial V^{(i)}} (\lambda_{Ki} T_{,i}) N_K dA$$

这里我们认为多相体  $V_m$  总可以用  $m$  个互不相交的子区域  $V^{(i)}$  组成, 每一子区域上, 介质是均匀的, 温度场是光滑的, 散度定理和方程(4)成立, 即

$$\int_{\partial V^{(i)}} (\lambda_{Ki} T_{,i}) N_K dA = \int_{V^{(i)}} (j_{Ki} T_{,i})_{,K} dV = 0$$

于是命题证毕。

(二) 对于多相体  $V_m$ , 我们定义等效热流矢量和等效温度梯度分别为相应的体积平均值[4]

$$\bar{q}_K \equiv \frac{1}{V} \int_{V_m} q_K dV \quad (11)$$

$$\bar{G}_K \equiv \frac{1}{V} \int_{V_m} G_K dV \quad (12)$$

根据这个定义, 我们可以证明

$$\bar{q}_K = \frac{1}{V} \left[ \int_{\partial V_m} (-\lambda_{Ki} T_{,i}) N_K dA + \int_S [\lambda_{Ki}] T_{,i} N_K dA \right] \quad (13)$$

$$\bar{G}_K = \frac{1}{V} \int_{\partial V_m} T_{,i} N_K dA \quad (14)$$

$$\text{式中} \quad [\lambda_{Ki}] = (\lambda_{Ki})_+ - (\lambda_{Ki})_- \quad x \in S \quad (15)$$

证明这两个公式的方法与证明式(10)相似, 即分区地利用 Gauss 公式。本文从略。

如果组分介质是各向同性的, 其导热系数为  $\lambda$ , 且  $\lambda_{,ij} = \lambda \delta_{,ij}$ , 那末式(13)成为

$$\bar{q}_K = \frac{1}{V} \left[ \int_{\partial V_m} (-\lambda T_{,i} N_K) dA + \int_S [\lambda] T_{,i} N_K dA \right] \quad (16)$$

由式(12)定义的等效温度梯度成为

$$\bar{G}_K = G_K^*$$

这个式子说明了式(5)中引入的常矢量  $G_K^*$  的意义。

根据边值问题(4)~(7)的解, 由式(13)计算的等效热流矢量必然可以表示为式(3)的形式, 据此可以决定多相体的等效导热系数  $\bar{\lambda}_{,ij}$ 。

下面, 我们按这一理论, 讨论单向纤维复合材料和空心微珠复合材料的等效导热系数。

### 三、单向纤维复合材料的等效导热系数

对于单向纤维增强复合材料, 我们把  $V_m$  取为代表性体积, 用  $V^{(1)}$  和  $V^{(2)}$  分别表示基体和纤维, 两种组分都是各向同性介质, 其导热系数分别为  $\lambda^{(1)}$  和  $\lambda^{(2)}$ , 图2。如果  $G_K^*$  ( $K=1, 2, 3$ ) 为等效温度梯度在  $X_1$ ,  $X_2$  和  $X_3$  方向的分量, 那末  $V_m$  的温度边值条件(5)可以用圆柱坐标表示为

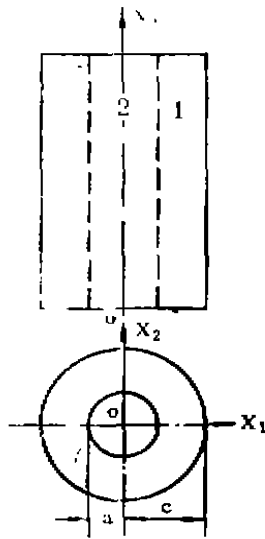


图2 圆柱代表性体积

$$I = G_1^0 r \cos \theta + G_2^0 r \sin \theta + G_3^0 z \quad x \in \partial V_m \quad (17)$$

式中  $X_1 = r \cos \theta$ ,  $X_2 = r \sin \theta$ ,  $X_3 = z$ , 由于几何形状的轴对称性, 可以取  $G_2^0 = 0$ , 我们只须讨论边值问题(4)~(7)对应  $G_1^0$  和  $G_3^0$  的解。

