1990年9月　　重庆大学学报　　Vol.13, No.5
第13卷第5期　　JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY　　Sep.1990

一个更广泛的熵约束生产力配置模型

A MORE GENERAL PRODUCTIVE FORCES
DISTRIBUTION MODEL WITH ENTROPY CONSTRAINT

何宗路　段虞荣

He Zonglu　Duan Yurong

（应用数学系）

摘　要　建立了具有熵约束的生产力配置模型，它既满足总费用les小的要求，又在一定水平上满足了优化配置的其它要求。该模型的正则最优解是一个引力模型。

关键词　熵；灵敏度；引力／生产力配置；库恩-塔克定理
中国图书资料分类法分类号　O221.2；F403.3

ABSTRACT　The productive forces distribution model with entropy constraint is established. It satisfies both the demand with minimization of total costs and the other demands with optimum distribution at a certain level. The model's regular optimal solution is a gravity molel.

KEY WORDS　entropy; sensitivity; attraction / distribution of productive force; Kuhn-Tucker theorem

1　模型的建立

文〔1〕在生产地接近消费地的生产力配置模型的基础上建立了具有熵约束的生产力配置模型I。本文将在生产地接近原料地与消费地的生产力配置模型I^0的基础上建立更一般的生产力模型〔2〕。

$$I^0:\quad \begin{cases} \min\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_i+c_{ij})T_{ij}+\sum_{k=1}^{u}\sum_{i=1}^{m}h_{ki}L_{ki}\right) \\ s.t.\quad T_i=\sum_{j=1}^{n}T_{ij}\leqslant A_i,\quad \sum_{i=1}^{m}T_{ij}=B_j,\quad T_{ij}\geqslant 0 \end{cases}$$

收文日期　1989-07-13

$$\sum_{k=1}^{u} L_{ki}=r_i T_{ij},\qquad \sum_{i=1}^{m} L_{ki}\leqslant G_k,\ L_{ki}\geqslant 0$$

这里$c_i>0$，$c_{ij}\geqslant 0$，$h_{ki}\geqslant 0$，$A_i>0$，$B_j>0$，$r_i>0$，$G_k>0$

i——生产地编号；m——生产地数目；j——消费地编号；n——消费地数目；k——原料地编号；u——原料地数目；c_i——第i地单位产品生产成本（不包括原料运费）；c_{ij}——第i地运到第j地的单位产品数量；T_{ij}——第 i 地运到第 j 地的产品数量；h_{ki}——第k 地到第i地的单位原料运费；L_{ki}——第k 地运到第 i 地的原料数量；A_i——第 i 地最大生产量；B_j——第j地产品需求量；r_i——第i地生产单位产品消耗的原料量；G_k——第k 地的最大原料供应量。

模型I^0作为生产力配置模型优化不是理想的。因为生产力优化配置原则除考虑费用极小还须兼顾其它方面的问题。例如对厂家和用户讲，最优的产购销安排还须考虑进、供货方式、时间、付款方式、对未来的估计、现有生产情况、其它目的的实现等问题。对全社会讲，还须考虑经济的中、长期效益乃至政治、军事、文化、生态环境等整体利益问题，这些带入不确定性(包括随机性、模糊性和动态性)的大量因素导致产购销分布的异常复杂性，其最佳分布当然不会纯粹按费用极小而构成，但要精确求出其最佳分布又几乎不可能。在此情况下，本文从宏观入手，假定现存的产购销分布一定程度上体现出上述诸多原则。对现存分布的离中趋势（或聚集一分散程度）作测定，通过所得测度将此分布结构大致保持下来，所建立的费用极小模型便在一笼统水平上间接兼顾到优化配置的其它原则，达到建立较合理的生产力配置优化模型的目的。这样，关键问题在于选什么量作为产购销分布的离中趋势测度，同时须使所建模可解。有两种这类量，即方差和熵。方差与熵有紧密联系。统计中的正态分布、负指数分布、γ分布的方差与对应的熵H 关系是$H=\log\sigma+\sqrt{2\pi e}$、$H=\log\sigma+1$、$H=\log\sigma+\log\sqrt{2\pi e}+\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)+O\left(\frac{1}{\gamma}\right)$。由于当熵作为随机变量的离中趋势测度时，它不随随机变量的选取变而纯属概率密度函数的本身属性[3]，故我们采用熵为离中趋势的测度。为讨论方便。

