1990年9月 第13卷第5期
重庆大学学报
JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY
Vol.13 No.5 Sep.1990

一类三次参数曲线

A CLASS OF CUBIC PARAMETER CURVES

赵学军

Zhao Xuejun

（应用数学系）

摘 要 给出了一类三次曲线，它以*Hermite*曲线、*Ball*曲线、*Bézier*曲线以及*Timmer*曲线为特例。这种参线曲线在一定条件下具有凸性、保凸性、与特征多边形第二边相切等性质。它克服了*Bézier*曲线在特征多边形给定之后就不能改变的缺点，可以根据实际需要调整曲线的形状。

关键词 三次参数曲线；*Bézier*曲线；凸性/保凸性

中国图书资料分类法分类号 O241.5

ABSTRACT A class of cubic parameter curves are given. Hermite curve, Ball curve, Bézier curve and Timmer curve are its particular cases. Under certain conditions, this cubic parameter curves have the following properties: Convexity, retaining convex form, contact with the second edge of characteristic polygon and so on. This curve is different from Bézier curve, because its shape can be changed after its characteristic polygon is given, so its shape can be changed according to our actual requirements.

KEY WORDS cubic parameter curve; Bezier curve; convexity/retaining convex from

1 三次参数曲线的构造

如图1，给定四点$\vec{P}_1$、$\vec{P}_2$、$\vec{P}_3$、$\vec{P}_4$。新点$\vec{P}'_1$、$\vec{P}'_2$、$\vec{P}'_3$、$\vec{P}'_4$定义如下：

$$\vec{P}'_1=(1-\lambda)\vec{P}_1+\lambda\vec{P}_2$$

$$\vec{P}'_2=(1-\tau)\vec{P}_1+\tau\vec{P}_2$$

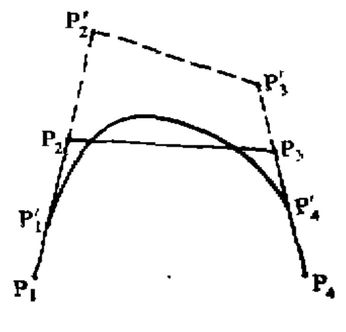

图1

收文日期 1989-05-26

$$\overrightarrow{P_3'}=(1-\gamma)\overrightarrow{P_4}+\gamma\overrightarrow{P_3}$$

$$\overrightarrow{P_4'}=(1-\mu)\overrightarrow{P_4}+\mu\overrightarrow{P_3}$$

其中λ，μ，τ，γ为参量。

以$\overrightarrow{P_i'}$，$i=1，2，3，4$为特征点构造Bézier曲线：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P}(t)&=(1-t)^3[(1-\lambda)\overrightarrow{P_1}+\lambda\overrightarrow{P_2}]+3t(1-t)^2[(1-\tau)\overrightarrow{P_1}+\tau\overrightarrow{P_2}]\\&\quad+3t^2(1-t)[(1-\gamma)\overrightarrow{P_4}+\gamma\overrightarrow{P_3}]+t^3[(1-\mu)\overrightarrow{P_4}+\mu\overrightarrow{P_3}]\\&=[(1-\lambda)(1-t)^3+3(1-\tau)t(1-t)^2]\overrightarrow{P_1}\\&\quad+[\lambda(1-t)^3+3\tau t(1-t)^2]\overrightarrow{P_2}+[3\gamma t^2(1-t)\\&\quad+\mu t^3]\overrightarrow{P_3}+[3(1-\gamma)t^2(1-t)+(1-\mu)t^3]\overrightarrow{P_4}\quad t\in[0,1]\end{aligned}\qquad(1)$$

可见，这也是以$\overrightarrow{P_i}$，$i=1,2,3,4$为特征点的三次参数曲线，其基函数为：

$$G_1(t)=(1-\lambda)(1-t)^3+3(1-\tau)t(1-t)^2$$
$$G_2(t)=\lambda(1-t)^3+3\tau t(1-t)^2$$
$$G_3(t)=3\gamma t^2(1-t)+\mu t^3$$
$$G_4(t)=3(1-\gamma)t^2(1-t)+(1-\mu)t^3$$

