1991年1月 重庆大学学报 Vol. 14, №. 1
第14卷第1期 JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY Jan. 1991

递增斜率分段线性规划的对偶算法*

A DUAL ALGORITHM OF PIECEWISE LINEAR PROGRAMMING WITH SUCCESSIVELY INCREASING SLOPES

李文沅 李志平 徐国禹
Li Wenyuan Li Zhiping Xu Guoyu
（电气工程系）

摘 要 针对目标函数具有递增斜率的分段线性规划问题，提出了一种快速的对偶算法。算法基于单纯形的思想，引入指针的概念来建立问题最优性和可行性判据，不需设置分段变量，不会扩大问题的规模，从而减少了内存和计算量。

关键词 /分段；线性规划；递增斜率；对偶单纯形算法

中国图书资料分类法分类号 O221·1

ABSTRACT A fast dual algorithm is presented for the piecewise linear programming with successively increasing slopes. The concept of the pointer is used to derive the optimality and the feasibility conditions based on the dual simplex principle, which avoids enlarging the scale of the problem due to introducing piecewise variables so that storage and calculating requirements are reduced. Finally, the example is given to demonstrate the effectiveness of the presented algorithm.

KEY WORDS /piecewise; linear programming; succesively increasing slops; dual simplex method

0 引 言

工程实际中往往存在目标函数具有凸性的线性约束优化问题、这类问题可转化为有递增斜率的分段线性规划问题。由于递增斜的特殊性，这类问题用不着冗繁的分段线性规划的一般算法[2]来求解。通常的求解方法是对每一段引入一个新的分段变量，把问题转化为关于分段变量的线性规划问题。这样，使得变量数大大增加，从而增加了内存及计算量。我们曾提出过不增设分段变量而直接求解这种递增斜率分段线性规划问题的一种新算法[1]。本文再给出直接求解这类问题的另一种新算法——递增斜率分段线性规划的对偶算法。

1 问题的描述

分段线性规划问题描述如下：

$$\begin{cases} \min f = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) & (1) \\ \text{s.t.}\ AX = B & (2) \\ O \leqslant X \leqslant \overline{X} & (3) \end{cases}$$

* 收文日期 1989－05－04

其中，$f_j(x_j)$是关于x_j的分段线性函数，A是$m\times n$矩阵，b是m维矢量，X是n维矢量，$\bar{X}$是X的上限，O是n维0矢量。$f_j(x_j)$可描述如下：

将x_j的所在区间分为t_j段，这时t_j+1个分点为：

$x_j^{(1)}=0, x_j^{(2)}, \cdots, x_j^{(t_j)}, x_j^{(t_j+1)}$

当$x_j^{(k)}\leqslant x_j\leqslant x_j^{(k+1)}$　$(1\leqslant k\leqslant t_j)$时，称$x_j$位于第$k$段。在每一段内$f_j(x_j)$与$x_j$呈线性关系。若$x_j$的第$k$段的斜率记为$c_j^{(k)}$，那么$f_j(x_j)$可表示为：

$$f_j(x_j)\begin{cases} f_j(x_j^{(1)}), \text{ 当 } x_j = x_j^{(1)} \text{ 时} \\ f_j(x_j^{(k)}) + c_j^{(k)}(x_j - x_j^{(k)}), \text{ 当 } x_j^{(k)} \leqslant x_j \leqslant x_j^{(k+1)} \text{ 时} \\ \qquad (k = 1,2,\cdots,t_j) \end{cases}$$

若x_j的各段斜率满足$c_j^{(k)}<c_j^{(k+1)}$　$(1\leqslant k\leqslant t_j)$，称$f_j(x_j)$具有递增斜率的特性，相应的分段线性规划称为具有递增斜率的分段线性规划。

2　基本可行解及最优解判据

递增斜率分段线性规划对偶算法是从一个初始最优基本解出发进行迭代，每次迭代中保持最优性，并使可行性得到改善，最终达到最优可行解。

2·1　基本可行解的定义

将满足约束方程的解X分为$\{X_B, X_N\}$，X_B是m维矢量，与矩阵A中的非奇异子方阵B对应，称为基变量矢量，X_N称为非基变量矢量。另外对应于X定义一个n维整矢量$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$，对于基变量x_i，s_i指示x_i取值位于其分段的第s_i段内，对于非基变量x_j，s_j指示x_j取值位于其分段的第s_j个分点上，S称为X的指针。当s_i的指示段与x_i的实际取值所在的段相符时，称X为分段线性规划的一个基本可行解。在迭代过程中要对指针进行修改，若每个基变量x_i的指针s_i指示x_i应取值于第s_i段内，但x_i的实际取值并不在指针所指的段内，那么我们称X为基本不可行解。