令$r_i=r$，记$T=\sum_i^m\sum_j^n T_{ij}$，$x_{ij}=T_{ij}/T$，$y_{ki}=L_{ki}/rT$，设产购销矩阵$T^0$的元素$\left\{T^0_{ij},\ T^0_{ki}\right\}$为同一时刻观测值，$T^0$为参考阵，定义观测的产购销分布的熵为$H^0_x=-\sum_j^n x^0_{ij}\log x^0_{ij}$，$H^0_y=-\sum_k^u\sum_i^m y_{ki}\log y_{ki}$，引入熵约束$H(x)=-\sum_i^m\sum_j^n x_{ij}\log x_{ij}\geqslant H^0_x$，$H(y)=-\sum_k^u\sum_i^m y_{ki}\log y_{ki}\geqslant H^0_y$，记$z=(x,y)^T=(x_{11},\ \cdots,x_{mn},\ y_{11},\ \cdots,y_{um})^T$，$H(z)=(H(x),\ H(y))^T$，$H^0=\left(H^0_x,\ H^0_y\right)^T$，$f(z)=(f_1(x),f_2(y))=(-H(x)-\sum_i^m\sum_j^n x_{ij}+1$，

$-H(y)-\sum\limits_{k}^{u}\sum\limits_{i}^{m}y_{ki}+1\Big)$, $a_i=A_i/T$, $b_j=B_j/T$, $g_k=G_k/rT$, $c(z)=\sum\limits_{i}^{m}\sum\limits_{j}^{n}(c_i+c_{ij})x_{ij}+\sum\limits_{k}^{u}\sum\limits_{i}^{m}rh_{ki}y_{ki}$, $S_1=\{x=(x_{11},\cdots,x_{mn})^T|\,0<x_i=\sum\limits_{j}^{n}x_{ij}\leqslant a_i$, $\sum\limits_{i}^{m}x_{ij}=b_j$, $x_{ij}\geqslant 0$, $x_{ij}\in R^1$。这里$a_i>0$, $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i<1$, $b_j>0$, $\sum\limits_{j}^{n}b_j=1$, $i=1,\cdots,m$; $j=1,\cdots,n\}$, $S_2(x)=\{y=(y_{11},\cdots,y_{un})|\,0<\sum\limits_{i}^{m}y_{ki}\leqslant g_k$, $\sum\limits_{k}^{u}y_{ki}=\sum\limits_{j}^{n}x_{ij}$, $y_{ki}\in R^1$。这里$g_k>0$, $r>0$, $\sum\limits_{k=1}^{u}g_k<1$, $x=(x_{11},\cdots,x_{mn})^T\in S_1$, $i=1,\cdots,m$; $k=1,\cdots,u\}$。

有新模型

问题I'：
$$\begin{cases}\min & C(z)\\ s.t. & f(z)\leqslant -H^0,\ z=(x,y)^T\in S_1\times S_2(x).\end{cases}$$

2 模型的数学分析

问题I'的线性约束部分系数矩阵是

$$L=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1\cdots1 & & & & & & & \\
 & 1\cdots1 & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & 1\cdots1 & & & & \\
1\ \ddots\ 1 & 1\ \ddots\ 1 & \cdots & 1\ \ddots\ 1 & & & & \\
 & & & & 1\cdots1 & & & \\
 & & & & & 1\cdots1 & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & 1\cdots1 \\
-1\cdots-1 & & & & 1\ \ddots\ 1 & 1\ \ddots\ 1 & \cdots & 1\ \ddots\ 1 \\
 & -1\cdots-1 & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & -1\cdots-1 & & & &
\end{array}\right)\begin{array}{l}\left.\right\}m\\ \left.\right\}n\\ \left.\right\}u\\ \left.\right\}m\end{array}\\
\underbrace{\qquad\qquad}_{m\cdot n}\qquad\underbrace{\qquad\qquad}_{u\cdot m}\end{array}$$

易求得L的秩为$2m+n+u-2$，不妨去掉第$m+n$行和第$2m+n+u$行，余下矩阵满秩，问题I'的可行域不变。

定义 1 问题I'的可行点$z^*(f(z^*)\leqslant -H^0$, $z^*\in S_1\times S_2(x^*))$称为正则点，如果$H(z^*)=H^*$，且$L$的行向量$l_k$, $k=1,\cdots,2m+n+u-2$和梯度向量$\nabla f_1(x^*)$、$\nabla f_2(y^*)$线性无关。

