$$b_2=\sum_{i=21}^{32} ae^{\frac{b}{t_i}},$$

…………………………………

$$b_6=\sum_{i=69}^{80} ae^{\frac{b}{t_i}}.$$

考虑到1988年（从5月到12月）已有科技企业$b_0=164$家，则科技企业数目矩阵$B=(b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n)$中各元素已完全确定。

**3. 试验区主要发展指标的预测**

借助于前面所述的模型、处理方案和有关数据，通过计算机的分析处理，可得出试验区今后六年内的主要发展指标的预测数路；再考虑各方面的一些特殊因素，对预测数据适当地调整与处理，最后得出重庆市沙坪坝科技产业开发试验区六年的主要发展状况如下：

表3　六年内试验区科技产业的年产值、销售收入和利润

| 时间 数量 名称 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 产值 | 3000万 | 8000万 | 1.4亿 | 2.3亿 | 3.3亿 | 5亿 |
| 销售收入 | 3500万 | 9500万 | 1.6亿 | 2.5亿 | 3.6亿 | 5.5亿 |
| 纯利润 | 600万 | 1500万 | 2800万 | 4500万 | 6800万 | 1亿 |

表4　六年内开发研究的高新技术项目及科技产品

| 时间 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 数目 | 500 | 800 | 1200 | 1600 | 2100 | 2700 |

表5　六年内科技企业从业人员

| 时间 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 从业人员总数 | 1900 | 3400 | 5300 | 8300 | 12000 | 15000 |
| 科技人员总数 | 1300 | 2100 | 3300 | 4800 | 6500 | 9000 |

表 6　科技企业发展数目

| 时　　间 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 科技企业积累数 | 230 | 300 | 370 | 440 | 500 | 560 |

以上指标的预测和规划是假定有关政策基本不变、有关投入能基本保证的情况下作出的，当然，如果政策或投入情况发生了变化，以上数据也可能发生变化。

## 五、小　结

科技开发区或新技术产业开发区的未来发展状况如何是一个社会普遍关注的问题。本文应用系统工程中的有关预测理论和预测技术建立起来的科技开发区发展预测模型及预测方法，为全国各开发区或试验区未来发展状况的科学预测提供了一种技术方案和方法。此模型也可在其他类似社会经济系统的发展预测中得到应用。

## 参 考 文 献

〔1〕 国家科委（89）矩字003号文：关于召开新技术产业开发区第二次研讨会的通知，1989年5月

〔2〕 王永初：预测学及其应用，科学技术文献出版社重庆分社，1986

〔3〕 W.G. Sullivan: Fundamentals of Forecasting, Reston Publishing Co., U.S.A, 1977

# 色散方程的显式差分格式

## EXPLICIT DIFFERENCE SCHEMES FOR THE DISPERSIVE EQUATION

武蔚文

Wu Weiwen

（四川大学数学系）

**摘　要**　本文对色散方程$u_t=au_{xxx}$构造了一类带参数的三层显式八点格式[1]，其局部截断误差为$O(\tau h+h^2)$，稳定条件为$|a\tau/h^3|\leqslant 3.1099$。在目前尚未看到更好的结果。

**主题词**　差分方程；稳定性／色散方程
中国图书资料分类法分类号　O241.84

**ABSTRAT**　A class of three-level explicit difference schemes with a parameter $\alpha$ for the dispersive equation $u_t=au_{xxx}$ are established in this paper. Their truncation errors are $O(\tau h+h^2)$ and the stability condition is $|R|\leqslant 3.1099$ corresponding $\alpha=1.283528$. This is a better result at present.

**SUBJECT WORDS**　difference schemes; stability／dispersive equation

## 一、　差分格式和稳定条件

参照[1]和[2]，对$u_t=au_{xxx}$可以构造格式

$$\frac{1}{2\tau}\left(u^{n+1-\xi}_{m+1/2}-u^{n-\xi}_{m+1/2}+u^{n+\xi}_{m-1/2}-u^{n+\xi-1}_{m-1/2}\right)$$

$$=\frac{a}{h^3}\sum_{j=1}^{4}C_j\left(u^n_{m+j-1/2}-u^n_{m-j+1/2}\right) \tag{1}$$

$$\begin{cases} C_1=-3+5\alpha-\dfrac{35}{16}\alpha^2,\ C_2=1-\dfrac{5}{2}\alpha+\dfrac{21}{16}\alpha^2 \\ C_3=\dfrac{1}{2}\alpha-\dfrac{7}{16}\alpha^2,\ C_4=\dfrac{1}{16}\alpha^2,\ h=\Delta x,\ \tau=\Delta t \end{cases} \tag{2}$$

---

收文日期　1989年2月14日

其中$\alpha$是实参数。$\alpha>0$时取$\xi=0$，$\alpha<0$时取$\xi=1$。格式（1）-（2）的局部截断误差为$0(\tau h+h^2)$。