2·2　最优性判据

先对每个变量x_j可用一组分段变量（本文方法并不需用分段变量，这里只是为了推导与说明而引用分段变量的概念）表示为：

$$x_j = \sum_{k=1}^{t_j} x_{jk} \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{4}$$

目标函数用分段变量可表示如下：

$$f = f_0 + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{t_j} c_j^{(k)} x_{jk}\right) \tag{5}$$

其中，$f_0=\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j^{(1)})$

用R_B表示基变量下标集合，R_N表示非基变量下标集合，对约束方程进行初等变换，把基底B化为单位矩阵得：

$$x_i + \sum_{j\in R_N} a_{ij}^* x_j = b_i^* \quad (i \in R_B) \tag{6}$$

式中上标"$*$"表示该量为现行迭代下的值。

把(4)式代入(6)式，基变量x_i的指针s_i对应的分段变量x_{is_i}可表示为：

$$x_{is_i}=b_i^*-\sum_{\substack{k=1\\k\neq s_i}}^{t_i}x_{ik}-\sum_{j\in R_N}\sum_{k=1}^{t_j}a_{ij}^*x_{jk}\quad(i\in R_B)\tag{7}$$

在现行的基本解下，目标函数的分段变量表达式(5)可表示为如下形式：

$$f=f_0+\sum_{i\in R_B}c_i^{(s_i)}b_i^*-\sum_{i\in R_B}\Big[\sum_{\substack{k=1\\k\neq s_i}}^{t_i}(c_i^{(s_i)}-c_i^{(k)})x_{ik}\Big]$$

$$-\sum_{j\in R_N}\Big[\sum_{k=1}^{t_j}\Big(\sum_{i\in R_B}c_i^{(s_i)}a_{ij}^*-c_j^{(k)}\Big)x_{jk}\Big]$$

$$=f_0+f_0-\sum_{i\in R_B}\Big[\sum_{k=1}^{t_i}w_{i,k}x_{ik}\Big]-\sum_{j\in R_N}\Big[\sum_{k=1}^{t_j}w_{j,k}x_{jk}\Big]\tag{8}$$

其中，$f_0=\sum\limits_{i\in R_B}c_i^{(s_i)}b_i^*$；对于 $i\in R_B$，$w_{i,k}=z_i-c_i^{(k)}$，$z_i=c_i^{(s_i)}$；对于 $j\in R_N$，$w_{j,k}=z_j-c_j^{(k)}$，$z_j=\sum\limits_{i\in R_B}c_i^{(s_i)}a_{ij}^*$。因为 $w_{i,s_i}=c_i^{(s_i)}-c_i^{(s_i)}=0$，所以(8)式中$\sum$符号下的 $k\neq s_i$ 可以略去不写。

对于具有递增斜率的分段线性规划有 $c_j^{(k)}<c_j^{(k+1)}$，所以有：

$$w_{j,k}=z_j-c_j^{(k)}>z_j-c_j^{(k+1)}=w_{j,k+1}$$

根据这个性质和变量与分段变量的取值关系，可推出在现行指针下基变量所对应的分段变量自然满足最优性条件，而只要非基变量满足下列条件：

对所有 $j\in R_N$，$w_{j,s_j-1}\geqslant0\quad(s_j\neq1)$，$w_{j,s_j}\leqslant0\quad(s_j\neq t_j+1)$。

这时全部分段变量便能满足最优性条件，上述条件便称为具有递增斜率的分段线性规划在现行指针下的最优解判据。其详细推导与证明，参见文献[1]第四部分。

3 问题的对偶迭代算法

3·1 对偶迭代

由于篇幅限制，这里只给出对偶迭代方法，而未给出该方法在迭代中能改善可行性的证明。若将分段线性规划化为关于分段变量的一般线性规划，再列出其对偶问题，根据对偶单纯形的原理[3]，结合这里所给出的变量出入基原则，可以证明该方法能改善对偶问题的目标函数值。

3·1·1 选择出基变量

令

$$d_1=\max_{i\in R_B}\{x_i^{(s_i)}-x_i^*\}$$

$$d_2=\max_{i\in R_B}\{x_i^*-x_i^{(s_i+1)}\}$$

再令

$$d=\max\{d_1,d_2\}$$

式中，x_i^* 表示基变量 x_i 在迭代过程中的实际取值。若 $d\leqslant0$，则表明所有的基变量 x_i 取值都在其指针段内，即问题已满足了可行性；否则，d 所对应的基变量 x_p 取为出基变量。

3·1·2 选择入基变量并求新的最优解

假定入基变量为 x_r，x_r 入基后指针为 l （$l=s_r-1$或 s_r，s_r 表示当前迭代中变量 x_r 的指针），下面考察在改善可行性时保持最优性的条件。

