1990年7月 重庆大学学报 Vol.13, №.4
第13卷第4期 JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY Jul. 1990

FINSLER流形上局部LIPSCHITZ函数的变分

VARIATION OF LOCALLY LIPSCHITZ FUNCTION ON FINSLER MANIFOLD

马仁义*

Ma Renyi

（应用数学系）

摘　要　本文把Banach空间的局部Lipchitz函数的Clarke广义梯度理论推广到Finsler流形的情形，并讨论了相应的局部Lipschitz函数的变分性质，包括伪梯度向量场，形变引理，Morse不等式。

主题词　局部Lipschitz函数；形变引理；伪梯度向量场；Morse不等式

中国图书资料分类法分类号　O177.91

ABSTRACT　In this paper, we generalize the generalized gradient of clarke on Banach manifold to the case of Finsler manifold and discuss the variational property of corresponding locally Lipschitz function, such as pseudo-gradient vector field, deformation lemma and Morse inequality.

SUBJECT WORDS　locally Lipschitz function; deformation lemma; pseudo-gradient vector field; *Morse inquality*

一、引　言

非光滑分析是最近十几年来形成的一门新的数学分支，它在规划论、对策论、数理经济学、逼近论、变分学、最优控制论以及数学物理自由边值问题中均有应用[3]。文献[1]中讨论了Banach空间的局部Lipschitz函数的变分，证明了第一形变引理和相应的极小极大原理并给出了在偏微分方程中的应用。本文讨论Finsler流形上的局部Lipschitz函数的广义梯度及相应的变分问题，证明了第二形变引理，从而改进了[1，2]的一些相应的结果。

二、广义梯度理论

在本节中，我们讨论Finsler流形上的广义梯度理论。

定义2.1　我们称函数$f \in C^{1-0}(M, R^1)$，即f是M上的局部Lipschitz函数，是指$\forall x_0 \in$

收文日期　1988年2月6日

* 现为南开大学数学研究所博士生

M，都存在x_0的坐标$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$，以及常数$K=K(x_0)$，使得：

$$|f\circ\varphi_\alpha^{-1}(x)-f\circ\varphi_\beta^{-1}(y)|\leqslant\|x-y\|,\quad x,y\in\varphi_\alpha(U_\alpha)\subset\mathfrak{X}$$

容易证明定义2.1等价于：

定义2.1* 我们称$f\in C^{1-0}(M, R^1)$，即f是M上的局部Lipschitz函数，是指$\forall x_0\in M$，都存在x_0的邻域$U(x_0)$，以及常数$K=K(x_0)$，使得：

$$|f(x)-f(y)|\leqslant K\rho(x, y),\ \forall x,\ y\in U(x_0)。$$

这里，ρ是M上的Finsler度量。

对于Finsler流形上的局部Lipschitz函数f：$M\to R^1$，我们可以定义广义方向导数如下：

对于给定的切方向$[i, P, u]\in T_q(M)$，定义广义方向导数：

$$d^\circ f[i,P,u]=\overline{\lim_{\substack{y\to P\\ t\downarrow 0}}}\frac{f_i\varphi_i^{-1}(\varphi_i(y)+tu)-f(y)}{t}\tag{1}$$

容易验证：这个定义不依赖于坐标域的选取。即若$[i, P, u]=[j, P, v]$，则$d^\circ f[i, P, u]=d^\circ f[j, P, v]$。

广义方向导数具有下列性质：

(1) 函数$d_0 f|_P$：$T_q\to R$是次可加的正齐次的凸函数。

(2) 存在常数$K=K(P_0)$及邻域$U=U(P_0)$使得：

$$|d^\circ f[i, q, u]|\leqslant K\|[i, q, u]\|\quad \forall[i,q,u]\in T_U(M)$$

(3) $d^\circ f[i,q,u]$：$T_P\to R^1$是连续的Lipschitz函数。

(4) $d^\circ f(-[i,q,u])=d^\circ(-f)[i,P,u]$。

应用广义方向导数可以定义广义梯度。

定义2.2 设$f\in C^{1-0}(M, R^1)$，定义f在P处的广义梯度$\partial f(P)$为凸函数$d^\circ f|_P$：$T_P\to R_1$在θ点的次微分$\partial(d^\circ f|_P)$，即

$$\{x^*\in T_P^*(M)|\langle x^*, [i,P,u]\rangle\leqslant d^\circ f[i,P,u],\ \forall[i,P,u]\in T_P(M)\}.$$

广义梯度有下列性质：

(1) $\forall P\in M$，$\partial f(P)$是一个非空*弱紧凸集。

(2) $sup\{\|x^*\|_{T_P^*}|x^*\in\partial f(P)\}\leqslant K$。

(3) $\forall[i,p,u]\in T_P(M)$，$d^\circ f[i,P,u]=max\{\langle x^*, [i,P,u]\rangle|x^*\in\partial f(P)\}$