我们略去这一边值问题求解的具体过程, 将结果抄写如下

介质1  $T = G_3^0 z + \left( Ar + B \frac{1}{r} \right) \cos \theta$

介质2  $T = G_3^0 z + D r \cos \theta$

式中  $A = \frac{1}{2} D(1 + \gamma)$ ,  $B = \frac{1}{2} a^2 D(1 - \gamma)$ ,  $\gamma = \lambda^{(1)} / \lambda^{(2)}$ ,

$D = 2G_3^0 / [1 + \varphi + \gamma(1 - \varphi)]$  这里因子  $\varphi = a^2 / c^2$  表示纤维体积占总体积的分率。用方程(16)计算等效热流矢量。

$$-\bar{q}_1 = \left[ \lambda^{(1)} + \varphi(\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}) - \frac{D}{G_1^0} \right] G_1^0$$

$$-\bar{q}_2 = 0$$

$$-\bar{q}_3 = [\lambda^{(1)}(1 - \varphi) + \lambda^{(2)}\varphi] G_3^0$$

上式(3)比较, 得到等效导热系数

$$\bar{\lambda}_{11} = \lambda^{(1)} + 2\varphi(\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}) / [1 + \varphi + \gamma(1 - \varphi)] \quad (18)$$

$$\bar{\lambda}_{33} = \lambda^{(1)}(1 - \varphi) + \lambda^{(2)}\varphi \quad (19)$$

由于在  $X_1 O X_2$  内是宏观各向同性的,  $\bar{\lambda}_{22} = \bar{\lambda}_{11}$ ,  $\bar{\lambda}_{12} = \bar{\lambda}_{13} = \bar{\lambda}_{23} = 0$ 。于是我们得到了等效导热系数的全部预报公式。

#### 四、空心微珠复合材料的等效导热系数

取  $V_m$  为图3表示的同心球体。为了讨论方便, 设同心球由三层各向同性介质组成, 由外向内, 各层导热系数分别为  $\lambda^{(1)}$ 、 $\lambda^{(2)}$  和  $\lambda^{(3)}$ , 相界面分别为两同心球面  $\rho = a$  和  $\rho = b$ 。这类中心对称体  $V_m$  相应的复合材料宏观行为是各向同性的, 因此, 我们只须讨论  $G_3^0 \neq 0$ ,  $G_1^0 =$

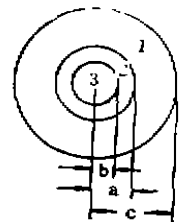


图3 同心球模型

$G_2^0 = 0$  的情况。边值条件(5)表示为

$$\rho=C, T=G_3^0 C \cos\theta \tag{20}$$

这里，我们引入了球坐标 $\rho, \theta, \varphi$ ，且 $x_1 = \rho \sin\theta \cos\varphi, x_2 = \rho \sin\theta \sin\varphi, x_3 = \rho \cos\theta$ 。方程(4)的解在三层介质中分别为

$$\begin{array}{ll} \text{介质1} & a < \rho < c & T = (A\rho + B\rho^{-3}) \cos\theta \\ \text{介质2} & b < \rho < a & T = (D\rho + E\rho^{-3}) \cos\theta \\ \text{介质3} & 0 < \rho < a & T = F\rho \cos\theta \end{array} \tag{21}$$

积分常数 $ABEDF$ 由方程(5)、(6)和(7)决定。这里，这些方程分别成为

$$\left. \begin{array}{l} Ac + Bc^{-2} = G_3^0 c \\ Aa + Ba^{-2} = Da + Ea^{-2}, Db + Eb^{-2} = Fb \\ \lambda^{(1)}(A - 2Ba^{-3}) = \lambda^{(2)}(D - 2Ea^{-3}), \lambda^{(2)}(D - 2Eb^{-3}) = \lambda^{(3)}F \end{array} \right\} \tag{22}$$

