集函数多目标分式规划*

MULTIOBJECTIVE FRACTIONAL PROGRAMMING WITH SET FUNCTIONS

杨新民** 段虞荣
Yang Xinmin Duan Yurong
（应用数学系）

摘 要 系统地讨论了集函数多目标分式规划的弱有效解、有效解和真有效解的基本定理。在一定条件下，论证了集函数多目标分式规划问题与其相应的标量化问题以及鞍点问题之间的密切关系。

关键词 集函数；标量化；鞍点；分式规划；多目标

中国图书资料分类法分类号 O221.2

ABSTRACT Systematically discusses the fundamental theorems of weak efficient solution, efficient solution and properly efficient solution for multiobjective fractional programming problems with set functions. Under suitable conditions, we give some theorems connecting multiobjective fractional programming with set functions and its scalarization problems as well as the corresponding saddle point problems.

KEY WORDS set function; scalarization; saddle-point; fractional programming; multiobjective

0 引 言

1979年 Morris[1]在他的博士论文中引入了可测空间集函数的可微性和凸性概念，并证明了集函数最优化问题的 Lagrange 对偶定理和最优解的一些充分和必要条件。由于集函数最优化问题在流体运动和电绝缘体设计以及最优血浆供给方面有广泛应用。这一点可见文[12—14]。因此 Morris 的博士论文[1]一发表就引起了国际运筹学界重视。不久，Lai 等人在[2]中证明了集函数的 Fenchel 对偶定理，Lai 和 Yang 在[3]中定义了凸集函数的次梯度概念并用它刻划集函数凸规划的最优解。Chou 等人在[4]中推广 Geoffrion[5]的工作，讨论了集函数的多目标最优化问题真有效解的最优性条件。最近，Hsia 和 Lee 又在[6]中推广 Taning 和 Sawaragi[7]的工作，获得了集函数多目标规划的 Lagrange 函数和对偶理论。Lai 和 Lin 在[8]中又证明了凸集函数的 Morean-Rockafellar 型定理。关于集函数最优化问题的讨论还可见文献[9]。由此可见，集函数最优化问题受到广泛重视。然而迄今为止，对集函数多目标分式规划问题尚无人问津。本文系统地讨论了集函数多目标分式规划的弱有效解、有效解和真有效解的基本定理，它是对文献[10]的推广。

我们考虑如下的集函数多目标分式规划：

* 收文日期 1989—09—28

** 现在重庆师范学院工作

$$(MP)\quad \min F(\Omega)=(F_1(\Omega)/H(\Omega),\ F_2(\Omega)/H(\Omega),\cdots,F_n(\Omega)/H(\Omega))$$
$$\text{s.t.}\quad G(\Omega)\leqslant 0,\quad \Omega\in\Gamma$$

其中 $G(\Omega)=(G_1(\Omega),\cdots,G_m(\Omega))^T$，$(X,\Gamma,u)$ 是一个可测空间。$F_i:\Gamma\to R(i=1,\cdots,n)$，$H:\Gamma\to R$，$G_i:\Gamma\to R(i=1,\cdots,m)$ 都是集函数。

1 概念和引理

我们假设 (X,Γ,u) 是一个有限无源可测空间，每个 $\Omega\in\Gamma$ 可视为它的特征函数 $\chi_\Omega\in L_\infty(X,\Gamma,u)\subset L_1(X,\Gamma,u)$ 且 Γ 视为 $L_\infty(X,\Gamma,u)=L^\infty$ 的一个子集 $\chi_\Gamma=\{\chi_\Omega|\Omega\in\Gamma\}$。对一个集函数 $F:\varphi\to R$，当 $\chi_\Omega=\chi_\Lambda$，u-a・e，我们认为 $F(\Omega)=F(\Lambda)$，因此 F 可被认为是 L^∞ 的子集 $\{\chi_\Omega:\Omega\in\varphi\}=\chi_\varphi$ 上的一个函数。由 Morris[1] 的结果知，对任何 $(\Omega,\Lambda,\lambda)\in\Gamma\times\Gamma\times[1,0]$，存在 Γ 中的序列 $\{\Omega_n\}$ 和 $\{\Lambda_n\}$，使得

$$\chi_{\Omega_n}\xrightarrow{w^*}\lambda\chi_{\Omega\setminus\Lambda}\ \text{和}\ \chi_{\Lambda_n}\xrightarrow{w^*}(1-\lambda)\chi_{\Lambda\setminus\Omega}\tag{1}$$

$$\chi_{\Omega_n}\cup\Lambda_n\cup(\Omega\cup\Lambda)\xrightarrow{w^*}\lambda\chi_\Omega+(1-\lambda)\chi_\Lambda\tag{2}$$

序列 $\{V_n=\Omega_n\cup\Lambda_n\cup(\Omega\cup\Lambda)\}$ 若满足上述(1)和(2)，我们便叫 $\{V_n\}$ 是关于 (Ω,Λ,λ) 的 Morris 序列。