(4) 设Ω是$T_P^*(M)$中的非空*弱紧凸子集，则：

$$\partial f(x_0)\subset\Omega\Longleftrightarrow d^\circ f[i,P,u]\leqslant max\{\langle x^*, [i,P,u]\rangle|x^*\in\Omega\},$$
$$\forall[i,P,u]\in T_P(M)$$

(5) ∂: $P\in M\to\partial f(P)$是*弱上半连续的，即$\forall P\in M$，$\forall\varepsilon>0$，$u\in\mathfrak{X}$，都存在P的邻域$U=U(P, \varepsilon, u)$使得$\forall q\in U$时，$\forall w\in\partial f(q)$都有$w_0\in\partial f(P)$使得：

$$|\langle w, [i, q, u]\rangle-\langle w_0, [i, P, u]\rangle|<\varepsilon.\tag{2}$$

(6) $\lambda(P)\triangleq Min\{\|w\|_{T_P^*(M)}|w\in\partial f(P)\}$存在，是下半连续函数.

(7) 设$\phi\in C^1([0,1], M)$，并且$f\in C^{1-0}(M, R^1)$，则$h=fo\phi$：$[0,1]\to R^1$几乎处处可微，并且

$$h^1(t)\leqslant max\{\langle x^*,\ \phi^1(t)\rangle \mid x^*\in\partial f(\phi(t))\}\ a.e.$$

三、伪梯度向量场和第二形变引理

设M是C^{2-0} Finsler流形，$f\in C^{1-0}(M, R)$是M上的局部Lip函数．如果$\theta\in\partial f(P)$，则称P是f的临界点．$K=\{P\in M\mid\theta\in\partial f(P)\}$称为临界集．记$M^*=M\backslash K$，称$M^*$中的点为正则点。$C\in R^1$称为临界值是指$f^{-1}(C)\cap K\neq\phi$．不是临界值的实数称为正则值．记$K_C=K\cap f^{-1}(C)$，$C\in R^1$，称$f_C=\{P\in M\mid f(P)\leqslant C\}$为水平集．

定义3.1([2, P136]) 称$f\in C^{1-0}(M, R^1)$满足$(PS)'$条件，是指：

(1) 若$d(0, x_n)$与$f(x_n)$有界，$\lambda(x_n)\to 0$ $\Longrightarrow$ $\{x_n\}$有收敛子列．

(2) $\exists$常数α，$R>0$使得当$d(0, x)>R$时，有$\lambda(x)d(0, x)\geqslant\alpha$．

要证明第二形变引理，需要加强[2,]的引理．

引理3.1 设$f\in C^{1-0}(M, R^1)$，满足$(P.S.)'$条件，C是f在$[a, b]$中的唯一临界值，则在$f^{-1}[a, b]\backslash K_C$上存在局部Lipschitz向量场$V(x)$，满足：对$\forall\delta>0$，$\exists\varepsilon>0$，使得：对$\forall x\in f^{-1}[a; b]\backslash(K_C)_\delta$有：

$$\|V(x)\|\leqslant max\left(\frac{1}{\varepsilon},\ \frac{1}{\alpha}d(0,\ x)\right)$$

$$\langle x^*,\ V(x)\rangle\geqslant\frac{1}{2},\ x^*\in\partial f(x).$$

证明：1．应用[2, P_{245-7}]的方法可证：对$\forall\delta>0$，$\exists\varepsilon>0$，使得：$\forall x\in f^{-1}[a, b]\backslash(K_C)\delta$有：

$$\|V(x)\|\leqslant max\left(\frac{1}{\varepsilon},\ \frac{1}{\alpha}d(0,\ x)\right)$$

$$\langle x^*,\ V(x)\rangle\geqslant\frac{1}{2},\ x^*\in\partial f(x).$$

2．应用1的结论构造一个定义在整个$f^{-1}[a, b]\backslash K_C$上的伪梯度向量场．

若$\delta_1>\delta_2$，则由1°知对δ_1存在一个定义于$f^{-1}[a, b]\backslash(K_C)\frac{\delta_1}{2}$上的向量场$V_1(x)$满足：

$$\|V_1(x)\|\leqslant max\left(\frac{1}{\varepsilon_1},\ \frac{1}{\alpha}d(0,x)\right), \tag{3}$$

$$\langle x^*,\ V_1(x)\rangle\geqslant\frac{1}{2},\ x^*\in\partial f(x). \tag{4}$$

同样存在$f^{-1}[a, b]\backslash(K_C)\frac{\delta_2}{2}$上的向量场$V_2(x)$满足：

$$\|V_2(x)\| \leqslant max\left(\frac{1}{\varepsilon_2},\ \frac{1}{\alpha}d(0,\ x)\right)$$

$$\langle x^*,\ V_2(x)\rangle \geqslant \frac{1}{2},\ x^* \in \partial f(x).$$

选取局部 *Lipschitz* 函数（[3，P_{196}]），

$$\eta(x)=\begin{cases}1 & x\in f^{-1}[a,\ b]\backslash(K_C)_{\delta_1},\\ 0 & x\in (K_C)_{\frac{3}{4}\delta_1},\end{cases}\qquad 0\leqslant\eta(x)\leqslant 1.$$