1.1 基函数的性质

（1） 权性　$\sum_{i=1}^{4}G_i(t)=1$

（2） 正性　当$0\leqslant\lambda$，μ，τ，$\gamma\leqslant1$时，$0\leqslant G_i(t)\leqslant1$，$i=1，2，3，4$

证　因为

$$G_1(t)=(1-t)^2[1-\lambda+(\lambda-3\tau+2)t]$$
$$G_2(t)=(1-t)^2[\lambda+(3\tau-\lambda)t]$$
$$G_3(t)=t^2[3\gamma-(3\gamma-\mu)t]$$
$$G_4(t)=t^2[3(1-\gamma)-(2-3\gamma+\mu)t]$$

而　$1-\lambda+(\lambda-3\tau+2)t$在$1-\lambda$与$3(1-\tau)$之间；$\lambda+(3\tau-\lambda)t$在$\lambda$与$3\tau$之间；$3\gamma-(3\gamma-\mu)t$在$3\gamma$与$\mu$之间；$3(1-\gamma)-(2-3\gamma+\mu)t$在$3(1-\gamma)$与$1-\mu$之间，故当$0\leqslant\lambda$，$\mu$，$\tau$，$\gamma\leqslant1$时，$G_i(t)>0$，$i=1，2，3，4$，又由权性知$G_i(t)<1$，得证。

1.2 曲线的性质

1.2.1 端点性质

$$\overrightarrow{P}(0)=(1-\lambda)\overrightarrow{P_1}+\lambda\overrightarrow{P_2}$$
$$\overrightarrow{P}(1)=(1-\mu)\overrightarrow{P_4}+\mu\overrightarrow{P_3}$$
$$\overrightarrow{P'}(0)=3(\tau-\lambda)(\overrightarrow{P_2}-\overrightarrow{P_1})$$
$$\overrightarrow{P'}(1)=3(\gamma-\mu)(\overrightarrow{P_4}-\overrightarrow{P_3})$$

1.2.2 当$0\leqslant\lambda$，μ，τ，$\gamma\leqslant1$时，曲线具有凸包性

1.2.3 曲线具有几何不变性

由于（1）式是向量表示式，曲线的形状仅与特征多边形的各顶点及参量有关，因此它不依赖于坐标系的选择。

1.2.4 曲线具有矩阵表达式

$$\vec{P}(t)=(1,t,t^2,t^3)\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 3(\lambda-\tau) & 3(\tau-\lambda) & 0 & 0 \\ 3(1-\lambda)-6(1-\tau) & 3\lambda-6\tau & 3\gamma & 3(1-\gamma) \\ 3(1-\tau)-(1-\lambda) & 3\tau-\lambda & \mu-3\gamma & (1-\mu)-3(1-\gamma) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \\ \vec{P}_4 \end{pmatrix}$$

1.3 参量λ，μ，τ，γ取特定的值而得到特殊的曲线：

1. $\lambda=\mu=\tau=\gamma$时，为直线
2. $\lambda=\mu=0$，$\tau=\gamma=\frac{1}{3}$时，为*Hermite*曲线
3. $\lambda=\mu=0$，$\tau=\gamma=\frac{2}{3}$时，为*Ball*曲线
4. $\lambda=\mu=0$，$\tau=\gamma=1$时，为*Bézier*曲线
5. $\lambda=\mu=0$，$\tau=\gamma=\frac{4}{3}$时，为*Timmer*曲线