引理 1

问题Ⅱ'(1)：
$$\begin{cases}\max & H(x)\\ s.t. & x\in S_1\end{cases}$$

有唯一最优解x'，且形如$x'_{ij}=e^{u_i+v_j}$，$i=1,\cdots,m$；$j=1,\cdots,n$；

问题Ⅱ′(2)：$\begin{cases}\max H(y)\\ s.t.\quad y\in S_2(x)\end{cases}$

有唯一最优解$y'(x)$，且形如$y'_{ki}=e^{p_k+q_i}$，其中$p_k=p_k(x)$，$q_i=q_i(x)$，$i=1,\cdots,m$；$k=1,\cdots,u$。

以下均用x'，$y'(x)$记问题Ⅱ′(1)、Ⅱ′(2)的最优解。

引理 2　设z^*是问题I'的可行解，其熵约束灵敏，即$H(z^*)=H^0$，则z^*不是正则点的充分必要条件是$z^*=(x^*,y^*)^T$，满足(i) $x^*=x'$；或者(ii) $x^*\neq x'$，$y^*=y'(x^*)$

定义 2　$\overline{H}^0_{\max}=\left(\overline{H}^0_{\max x},\ \overline{H}^0_{\max y}\right)^T$，其中$\overline{H}^0_{\max x}=H(x')$，$\overline{H}^0_{\max y}=H(y'(x''))=\max\limits_{x\in S_1}H(y'(x))$。

显然当$H^0\leqslant\overline{H}^0_{\max}$，$(x'',y'(x''))^T$是问题I′的可行解，由于I′的可行域列紧，故I′必有最优解，自然

问题Ⅲ′(1)：$\begin{cases}\min c(z)\\ s.t.\quad f_1(x)\leqslant -H^0_x,\ z=(x,y)^T\in S_1\times S_2(x)\end{cases}$

与问题Ⅲ′(2)：$\begin{cases}\min c(z)\\ s.t.\quad f_2(y)\leqslant -H^0_y,\ z=(x,y)^T\in S_1\times S_2(x)\end{cases}$

也有最优解，故可作如下定义

定义 3　$H^0_{\min}=\left(H^0_{\min x},\ H^0_{\min y}\right)^T=(H(\bar{x}),H(\bar{y}))^T$，其中

$$H(\bar{x})=\max_{\substack{z(x,y)^T\text{为Ⅲ′(2)}\\ \text{的最优解}}}H(x),\qquad H(\bar{y})=\max_{\substack{z(x,y)^T\text{为Ⅲ′(1)}\\ \text{的最优解}}}H(y)$$

$(\bar{x},\bar{\bar{y}})^T$为Ⅲ′(2)的最优解，$(\bar{\bar{x}},y)^T$为Ⅲ′(1)的最优解。

以下出现的$\bar{x}$、$\bar{\bar{x}}$、$\bar{y}$、$\bar{\bar{y}}$均表示定义 3 中的$\bar{x}$、$\bar{\bar{x}}$、$\bar{y}$、$\bar{\bar{y}}$。

引理 3：我们有

(i) 对$H^0\leqslant H^0_{\min}$，问题Ⅲ′(1)、Ⅲ′(2)的最优解$(\bar{\bar{x}},\bar{y})^T$，$(\bar{x},\bar{\bar{y}})^T$均为问题$I'$的最优解$z^*$；

(ii) 对$H^0_{\min}<H^0\leqslant\overline{H}^0_{\max}$，问题$I'$有唯一最优解$z^*$，且熵约束灵敏，即$H(z^*)=H^0$；

(iii) 对$H^0>\overline{H}^0_{\max}$或$H^0_x>\overline{H}^0_{\max x}$或$H^0_y>\overline{H}^0_{\max y}$，问题$I'$无可行解。

定义 4　对于$H^0\leqslant\overline{H}^0_{\max}$定义$H^0_{\max}=\left(H^0_{\max x},\ H^0_{\max y}\right)^T$，其中$H^0_{\max x}=H(x')$，$H^0_{\max y}=\min(H(y'(x')),H(y'(x^*)))$，$z^*=(x^*,y^*)^T$为问题$I'$的最优解。

引理 4　设 $H^0_{min}<H^0\leqslant\overline{H}^0_{max}$，当 $H^0<H^0_{max}$ 或 $H^0_x<H^0_{max\,x}$，$H^0_y=H^0_{max\,y}<H(y'(x^*))$，其中 z^* 是问题 I' 的最优解，设 z^* 是正则点，$z^*>0$，则

$$\begin{cases} x^*_{ij}=\exp\{(-\alpha_i-\beta_j+\xi_i-c_i-c_{ij})/\eta_1\} \\ y^*_{ki}=\exp\{(-\xi_i-\zeta_k-rh_{ki})/\eta_2\} \end{cases}$$