由(6)式中与 x_p 对应的行，x_r 入基后对应的分段变量 x_{rl} 可用其它分段变量表示为：

$$x_{rl}=\frac{b_p^*}{a_{pr}^*}-\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{t_r}x_{rk}-\sum_{k=1}^{t_p}\frac{x_{pk}}{a_{pr}^*}-\sum_{\substack{j\in R_N\\j\neq r}}\sum_{k=1}^{t_j}\frac{a_{pj}^*}{a_{pr}^*}x_{jk} \tag{9}$$

将式(9)代入(8)得：

$$f=f_0+f_0-\sum_{\substack{j\in R_N\\j\neq r}}\sum_{k=1}^{t_j}(w_{j,k}-w_{r,l}\frac{a_{pj}^*}{a_{pr}^*})x_{jk}-\sum_{\substack{i\in R_B\\i\neq p}}\sum_{k=1}^{t_i}w_{i,k}x_{ik}$$

$$-\sum_{k=1}^{t_p}(w_{p,k}-w_{r,l}\frac{1}{a_{pr}^*})x_{pk}-\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{t_r}w_{r,k}x_{rk}-w_{rl}\frac{b_p^*}{a_{pr}^*} \tag{10}$$

(10)式中分段变量前的系数便是换基后的判断系数。若设出基变量 x_p 出基后取值于 h 分点上($h=s_p$ 或 s_p+1)，则换基后满足最优解判据的条件为：

对于 $j\in R_N,j\neq r$，有：$w_{j,(s_j-1)}-w_{r,l}\frac{a_{pj}^*}{a_{pr}^*}\geqslant 0(s_j\neq 1)$，$w_{j,s_j}-w_{r,l}\frac{a_{pj}^*}{a_{pr}^*}\leqslant 0(s_j\neq t_j+1)$；对于 $j=p$ 有：$w_{p,h-1}-w_{r,l}\frac{1}{a_{pr}^*}\geqslant 0(h\neq 1)$，$w_{p,h}-\frac{w_{r,l}}{a_{pr}^*}\leqslant 0(h\neq t_p+1)$。

由上述最优性条件可推知，在保持最优性和改善可行性的条件下，求入基变量及新的迭代解可分为下面两种情况：

(a)　选择出基变量时，$d=d_1$，表示出基变量 x_p 的实际值越出其指针段的下限，为了改善可行性，x_p 出其后的取值应置于指针所指段的下限点，相应地 $h=s_p$，这时按下面的方法求新的迭代解：

令

$$\lambda_1=\min_{j\in R_N}\{\frac{w_{j,s_j-1}}{a_{pj}^*}|a_{pj}^*>0,s_j\neq 1\}$$

$$\lambda_2=\min_{j\in R_N}\{\frac{w_{j,s_j}}{a_{pj}^*}|a_{pj}^*<0,s_j\neq t_j+1\}$$

再令

$$\lambda=\min\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ w_{p,s_p-1}\}$$

若 $\lambda=w_{p,s_p-1}$，则不换基，x_p 的指针修改为 s_p-1；

若 $\lambda=\lambda_1$或 λ_2，此时需要换基，λ_1或 λ_2对应的非基变量 x_r 为入基变量，按下式修改变量的值：

$$x_i=x_i^*+a_{ir}^*\frac{d_1}{a_{pr}^*}\quad(i\in R_B)$$

$$x_r=x_r^*-\frac{d_1}{a_{pr}^*}$$

如 $\lambda=\lambda_1$，x_r 入基后指针为 s_r-1，如 $\lambda=\lambda_2$，x_r 入基后指针为 s_r。换基后 R_B 和 R_N 作相应改变。

(b)　选择出基变量时，$d=d_2$，表示出基变量 x_p 的实际值超过其指针 s_p 所指段的上限，x_p 出基后的取值应置于第 s_p+1 个分点上，寻求新的最优基本解的过程如下：

令

$$\lambda_1=\max_{j\in R_N}\{\frac{w_{j,s_j-1}}{a_{pj}^*}|a_{pj}^*<0,s_j\neq 1\}$$

$$\lambda_2=\max_{j\in R_N}\{\frac{w_{j,s_j}}{a_{pj}^*}|a_{pj}^*>0,s_j\neq t_j+1\}$$

再令
$$\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2, w_{p,s_p-1}\}$$

若 $\lambda = w_{p,s_p+1}$，则不换基，x_p 的指针修改为 s_p+1；

若 $\lambda=\lambda_1$ 或 λ_2，需换基，λ_1 或 λ_2 对应的非基变量，按下式修改变量的值：

$$x_i = x_i^* - a_{ir}^* \frac{d_2}{a_{pr}^*} \quad (i \in R_B)$$

$$x_r = x_r^* + \frac{d_2}{a_{pr}^*}$$

如 $\lambda=\lambda_1$，x_r 入基后指针为 s_r-1，如 $\lambda=\lambda_2$，x_2入基后指针为 s_r，换基后 R_B 和 R_N 作相应改变。