构造新的$V_2'(x)$为：

$$V_2'(x)=\eta(x)V_1(x)+(1-\eta(x))V_2(x),$$

则$V_2'(x)$在$f^{-1}[a,\ b]\backslash(K_C)_{\frac{\delta_2}{2}}$上有定义且满足：

$$V_2'(x)=V_1(x),\ x\in f^{-1}[a,\ b]\backslash(K_C)_{\delta_1},$$

$$\|V_2'(x)\| \leqslant max\left(\frac{1}{\varepsilon'},\ \frac{1}{\alpha}d(0,x)\right),\ \varepsilon'=min(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2),$$

$$\langle x^*,\ V_2'(x)\rangle \geqslant \frac{1}{2},\ x^*\in\partial f(x).$$

现在取序列$\delta_1>\delta_2>\cdots\delta_n>\cdots$，$\delta_n\to 0\ (n\to\infty)$，重复上面的步骤，就证明引理3.1。

下面，我们证明第二形变引理，即

定理3.1　设f是定义在完备 Finsler 流形M上的局部 Lip 函数，满足$(P.S.)'$条件，又设在$f^{-1}(a,b]$上，至多有一临界值C，对应有穷多个临界点；则f_c是f_b的一个强形变收缩核，即存在一连续映射$\tau:[0,\ 1]\times f_b\to f_b$，满足：

$$\tau(0,\ \cdot)=id,$$

$$\tau(t,\ \cdot)|_{f_a}=id|_{fc}, \tag{5}$$

$$\tau(1,\ f_b)\subset fc.$$

证明：1．对每一$x\in f_b\backslash f_a$，定义伪梯度流：

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\eta(t,\ x)=-V(\eta(t,\ x))\\ \eta(0,\ x)=x\end{cases} \tag{6}$$

应用引理3.1以及常微分方程解的存在唯一性定理，我们知道$\eta(t,x)$在极大区间$[0,\ t(x))\subset[0,\ 2(b-c))$上存在唯一。并且易证$\lim\limits_{t\to t(x)-0}\eta(t,\ x)$存在，从而$\eta(t,\ x)$可延拓到$t(x)$，使得$f(\eta(t,\ x))=C$。应用证明隐函数定理的方法及引理3.1可知$t(x)$是关于$x$的连续函数。

2．定义形变收缩如下：

$$\tau(t,x)=\begin{cases}\eta(t\,t(x),\ x)), & (t,x)\in[0,1)\times(f_b\backslash f_a),\\ \lim\limits_{s\to 1-0}\eta(st(x),x), & (t,x)\in\{1\}\times(f_b\backslash f_a),\\ x, & (t,x)\in[0,1]\times f_a.\end{cases}$$

应用〔2, $P_{137-140}$〕的方法可以验证τ的连续性。从而定理3.1得证。

推论3.1 设$f\in C^{1-0}(M, R^1)$满足$(PS)'$条件，又设$a, b\in R^1$，使得$K\cap f^{-1}[a, b]=\phi$. 则f_b是f_a的一个强形变收缩核。

四、Morse 不 等 式

记号见〔2, $P_{265-271}$〕。

定理4.1 设$f\in C^{1-0}(M, R^1)$,满足$(PS)'$条件，又设C是区间〔a, b〕上的唯一临界值；对应有穷多个临界点；则

$$H_q(f_b, f_a)\cong H_q(f_c, f_c\backslash K_c),\quad q=0,1,2,\cdots$$

由于我们没有 Morse 指标的定义，我们只能有关于 Morse 型数的不等式，即

定理4.2 设$f\in C^{1-0}(M, R^1)$满足$(PS)'$条件，以及假设(A)(〔2, P_{266}〕)。则成立下列不等式：

$M_q-M_{q-1}+\cdots+(-1)^qM_0\geqslant\beta_q-\beta_{q-1}+\cdots+(-1)^q\beta_0$, $q=0,1,2,\cdots$。此外，还有

$$\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^qM_q=\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q\beta_q,$$

只要此式左边的级数收敛。

注记：本文的结论对具有$P.S.$条件的Lip函数均成立，而且对于光滑的$(PS)'$条件的函数本文的结论也是新的。

参 考 文 献

〔1〕 Chang K.C., Variational methods for nondifferentiable functional and their application to PDE, J.Math.Anal.APPL.,1981, 80: 102—129

〔2〕 张恭庆，临界点理论及其应用，上海科学技术出版社，1986

〔3〕 史树中，非光滑分析，数学进展，1986，(1)：8—21