1990年11月 重庆大学学报 Vol.13,No.6
第13卷第6期 JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY Nov.1990

三阶常系数线性滞后型方程无条件稳定的代数判定

THE ALGEBRATIC CRITERION OF THE UNCONDITIONAL STABILITY OF THE THIRD-ORDER LINEAR RETARDED DIFFERENTIAL DIFFERENCE EQUATIONS

陈均平 周进
Chen Junping Zhou Jin
(重庆大学) (重庆工业管理学院)

摘 要 本文得到三阶常系数线性滞后型方程无条件稳定的充要条件，这些条件是简明实用的代数判据。

关键词 微分差分方程；无条件稳定性；代数判定
中国图书资料分类法分类号 O175-7

ABSTRACT The sufficient and necessary conditions of the unconditional stability of the third-order linear retarded differential-difference equations with constant coefficients are given. The conditions are brief and practical algebratic criterion.

KEY WORDS differential-difference equations, unconditional stability, algebratic criterion.

已给一有时滞的常系数线性系统

$$\frac{dx_s(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}(a_{sj}x_j(t)+b_{sj}x_j(t-\tau))$$

$$(S=1,2,\cdots,n)$$

如果对任何$\tau\geqslant0$系统之零解均为渐近稳定，则称此系统为无条件稳定．在文献[1]—[4]中具体的给出一阶、二阶线性时滞方程及二维时滞系统的代数判定，文[5]讨论了三阶时滞方程，但本文得到的代数充要条件更方便应用。本文讨论下列三阶滞后型的微分差分方程

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3}+a_1\frac{d^2x(t)}{dt^2}+a_2\frac{d^2x(t-\tau)}{dt^2}+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_2\frac{dx(t-\tau)}{dt}+$$

$$c_1x(t)+c_2x(t-\tau)=0 \tag{1}$$

其中a_i，b_i，$c_i(i=1,2)$为常数，$\tau\geqslant0$。我们证明了下列定理：

收文日期 1989-12-02

定理　方程(1)的零解无条件稳定的充要条件是：

(i)　$a_1+a_2>0$；$c_1+c_2>0$；$(a_1+a_2)(b_1+b_2)>c_1+c_2$

(ii)　当$C=c_1-c_2>0$时，下列条件之一满足：

$a)$　$\left(\frac{A}{3}\right)^2-\frac{B}{3}\leqslant 0$；

$b)$　$A>0$，$B>0$，$\left(\frac{A}{3}\right)^2-\frac{B}{3}>0$；

$c)$　$A>0, B\leqslant 0$，$\frac{2}{27}A^3-\frac{1}{3}AB+C>2\left[\left(\frac{A}{3}\right)^2-\frac{B}{3}\right]^{3/2}>0$；

$d)$　$A\leqslant 0$，$\frac{2}{27}A^3-\frac{1}{3}AB+C>2\left[\left(\frac{A}{3}\right)^2-\frac{B}{3}\right]^{3/2}>0$

其中　$A=a_1^2-2b_1-a_2^2$，$B=b_1^2-2a_1c_1-b_2^2+2a_2c_2$。

证　记(1)的特征方程为

$$D(\lambda,e^{-\lambda\tau})=\lambda^3+a_1\lambda^2+b_1\lambda+c_1+(a_2\lambda^2+b_2\lambda+c_2)e^{-\lambda\tau}=0。$$

显然(1)的零解渐近稳定的充要条件是$D(\lambda,e^{-\lambda\tau})=0$的根具有负实部。虽然判定这类超越方程的根具有负实部的充要条件早已为Л. С. Понтрягин定理所指出，但对于具体的方程该定理不便应用，类似于文献[1]（第六章定理1）可得以下充要条件：

(i)　$D(\lambda,e^{-\lambda\tau})\Big|_{\tau=0}=\lambda^3+(a_1+a_2)\lambda^2+(b_1+b_2)\lambda+c_1+c_2=0$的根具有负实部；

(ii)　令$\omega=-\tau y$，对每一个$\tau>0$，$y\neq 0$及ω均有$D(iy,e^{i\omega})\neq 0$。

由霍尔维茨定理知条件(i)满足的充要条件是$a_1+a_2>0, c_1+c_2>0$及$(a_1+a_2)(b_1+b_2)>c_1+c_2$，此即定理的条件(i)，为证明本定理，只需找出$D(iy,e^{i\omega})=0$的充要条件，就可得到$D(iy,e^{i\omega})\neq 0$的充要条件，因为

$$\begin{aligned}D(iy,e^{i\omega})&=[-a_1y^2+c_1+(-a_2y^2+c_2)\cos\omega-b_2y\sin\omega]\\&\quad+i[-y^3+b_1y+(-a_2y^2+c_2)\sin\omega+b_2y\cos\omega]\\&\triangleq U(y,\omega)+iV(y,\omega)=0\end{aligned}\qquad(2)$$