取$\xi=0$，令$u_m^n=\lambda^n e^{i\beta x_m}$代入（1）得到特征方程

$$e^{i\theta}\lambda^2-2F(\theta)i\lambda-e^{-i\theta}=0,\quad (\theta=\beta h/2,\ i^2=-1,\ \beta\text{实数}) \tag{3}$$

$$F(\theta)=2R\sum_{j=1}^{4}C_j\sin(2j-1)\theta+\sin\theta \qquad (R=\alpha\tau/h^3)$$

$$=Rf(y)+y \qquad (y=\sin\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2) \tag{4}$$

$$f(y)=-8y^3(\alpha y^2-1)^2 \qquad (0\leqslant y\leqslant 1) \tag{5}$$

以$\lambda_1$，$\lambda_2$表示（3）的根。格式（1）稳定的充要条件是$|\lambda_1|\leqslant1$，$|\lambda_2|\leqslant1$，$\lambda_1\neq\lambda_2$[3]。由Miller准则知[1]，它等价于$|Rf(y)+y|<1$，即格式（1）的稳定条件为

$$|R|\leqslant\sup_{\alpha}\inf_{0\leqslant y\leqslant1}G(y,\alpha) \tag{6}$$

$$G(y,\alpha)=\frac{1+y}{8y^3(\alpha y^2-1)^2} \tag{7}$$

设$\alpha>1$，取$L=1/\sqrt{\alpha}$。当$y=0$，$L$有$G\to\infty$，故$G$在$[0,L]$上至少有一个极小值。当$L\leqslant y\leqslant1$时有

$$\frac{dG}{dy}=\frac{y^2(\alpha y^2-1)(3+2y-7\alpha y^2-6\alpha y^3)}{8y^6(\alpha y^2-1)^4}<0$$

因$L<y\leqslant1$有$y^2(\alpha y^2-1)>0$，$3+2y-7\alpha y-6\alpha y^3<3+2y-7\alpha L^2-6\alpha L^2y=-4(1+y)<0$。于是选取$\alpha$使其

$$G(1,\alpha)=\min_{0\leqslant y\leqslant L}G(y,\alpha)=G(z,\alpha) \tag{8}$$

则稳定条件（6）最好。由$dG/dy=0$得到$G$的驻点$z$和参数$\alpha$之间的关系式

$$\alpha=\frac{2z+3}{6z^3+7z^2} \qquad (0\leqslant z\leqslant1) \tag{9}$$

（9）代入（8）式，约去因子$(z^2-1)^2(6z+7)^2$得到

$$\varphi(z)=32z^5+64z^4+60z^3+8z^2-21z-9=0 \tag{10}$$

因$z>0$时有$\varphi''(z)>0$，故$\varphi'(z)$在$[0,1]$上是$z$的单调上升函数。由$\varphi'(o)=-21$，$\varphi'(0.26)=0.5$，$\varphi(o)=-9$及$\varphi(0.6)>5$看出$\varphi(z)$在$[0,1]$上有只有一个根$z=z_0\in[0,0.6]$。对（10）用二分法求出$z_0$，代入（9）算得$\alpha_0$，代入（7），（6）得到

$$z_0=0.5567150775,\quad \varphi(z)=-1.6E-08$$
$$\alpha_0=1.283528221,\quad L=0.88266781$$
$$G(1,\alpha_0)=3.109907144,\quad G(\alpha_0,\alpha_0)=3.109907164$$
$$|R|\leqslant3.1099071 \qquad (\alpha=\alpha_0) \tag{11}$$

重复前面的推导可以证明（11）也是$\alpha<0$时格式（1）-（2）的稳定条件。

## 二、 数值例子

设方程$u_t = au_{xxx}$（$0 \leqslant x \leqslant 1$，$t > 0$）和初边值条件确定的解为$u(x, t) = \cos(x - at)$。取$k = 0.02$，$a = 1.283528$ 以$u_m^n$表示用格式（1）算出的解，用公式$u(x_m, t_n) = \cos(x_m, t_n)$算准确值及（1）需要的初值和边值。从下表列出的误差值$u_m^n - u(x_m, t_n)$（$x_m = mh$，$t_n = n\tau$）看出计算数据稳定、符合理论分析。表中正值对应$a = 1$，$R = 3.1099$，负值对应于$a = -1$，$R = -3.1099$。

| $m$ \ $n$ | 2 | 102 | 202 |
|---|---|---|---|
| 15 | 3.66E−09 | 1.99E−07 | 2.97E−07 |
| | −3.86E−09 | −1.66E−07 | −5.04E−07 |
| 25 | 5.96E−09 | 2.59E−07 | 5.23E−07 |
| | −6.24E−09 | −4.12E−07 | −8.99E−07 |
| 35 | 8.08E−09 | 4.49E−07 | 8.08E−07 |
| | −8.30E−09 | −4.40E−07 | −6.18E−07 |

## 参 考 文 献

〔1〕 黎益，关于色散方程$u_t = au_{xxx}$的三层显式差分格式，四川大学学报（自然科学版），1988，25(3)：298－306

〔2〕 邬华谟，一类具高稳定性的三层显式格式$H_3$，计算数学，1986，8(3)：329－331

〔3〕 陆金甫，顾丽珍，陈景良：偏微分方程差分方法，高等教育出版社，1988，51－53