这里 $\alpha_i\geqslant 0$，当 $\sum\limits_{j}^{n} x^*_{ij}<a_i$，有 $\alpha_i=0$；$\zeta_k\geqslant 0$，当 $\sum\limits_{i}^{m} y_{ki}<g_k$，有 $\zeta_k=0$，$\eta_1>0$，$\eta_2>0$，$i=1$，…，m；$j=1$，…，n；$k=1$，…，u。其中（α，β，ζ，ξ）和（η_1，η_2）分别为问题 I' 的约束条件对应的Lagrange乘子。

引理 5　设 $H^0_{min}<H_0\leqslant\overline{H}^0_{max}$，$z^*$ 为问题 I' 的最优解。当 $H_0<H^0_{max}$，或 $H^0_x<H^0_{max\,x}$、$H^0_y=H^0_{max\,y}<H(y'(x^*))$，且 z^* 为正则点，则 $z^*>0$。

定理 1　问题 I' 有

（i）　对 $H^*\leqslant H^*_{min}$，$(\overline{x},\ \overline{\overline{y}})^T$，$(\overline{\overline{x}},\ \overline{y})^T$ 均为最优解 z^*；

（ii）　对 $H^*_{min}<H^*\leqslant\overline{H}^*_{max}$ 有唯一最优解 $z^*=(x^*,\ y^*)^T$，且 $H(z^*)=H_*$。1）　当 $H^0<H^0_{max}$ 或 $H^0_x<H^*_{max\,x}$，$H^*_y=H^*_{max\,y}<H(y'(x^*))$，则 z^* 是正则最优解：

$$\begin{cases} x^*_{ij}=\exp\{(-\alpha_i-\beta_j+\xi_i-c_i-c_{ij})/\eta_1\} \\ y^*_{ki}=\exp\{(-\xi_i-\zeta_k-rh_{ki})/\eta_2\} \end{cases}$$

这里 $\alpha_i\geqslant 0$，当 $\sum\limits_{j}^{n} x^*_{ij}<a_i$，有 $\alpha_i=0$；$\zeta_k\geqslant 0$，当 $\sum\limits_{i}^{m} y_{ki}<g_k$，有 $\zeta_k=0$；$\eta_1>0$，$\eta_2>0$。$i=1$，…，m；$j=1$，…，n；$k=1$，…，u。

2）　当 $H^*=H^*_{max}$，则 z^* 有非正则最优解 $z'=(x',\ y'(x'))^T$

（iii）　对于 $H^*>\overline{H}^*_{max}$，或 $H^0_x>\overline{H}^0_{max\,x}$，或 $H^*_y>\overline{H}^0_{max\,y}$

证：（i）　与引理 3（i）的证明相同；

（ii）　由引理 3（ii）知 I' 有唯一最优解 $z^*=(x^*,\ y^*)^T$，且 $H(z^*)=H^*$，因而有 $H^*_{max}=\left(H^*_{max\,x},\ H^*_{max\,y}\right)^T$，其中 $H^*_{max\,x}=H(x')$，$H^*_{max\,y}=min(H(y'(x')),\ H(y'(x^*)))$

1）　只须证明 z^* 正则，便可由引理 4、引理 5 得出结论。设 z^* 非正则，由引理 2 有 $x^*=x'$ 或 $y^*=y'(x^*)$，若 $x^*=x'$，有 $H^*_x=H(x^*)=H(x')=H^*_{max\,x}$，与已知 $H^*_x<H^0_{max\,x}$ 矛盾，故 $x^*\neq x'$；若 $y^*=y'(x^*)$，有 $H^*_y=H(y^*)=H(y'(x^*))\geqslant H^*_{max\,y}$，与已知 $H^*_y<H^*_{max\,y}$ 或已知 $H^0_y<H(y'(x^*))$ 矛盾，故 $y^*\neq y'(x^*)$，因此 z^* 正则，1）得证；

2）对于$z'=(x', y'(x'))$，$\because H(x')=H^0_{\max x}=H^0_1$，$H(y'(x'))\geq H^0_{\max y}=H^0_2$，$\therefore z'$是问题$I'$的可行解。

设$z^*\neq z'$，作凸组合$z=\rho z^*+(1-\rho)z'$，$0<\rho<1$，显然$z\in S_1\setminus S_2(x)$。