的充要条件是$U(y,\omega)=0$及$V(y,\omega)=0$有解，从而$D(iy,e^{i\omega})\neq 0$的充要条件是方程

$$H(y)=y^6+Ay^4+By^2+C=0\qquad(3)$$

无非零实根，其中$A=a_1^2-2b_1-a_2^2$，$B=b_1^2-2a_1c_1-b_2^2+2a_2c_2$，$C=c_1^2-c_2^2$（注意到定理的条件(i)已保证$D(iy,\tau)\Big|_{y=0}\neq 0$，故不讨论(3)是否有零根；同时(3)有解$y\neq 0$，则$U=0$及$V=0$一定有解$\omega$）. 在(3)中令$y^2=x-\frac{A}{3}$，$H(y)=0$化为

$$f(x)=x^3+\left(B-\frac{A^2}{3}\right)x+\left(\frac{2}{27}A^3-\frac{AB}{3}+C\right)=0\qquad(4)$$

从而$H(y)=0$无非零实根的充要条件转化为$f(x)=0$在$\left(\frac{A}{3}, +\infty\right)$内无正实根，因为$f'(x)=3\left[x^2-\left(\left(\frac{A}{3}\right)^2-\frac{B}{3}\right)\right]$，故当$\left(\frac{A}{3}\right)^2-\frac{B}{3}\leqslant 0$时，$f'(x)>0\ (x\neq 0)$；当

$\left(\frac{A}{3}\right)^2-\frac{B}{3}>0$ 时 $f'(x)=0$ 具有两个实根：

$$x_+=\sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^2-\frac{B}{3}}>0,\quad x_-=-\sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^2-\frac{B}{3}}<0$$

而 $f''(x_+)=6x_+>0$，$f''(x_-)=6x_-<0$，因此 $f(x)$ 分别在 x_+ 及 x_- 处取得极小值与极大值．在定理条件之下，$f(x)=0$ 在 $\left[\frac{A}{3},+\infty\right)$ 内无实根的必要条件 $f\left(\frac{A}{3}\right)=C>0$ 已满足，故只需讨论以下四种情况：

a) 当 $\left(\frac{A}{3}\right)^2-\frac{B}{3}\leqslant 0$ 时，因 $x>\frac{A}{3}$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)=0$ 在 $\left[\frac{A}{3},+\infty\right)$ 无正实根。

b) 当 $\left(\frac{A}{3}\right)^2-\frac{B}{3}>0$ 时，在 $A>0$，$B>0$ 之下因 $x_+<\frac{A}{3}$，而 $f(x)$ 的极小值在 x_+ 处取得，并且 $f(x)$ 在 $x>x_+$ 时，$f'(x)>0$，$f\left(\frac{A}{3}\right)=C>0$，故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{A}{3},+\infty\right)$ 无正实根．

c) 当 $\left(\frac{A}{3}\right)^2-\frac{B}{3}>0$ 时，在 $A>0$，$B\leqslant 0$ 之下，因 $x_+\geqslant\frac{A}{3}$，当极小值

$$f(x_+)=\frac{2}{27}A^3-\frac{AB}{3}+C-2\left[\left(\frac{A}{3}\right)^2-\frac{B}{3}\right]^{3/2}>0$$

时，$f(x)=0$ 在 $\left[\frac{A}{3},+\infty\right)$ 内无正实根．

d) 当 $\left(\frac{A}{3}\right)^2-\frac{B}{3}>0$ 时，在 $A<0$ 时因 $x_+>\frac{A}{3}$，在定理条件之下，$f\left(\frac{A}{3}\right)>0$ 且极小值 $f(x_+)>0$，因而 $f(x)=0$ 在 $\left[\frac{A}{3},+\infty\right)$ 内无正实根。

由以上讨论定理得证。至于三阶定常线性中立型方程无条件稳定的代数判定，只需将定理的条件稍加修改即得，故不再赘述。对于四阶定常线性滞后型、中立型方程无条件稳定的代数判定将另文讨论。

例 $$\frac{d^3x(t)}{dt^3}+3\frac{d^2x(t)}{dt^2}+5\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)-x(t-\tau)=0$$

此时 $a_1=3$，$b_1=5$，$c_1=2$，$c_2=-1$，$a_2=b_2=0$，$A=-1$，$B=13$，$C=3$．满足定理的条件(i)及(ii)之 *a*)，故其零解无条件稳定．

参 考 文 献

〔1〕 秦元勋，刘永清、王联．带有时滞的动力系统的运动稳定性．北京科学出版社，1963

〔2〕 刘永清，宋中昆．大型动力系统的理论与应用（卷1）．武昌：华中工学院出版社，1988

〔3〕 Bellman R, Cooke K L. Differential-Difference Equations, New York: Academic Press 1963

〔4〕 俞元洪．二阶滞后系统的时滞界限．应用数学学报，1985，8(3)：334—339

〔5〕 俞元洪．一类中立型方程解的渐近稳定性．应用数学学报，1985，8(4)：467—471