2 特征多边形第二边相切的条件

根据曲线的端点性质知，曲线与特征多边形的第一边和第三边相切。下面讨论曲线与特征多边形第二边相切的条件。

为了讨论方便与不失一般性，取$\vec{P}_1=0$，即位于原点。于是（1）式成为

$$\vec{P}(t)=G_2(t)\vec{P}_2+G_3(t)\vec{P}_3+G_4(t)\vec{P}_4 \qquad (2)$$

假定$\vec{P}_2$不平行$\vec{P}_3$，则$\vec{P}_4$可由$\vec{P}_2$和$\vec{P}_3$线性表示，即

$$\vec{P}_4=a\vec{P}_2+b\vec{P}_3$$

代入（2）得

$$\vec{P}(t)=[G_2(t)+aG_4(t)]\vec{P}_2+[G_3(t)+bG_4(t)]\vec{P}_3 \qquad (3)$$

其导矢

$$\vec{P}'(t)=\left[G_2'(t)+aG_4'(t)\right]\vec{P}_2+\left[G_3'(t)+bG_4'(t)\right]\vec{P}_3 \qquad (4)$$

（3）、（4）中，$0<t<1$

定理1 若$\vec{P}_2$不平行$\vec{P}_3$，$a+b\neq 1$，则曲线（2）在$t=t_0$（$0<t_0<1$）处与特征多边形第二边或其延长线相切的充要条件为：存在λ，μ，τ，γ满足

$$\begin{cases} G_2(t_0)+G_3(t_0)+(a+b)G_4(t_0)=1 \\ G_2'(t_0)+G_3'(t_0)+(a+b)G_4'(t_0)=0 \end{cases} \qquad (5)$$

证　必要性　由$\overrightarrow{P}(t)$在$t=t_0(0<t_0<1)$处与线段$\overline{P_2P_3}$或其延长线相切，则点$\overrightarrow{P}(t_0)$应落在$\overrightarrow{P_2}$和$\overrightarrow{P_3}$所确定的直线上．于是(3)中$\overrightarrow{P_2}$和$\overrightarrow{P_3}$的系数之和等于1．即

$$G_2(t_0)+G_3(t_0)+(a+b)G_4(t_0)=1 \tag{6}$$

又由假设，有$\overrightarrow{P'}(t)|_{t=t_0}//(\overrightarrow{P_3}-\overrightarrow{P_2})$．即

$$\overrightarrow{P'}(t_0)=l(t_0)(\overrightarrow{P_3}-\overrightarrow{P_2})$$

整理得

$$\left[G_2'(t_0)+aG_4'(t_0)+l(t_0)\right]\overrightarrow{P_2}+\left[G_3'(t_0)+bG_4'(t_0)-l(t_0)\right]\overrightarrow{P_3}=0$$

由$\overrightarrow{P_2}$、$\overrightarrow{P_3}$线性无关，故

$$G_2'(t_0)+aG_4'(t_0)+l(t_0)=0$$

$$G_3'(t_0)+bG_4'(t_0)-l(t_0)=0$$

两式联立消去$l(t_0)$则得

$$G_2'(t_0)+G_3'(t_0)+(a+b)G_4'(t_0)=0 \tag{7}$$

在(6)、(7)两式联立的方程组中，有四个未知数，因而方程组有解，即必存在λ，μ，τ，γ满足(5)。

充分性　设在$t=t_0$点存在λ，μ，τ，γ满足(5)，则

$$G_2(t_0)+aG_4(t_0)=1-G_3(t_0)-bG_4(t_0)$$

代入(3)得$\overrightarrow{P}(t_0)=\overrightarrow{P_2}+(G_3(t_0)+bG_4(t_0))(\overrightarrow{P_3}-\overrightarrow{P_2})$

显然$\overrightarrow{P}(t_0)$位于$\overline{P_2P_3}$或其延长线上．又在此点处，(4)中的$\overrightarrow{P_2}$与$\overrightarrow{P_3}$的系数之和为0，从而$\overrightarrow{P'}(t)|_{t=t_0}//(\overrightarrow{P_3}-\overrightarrow{P_2})$，故曲线(2)在$t=t_0$处与第二边或其延长线相切．证毕．

现在讨论几种特殊情况(仍设$\overrightarrow{P_1}=0$)

1．$\overrightarrow{P_2}$不平行于$\overrightarrow{P_3}$．但$a+b=1$。此时点$\overrightarrow{P_1}$，$\overrightarrow{P_2}$，$\overrightarrow{P_3}$不共线，但点$\overrightarrow{P_2}$，$\overrightarrow{P_3}$，$\overrightarrow{P_4}$共线。只要取$\tau=1$，便可使曲线与第二边或其延长线相切．适当调整λ，μ，τ，γ就可得到满意的曲线．