若$x^*\neq x'$，则$H(x)>\rho H(x^*)+(1-\rho)H(x')=\rho H^0_1+(1-\rho)H^0_{\max x}=H^0_{\max x}$与$x\in S_1$矛盾，故$x^*\neq x'$错，$\therefore x^*=x'$；

若$y^*\neq y'(x')$，则$H(y)>\rho H(y^*)+(1-\rho)H(y'(x'))\geqslant\rho H^0_2+(1-\rho)H^*_{\max y}=H^*_{\max y}$。又由于$y=\rho y^*+(1-\rho)y'(x')$，$\therefore y\in S_2(x')$，$y\in S_2(x^*)$，故$H(y)\leqslant H(y'/x'))$，$H(y)\leqslant H(y'(x^*))$，即$H(y)\leqslant H^*_{\max y}$，与上式矛盾，$\therefore y^*=y'(x')$，故$z^*=z'=(x', y'(x'))^T$

2）得证；

（iii）　由$\overline{H}^0_{\max}$的定义可得结论。

定理2　让z^*是问题I'的正则可行解，它使得

$$\begin{cases} x^*_{ij}=\exp\{(-\alpha_i-\beta_j+\xi_i-c_i-c_{ij})/\eta_1\} \\ y^*_{ki}=\exp\{(-\xi_i-\zeta_k-rh_{ki})/\eta_2\} \end{cases}$$

这里$\alpha_i\geqslant 0$，当$\sum\limits_j^{o} x^*_{ij}<\alpha_i$，有$\alpha_i=0$；$\zeta_k\geqslant 0$，当$\sum\limits_i^{m} y_{ki}<g_k$，有$\zeta_k=0$；$\eta_1>0$，$\eta_2>0$，$i=1, \cdots, m$；$j=1, \cdots, o$；$k=1, \cdots, u$，则$z^*$是问题$I'$的唯一最优解。

定理3　假设与定理2相同，且设α、β、ξ、ζ得到恰当地标准化，则α、β、ξ、ζ、η均唯一。

定理4　假设与定理3相同，则有一个（a，b，o，g，H^0）点的邻域，使在这个邻域里对任一点（$\overline{a}$，$\overline{b}$，$\overline{d}$，$\overline{g}$，$\overline{H^0}$），唯一最优解$z^*=z^*(\overline{a}, \overline{b}, \overline{d}, \overline{g}, \overline{H^0})$是点（$\overline{a}$，$\overline{b}$，$\overline{d}$，$\overline{g}$，$\overline{H^0}$）的连续函数。此外，有

$$-\alpha_i=\frac{\partial c(z^*(a,b,0,g,H^0))}{\partial a_i};$$

$$-\beta_j=\frac{\partial c(z^*(a,b,0,g,H^0))}{\partial b_j};$$

$$-\xi_i=\frac{\partial c(z^*(a,b,0,g,H^0))}{\partial d_i},\qquad d_i=\sum_{k=1}^{u} y_{ki}-x_i;$$

$$-\zeta_k=\frac{\partial c(z^*(a,b,0,g,H^0))}{\partial g_k};$$

$$\eta_1=\frac{\partial c(z^*(a,b,0,g,H^0))}{\partial H^0_1};$$

$$\eta_2=\frac{\partial c(z^*(a,b,0,g,H^*))}{\partial H_y^0},$$

定理5　问题I'的对偶规划是

$$\max_{\substack{\alpha,\beta,\xi,\zeta,\eta\\ \alpha\geqslant 0,\ \zeta\geqslant 0,\eta\geqslant 0}}\Big\{-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_i-\sum_{j=1}^{n}\beta_j b_j-\sum_{k=1}^{u}\zeta_k g_k$$

$$+\eta_1\left(H_x^0+1\right)+\eta_2\left(H_y^0+1\right)$$

$$-\eta_1\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\exp[(-\alpha_i-\beta_j+\xi_i-c_i-c_{ij})/\eta_1]$$

$$-\eta_2\sum_{k=1}^{u}\sum_{i=1}^{m}\exp[(-\xi_i-\zeta_k-rh_{ki})/\eta_2]\Big\}$$