令 $\varphi = a^3/c^3, \beta = b^3/a^3, \gamma_1 = \lambda^{(2)}/\lambda^{(1)}, \gamma_2 = \lambda^{(3)}/\lambda^{(1)}$ 。由这个方程组可以解出 $(A + Ba^{-3})$ 和 $(\beta F)$ 得到

$$\begin{aligned} \frac{A + \beta a^{-3}}{G_3^0} &= -3[3 - (1 - \beta)(1 - \gamma_2)] / \{3(1 - \varphi)\gamma_1(1 - \gamma_2)\beta \\ &\quad - [3 - (1 - \beta)(1 - \gamma_2)][3 - (1 - \varphi)(1 - \gamma_2)]\} \\ \frac{\beta F}{G_3^0} &= -9\beta / \{3(1 - \varphi)\gamma_1(1 - \gamma_2)\beta - [3 - (1 - \varphi)(1 - \gamma_1)][3 - (1 - \beta)(1 - \gamma_2)]\} \end{aligned}$$

另一方面，由式(16)计算等效热流矢量，得到

$$\begin{aligned} \overline{q_1} = \overline{q_2} &= 0 \\ \overline{q_3} &= \frac{1}{V} \left[ \int_{\rho=c} (-\lambda^{(1)} G_3^0 \cos\theta \cdot \cos\theta) dA_c + \int_{\rho=a} (\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})(A + Ba^{-3}) a \cos\theta \cos\theta dA_a \right. \\ &\quad \left. + \int_{\rho=b} (\lambda^{(2)} - \lambda^{(3)}) F b \cos\theta \cos\theta dA_b \right] \end{aligned}$$

式中  $V = \frac{4}{3}\pi c^3, dA_c = 2\pi c^2 \sin\theta d\theta, dA_a = 2\pi a^2 \sin\theta d\theta, dA_b = 2\pi b^2 \sin\theta d\theta$ 。完成这些积分可以得到

$$\overline{q_3} = - \left\{ \lambda^{(1)} + \varphi \left[ (\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}) \frac{A + Bc^{-3}}{G_3^0} + (\lambda^{(3)} - \lambda^{(2)}) \frac{\beta F}{G_3^0} \right] \right\}$$

于是我们得到导热系数的预报公式

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}_{1r} &= \overline{\lambda} \delta_{1r} \\ \overline{\lambda} &= \lambda^{(1)} + \frac{3(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})[3 - (1 - \beta)(1 - \gamma_2)] + 9\beta(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})}{3(1 - \varphi)\gamma_1(1 - \gamma_2)\beta - [3 - (1 - \varphi)(1 - \gamma_2)][3 - (1 - \beta)(1 - \gamma_2)]} \end{aligned} \tag{23}$$

如果第三种介质 ( $0 < \rho < b$ ) 是完全的绝热体，这时 $\lambda^{(3)} = 0, r_2 = 0$ ，式(23)成为

$$\overline{\lambda} = \lambda^{(1)} + 3\varphi \frac{(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})(2 + \beta) + 3\beta\lambda^{(2)}}{3\beta\gamma_1(1 - \varphi) - (2 + \beta)[3 - (1 - \varphi)(1 - \gamma_1)]} \tag{24}$$

如果球体 $\rho < a$ 是空心微珠, 其内部存在空穴 $\rho \leq b$ , 空穴中只有稀薄的空气, 可以忽略传导形式之外的热传递现象, 我们可以近似地把空穴看作绝热体, 式(24)可以近似地预报空心微珠复合材料的等效导热系数。

由式(24)可见, 如果微珠 $\rho < a$ 全部是绝热核心,  $\beta = 1$ , 我们得到

$$\bar{\lambda} = \lambda^{(1)} \left( 1 - \frac{3\varphi}{2+\varphi} \right)$$

反之, 如果完全无绝热核心,  $\beta = 0$ , 式(24)成为

$$\bar{\lambda} = \lambda^{(1)} \left[ 1 - \frac{3\varphi}{2+\varphi} \cdot \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1/(2+\varphi)} \right]$$

### 参 考 文 献

- [1] Nielsen, I.N., Ind. Eng. Chem., Fundam., 1974, 13(1)
- [2] Nielsen, I.N., J. Appl. Polym. Sci., 1973, 17, 3819
- [3] Nielsen, I.N., J. Phys., D7, 1974, 1549
- [4] Nomura, S., Chou Tsu-Wei, Int. J. Eng. Sci., 1986, 24(4)
- [5] 卡茨, H.S, 米路西凯, J.V., 塑料用填料及增强剂手册, 化学工业出版社, 1985, 36—37