2．$\overrightarrow{P_2}//\overrightarrow{P_3}$，但$a+b\neq1$．此时点$\overrightarrow{P_1}$，$\overrightarrow{P_2}$，$\overrightarrow{P_3}$共线。但点$\overrightarrow{P_2}$，$\overrightarrow{P_3}$，$\overrightarrow{P_4}$不在一条直线上．只需取$\gamma=1$，便可使曲线与第二边相切，适当调整$\lambda$，$\mu$，$\tau$可以得到理想曲线．

3．$\overrightarrow{P_2}//\overrightarrow{P_3}$，$a+b=1$。此时四点$\overrightarrow{P_1}$，$\overrightarrow{P_2}$，$\overrightarrow{P_3}$，$\overrightarrow{P_4}$共线。曲线(2)也退化为直线．下面讨论切点真正落在第二边而不是其延长线上的条件。

要使切点落在$\overline{P_2P_3}$上，则必须$0<t_0<1$，且$G_2(t_0)+aG_4(t_0)\geqslant0$，$G_3(t_0)+bG_4(t_0)\geqslant0$

定理2　若$\overrightarrow{P_2}$不平行于$\overrightarrow{P_3}$，$a+b\neq1$，则曲线(2)在$t=t_0(0<t_0<1)$处与特征多边形第二边相切的充要条件为：存在λ，μ，τ，γ满足

$$\begin{aligned}
&G_2(t_0)+aG_4(t_0)\geqslant 0\\
&G_3(t_0)+bG_4(t_0)\geqslant 0\\
&G_2(t_0)+G_3(t_0)+(a+b)G_4(t_0)=1\\
&G_2'(t_0)+G_3'(t_0)+(a+b)G_4'(t_0)=0
\end{aligned}\tag{8}$$

注：若$\dot{\vec{P_1}}\neq 0$，且$(\vec{P_2}-\vec{P_1})$不平行于$(\vec{P_3}-\vec{P_1})$，只要令

$$\vec{P_4}-\vec{P_1}=a(\vec{P_2}-\vec{P_1})+b(\vec{P_3}-\vec{P_1})$$

则本节有关结论仍然成立。

3 三次参数曲线的凸性与保凸性

由三次$Bézier$曲线的保凸性质知，要考查三次参数曲线的凸性和保凸性，只需考查新的特征多边形$P_1'P_2'P_3'P_4'$的凸性和保凸性即可。当新的特征多边形为凸时，曲线则为凸。曲线的凸性是指原特征多边形为凸时，曲线也为凸；曲线的保凸性是指特征多边形为凸时，曲线也为凸，而且曲线与特征多边形的凸向相同。

给定特征多边形$P_1P_2P_3P_4$后，如图2，建立仿射坐标xoy，设四个特征点的坐标为$P_1(0,1)$，$P_2(\alpha,1)$，$P_3(1,\beta)$，$P_4(1,0)$，则新的特征点为$P_1'(\lambda\alpha,1)$，$P_2'(\tau\alpha,1)$，$P_3'(1,\gamma\beta)$，$P_4'(1,\mu\beta)$。

定理3 当$0<\alpha,\beta<1$或$\alpha,\beta<0$时，多边形$P_1P_2P_3P_4$为凸。

定理4 当$0<\alpha,\beta<1$；$\alpha,\beta<0$时，曲线保凸的充要条件为下列条件之一成立：

$$1^\circ\quad\left\{\begin{array}{l}\lambda<\tau<\dfrac{1}{\alpha}\\ \mu<\gamma<\dfrac{1}{\beta}\end{array}\right.\qquad 2^\circ\quad\left\{\begin{array}{l}\lambda>\tau>\dfrac{1}{\alpha}\\ \mu>\gamma>\dfrac{1}{\beta}\end{array}\right.\tag{9}$$