3　模型解的经济学含义

本节着重讨论模型的最优解的经济学含义。为此将问题I'还原成（将$x_{ij}\to T_{ij}$，$y_{ki}\to L_{ki}$）

问题I''：

$$\begin{cases}\min\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_i+c_{ij})T_{ij}+\sum_{k=1}^{u}\sum_{i=1}^{m}h_{ki}L_{ki}\right)\\ s.t.\ T_i=\sum_{j=1}^{n}T_{ij}\leqslant A_i,\ \sum_{i=1}^{m}T_{ij}=B_j,\ \sum_{j=1}^{n}B_j=T,\ T_{ij}\geqslant 0,\ \sum_{i=2}^{m}A_i<T,\ T_i>0\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{m}L_{ki}\leqslant G_k,\ \sum_{k=1}^{u}L_{ki}=rT_i,\ L_{ki}\geqslant 0,\quad \sum_{k=2}^{u}G_k<T$$

$$H(x)=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{T_{ij}}{T}\log\frac{T_{ij}}{T}\geqslant H_x^0$$

$$H(y)=-\sum_{k=1}^{u}\sum_{i=1}^{m}\frac{L_{ki}}{rT}\log\frac{L_{ki}}{rT}\geqslant H_y^0$$

这里$A_i>0$，$B_j>0$，$r>0$，$G_k>0$，$c_i>0$，$c_{ij}\geqslant 0$

作和前节相平行的推理，易得对于$H_x^0\in\left(H_{min}^0,\ H_{max}^0\right)$，当$H^0>H_{max}^0$时，问题Ⅱ′有唯一正则最优解：

$$T_{ij}^{*}=T\cdot\frac{e^{\frac{\partial C}{\partial A_i}\cdot T/\eta_1}\cdot e^{\frac{\partial C}{\partial B_j}\cdot T/\eta_1}}{e^{\left(r\frac{\partial C}{\partial D_i}+c_i+c_{ij}\right)\cdot T/\eta_1}}$$

$$L_{ki}^{*}=rT\cdot\frac{e^{\frac{\partial C}{\partial G_k}\cdot rT/\eta_2}\cdot e^{\frac{\partial C}{\partial D_i}\cdot rT/\eta_2}}{e^{h_{ki}\cdot rT/\eta_2}} \tag{1}$$

$i=1,\cdots,m$；$j=1,\cdots,n$；$k=1,\cdots,u$，$z^{*}=\left(T_{11}^{*},\cdots,T_{mn}^{*},L_{11}^{*},\cdots,L_{um}^{*}\right)^{T}$

$C=C(z^{*}(A,B,0,G,H^{\circ}))$，$D_i=\sum\limits_{k=1}^{u}L_{ki}-r\sum\limits_{j=1}^{n}T_{ij}$，$\frac{\partial C}{\partial A_i}\leqslant 0$，$\frac{\partial C}{\partial G_k}\leqslant 0$，$\eta_1=-\frac{\partial C}{\partial H_1^{\circ}}>0$，$\eta_2=-\frac{\partial C}{\partial H_2^{\circ}}>0$，这是一个指数型的引力模型。其中$\frac{\partial C}{\partial A_i}$是总费用在最优点$z^{*}$对第$i$地产品最大生产能力的灵敏度；$\frac{\partial C}{\partial B_j}$是$j$地产品需求在最优点$z^{*}$的边际价格；由$D_i=\sum\limits_{k=1}^{u}L_{ki}-rT_i$；当$D_i$愈小表示第$i$地原料愈匮乏，$D_i$愈大表示第$i$地原料愈不匮乏（即愈充足），因而$\frac{\partial C}{\partial D_i}$表示第$i$地原料匮乏在最优点$z^{*}$的边际价格；$\frac{\partial C}{\partial G_k}$是总费用在最优点$z^{*}$对第$k$地原料最大供应量的灵敏度；$\frac{\partial C}{\partial H_1^{\circ}}$、$\frac{\partial C}{\partial H_2^{\circ}}$分别是产品产销分布的熵$H_1^{\circ}$与原料购销分布的熵$H_2^{\circ}$在最优点$z^{*}$的边际价格。

公式（1）益于用作各层次、类别的区域分析、长期经济预测与规划以及经济理论分析。

参　考　文　献

〔1〕何宗路．具有熵约束的生产力配置模型及数学分析．见：中国首届控制与决策系系统学术会议论文集Ⅲ．1989

〔2〕陈锡康等．经济数学方法与模型．北京：中国财政经济出版社，1982．223～227

〔3〕Erlander S. Optimal Spatial Interaction and The Gravity Model. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 1980

〔4〕Luenberger D.G. Introduction to Linear and Nonlinear Programming. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1984. 223, 236