在 (a) 和 (b) 两种情况下，若 λ_1 或 λ_2 对应的 min 或 max 符号后的集合是空集，则 λ_1 或 λ_2 无定义。另外，在情况(a) 时如 $s_p = 1$，w_{p,s_p-1} 也无定义，在情况(b) 时如 $s_p + 1 = t_p + 1$，w_{p,s_p+1} 也无定义。如果 λ 无定义则问题无可行解。

由上述迭代过程可知，本方法只需对变量和指针进行修改，而无需引进分段变量。

3·2　对偶初始解的获得

将原分段线性规划问题中除自变量上、下限约束外的不等式约束划去后，得到的分段线性规划问题称为辅助规划问题，其对偶初始解按下述方法获得：

每个等式约束都加一人工变量，设每个人工变量都只有一段，其上下限都为零，费用系数即斜率也为零。对每个原变量 x_j 及指针 s_j 这样赋初始值：

若 $c_j^{(1)} \geqslant 0$，则取 $x_j = x_j^{(1)}$，$s_j=1$；若 $c_j^{(1)}<0$，$c_j^{(t_j)}>0$，则存在一个使 $c_j^{(k)}$ 从负到正的转折点，设为第 l 点，即 $c_j^{(l-1)}<0$，$c_j^{(l)}>0$，则取 $x_j=x_j^{(l)}$，$s_j=l$；若 $c_j^{(t_j)} \leqslant 0$，则取 $x_j=x_j^{(t_j+1)}$，$s_j=t_j+1$。

以人工变量为基变量，原变量为非基变量，人工变量的取值要在原变量取值的基础上使等式约束方程得以满足。以人工变量越下限或越上限进行换基（这样总可以将指定的人工变量换出基），只要基变量中还有人工变量，就优先选人工变量作为换出基变量。当所有的人工变量都换出基后，便得到辅助规划问题的对偶初始解，即最优基本解（最优而不可行解）。

然后将原问题中变量上、下限约束外的不等式约束引入松弛变量化为等式约束。以辅助问题对偶初始解中的基变量和松弛变量作为原问题的基变量，这样得到基本解满足最优性，即原问题的对偶初始解。

4　算　例

用本文的方法、文献[1]的方法和把问题转化为关于分段变量的线性规划的方法计算了下面的算例：

$$\min f = \sum_{i=1}^{3} f_i(x_i)$$

s. t.

$$2.0x_1 + 1.0x_2 + 1.5x_3 = 10$$
$$3.0x_1 + 1.0x_2 + 4.0x_3 \leqslant 15$$
$$0 \leqslant x_1 \leqslant 3.0$$
$$0 \leqslant x_2 \leqslant 4.0$$

$$0 \leqslant x_3 \leqslant 3.0$$

各变量的分点及其各段斜率如下：

$$\begin{array}{c} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{array}\begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 2.0 & 3.0 \\ 0.0 & 2.0 & 4.0 & \\ 0.0 & 1.0 & 3.0 & \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} c_1^{(k)} \\ c_2^{(k)} \\ c_3^{(k)} \end{array}\begin{bmatrix} 1.0 & 1.5 & 2.5 \\ 0.5 & 1.5 & \\ 1.0 & 2.0 & \end{bmatrix}$$

求解结果为：$(x_1, x_2, x_3) = (3.0, 2.8, 0.8)$，$f = 8.00$。

三种方法的计算结果相同。在IBM－PC/XT－286微机上，用本文方法及文献[1]的方法计算时间大致相同，为0.07秒，用化为关于分段变量的线性规划的方法的计算时间为0.092秒。大量算例表明，问题的规模越大或变量分段越多，新算法在减少计算量上的优越性越显著。对于不同算例，新算法减少计算时间从20％至40％不等。

5　结　论

本文提出的递增斜率分段线性规划的对偶算法是一个行之有效的快速算法，它与通常采用的把问题化为关于分段变量的线性规划的方法相比，不仅可减少内存而且计算量也要少得多。对于工程实际中常遇到的目标函数具有凸性而约束为线性关系的规划问题该方法有普遍意义。

6　致　谢

本文是教委基金课题的内容之一，谨对教委科技管理中心的资助表示感谢。

参　考　文　献

1　李志平，李文沅，徐国禹．具有递增斜率的分段线性规划的解法．重庆大学学报，1989，12(5)：35～42

2　赵凤治．分段线性规划的解法．数值计算与计算机应用，1981，(2)：65～67

3　D G 鲁恩伯杰著；夏尊铨等译．线性与非线性规划引论．北京：科学出版社，1980