证 以x_i、y_i分别表示点P_i'的横坐标和纵坐标。曲线保凸即新特征多边形为凸，其凸向与旧特征多边形相同，故

$$\begin{array}{lcl}
x_2-x_1>0 & & x_2-x_1<0\\
x_3-x_2>0 & & x_3-x_2<0\\
 & \text{或} & \\
y_2-y_3>0 & & y_2-y_3<0\\
y_3-y_4>0 & & y_3-y_4<0
\end{array}$$

即
$$\left\{\begin{array}{l}\lambda<\tau<\dfrac{1}{\alpha}\\ \mu<\gamma<\dfrac{1}{\beta}\end{array}\right.\quad\text{或}\quad\left\{\begin{array}{l}\lambda>\tau>\dfrac{1}{\alpha}\\ \mu>\gamma>\dfrac{1}{\beta}\end{array}\right.$$

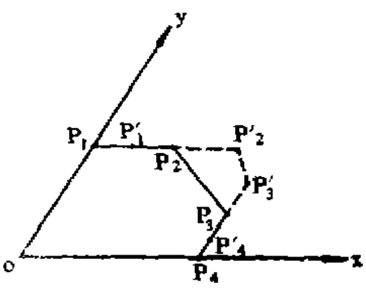

图2

定理5 当$0<\alpha,\beta<1$；$\alpha,\beta<0$时，曲线为凸的充要条件为下列条件之一成立：

$$1° \begin{cases} \lambda<\tau<\dfrac{1}{\alpha} \\ \mu<\gamma<\dfrac{1}{\beta} \end{cases};\quad 2° \begin{cases} \tau<\lambda<\dfrac{1}{\alpha} \\ \gamma<\mu<\dfrac{1}{\beta} \end{cases}$$

$$3° \begin{cases} \lambda>\tau>\dfrac{1}{\alpha} \\ \mu>\nu>\dfrac{1}{\beta} \end{cases};\quad 4° \begin{cases} \tau>\lambda>\dfrac{1}{\alpha} \\ \gamma>\mu>\dfrac{1}{\beta} \end{cases} \tag{10}$$

证　曲线为凸的充要条件为新特征多边形为凸，而凸向可与旧特征多边形不同，于是除凸条件成立外，还可能成立下列条件

$$\begin{aligned} &x_1-x_2>0 \\ &x_4-x_1>0 \\ &y_1-y_4>0 \\ &y_4-y_3>0 \end{aligned} \quad 或 \quad \begin{aligned} &x_1-x_2<0 \\ &x_4-x_1<0 \\ &y_1-y_4<0 \\ &y_4-y_3<0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} \tau<\lambda<\dfrac{1}{\alpha} \\ \gamma<\mu<\dfrac{1}{\beta} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \tau>\lambda>\dfrac{1}{\alpha} \\ \gamma>\mu>\dfrac{1}{\beta} \end{cases}$$

定理6　当$\alpha>0$，$\beta<0$；$\alpha<0$，$\beta>0$；α，$\beta>1$时，原特征多边形非凸，此时曲线为凸的充要条件仍为（10）中之一成立。显然此条件不必要。

3　应用

由上面的讨论可知：参量λ、μ是控制曲线端点位置的，τ、γ是控制曲线的弯曲程度和凸向的，因而对自由型曲线系统很有用处：给定了曲线的特征点后，可以通过参量来调节曲线的端点、弯曲程度和凸向，这就克服了*Bezier*曲线、*Ball*曲线、*Timmer*曲线等当特征多边形给定之后曲线的形状就完全确定了的缺点，更便于设计。由于曲线可与特征多边形各边相切，这样不但可使曲线更逼近特征多边形，而且可根据需要控制切点位置，这也是很有实用价值的。

衷心感谢杨万年教授、段虞荣教授的鼓励和支持。

参　考　文　献

〔1〕 张永曙等：计算机辅助几何设计的数学方法，西北工业大学出版社，1986

〔2〕 苏步青、刘鼎元：计算几何，上海科学技术出版社，1982

〔3〕 Faux I.D, Pratt M.J: Computational peometry for design and manufacture, New York, 1979