1.1 定义1 Γ 的子集族 φ 叫做凸的，若对任何 $(\Omega,\Lambda,\lambda)\in\varphi\times\varphi\times[0,1]$ 和相应的 Γ 中的M

$$V_{nk}=\Omega_{nk}\cup\Lambda_{nk}\cup(\Omega\cup\Lambda)\in\varphi$$

1.2 定义2 一个集函数 $F:\varphi\to R$ 称为凸子集族 $\varphi\subset\Gamma$ 上凸的，若对任何 $(\Omega,\Lambda,\lambda)\in\varphi\times\varphi\times[0,1]$，存在一个 *Morris* 序列 $\{V_n\}\subset\varphi$，使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}F(V_n)\leqq\lambda F(\Omega)+(1-\lambda)F(\Lambda)$$

若 $-F:\varphi\to R$ 为凸集函数，则称 F 为凹集函数。

1.3 引理1[4] 设 φ 是 Γ 中的一个凸子集族，$F_1,\cdots,F_m$ 是 φ 上的凸集函数，若系统 $F_k(\Omega)<0$，$k=1,\cdots,m$，在 φ 上无解，则存在非负数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 满足 $\sum_{i=1}^m\lambda_i=1$ 使得 $\sum_{i=1}^m\lambda_iF_i(\Omega)\geqq 0$ 对任何 $\Omega\in\varphi$。

$$\text{令}\qquad \varphi'=\{\Omega\in\varphi|G(\Omega)\leqq 0\}$$

1.4 定义3 $\Omega^*\in\varphi'$ 称为 (MP) 的一个有效解，若不存在 $\Omega\in\varphi'$，使得 $F(\Omega)\leqq F(\Omega^*)$ 且

$F(\Omega) \neq F(\Omega^*)$ 。

1.5　**定义4**　$\Omega^* \in \varphi'$ 称为(MP)的一个弱有效解，若不存在 $\Omega \in \varphi'$，使得 $F(\Omega) < F(\Omega^*)$ 。

1.6　**定义5**　$\Omega^* \in \varphi'$ 称为(MP)的一个真有效解，若 Ω^* 是(MP)的一个有效解且存在 $M > 0$，使得每个 i 和每个 $\Omega \in \varphi'$，满足 $F_i(\Omega) < F_i(\Omega^*)$，都存在 j 有 $F_j(\Omega) > F_j(\Omega^*)$，使得

$$(F_i(\Omega)^* - F_i(\Omega))/(F_j(\Omega) - F_j(\Omega^*)) \leq M$$

本文中记 $\Lambda^+ = \{\lambda \in R^n | \lambda_i \geqq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$，$\Lambda^{++} = \{\lambda \in R^n | \lambda_i > 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$ 。

2　标量化问题

这一节，我们将讨论(MP)与相应的线性加权和问题的关系。即与(MP)的标量化问题的关系

(MP)的线性加权和定义为：

$$(\mathrm{NP})(\lambda)\min\ \lambda^T F(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (F_i(\Omega)/H_i(\Omega))$$
$$s.t.\qquad G(\Omega) \leqq 0$$

2.1　**定理1**　设 $F_i(\Omega)$，$H(\Omega) > 0$，$\forall\ \Omega \in \Gamma$ 且 $F_i(\Omega)$ 和 $G_i(\Omega)$ 都是 Γ 上的凸集函数，$H(\Omega)$ 是 Γ 上的凹集函数，则 $\Omega^* \in \varphi'$ 是(MP)的弱有效解的充要条件是存在 $\bar{\lambda} \in \Lambda^+$，使得 Ω^* 是下述规划问题(NP)$(\bar{\lambda})$ 的最优解 。

证：必要性　记 $\varphi' = \{\Omega \in \varphi | G(\Omega) \leqslant 0\}$，因 Ω^* 是(MP)的弱有效解，由定义知不存在 $\Omega \in \varphi'$ 使得

$$F(\Omega) < F(\Omega^*)$$

即　$$F_i(\Omega)/H(\Omega) < F_i(\Omega^*)/H(\Omega^*) \qquad i = 1,\cdots,n$$

在 φ' 上无解。

因为 $H(\Omega) > 0$，$H(\Omega^*) > 0$，则由上式有

$$F_i(\Omega)H(\Omega^*) - F_i(\Omega^*)H(\Omega) < 0 \qquad i = 1,\cdots,n \tag{1}$$

在 φ' 上无解。

又因 $F_i(\Omega) \geqslant 0$ 全为凸集函数，$H(\Omega) > 0$ 且为凹集函数，由引理2.1知存在 $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1,\cdots,\bar{\lambda}_n) \in \Lambda^+$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i [F_i(\Omega)H(\Omega^*) - F_i(\Omega^*)H(\Omega)] \geqq 0$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{\lambda}_i F_i(\Omega)H(\Omega^*) \geqq \sum_{i=1}^{n}\bar{\lambda}_i F_i(\Omega^*)H(\Omega) \quad \forall\ \Omega \in \varphi' \tag{2}$$

成立。

因为 $H(\Omega)\cdot H(\Omega^*) > 0$，用它除(2)可得

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{\lambda}_i[F_i(\Omega)/H(\Omega)] \geqq \sum_{i=1}^{n}\bar{\lambda}_i[F_i(\Omega^*)/H(\Omega^*)]$$

即 $\bar{\lambda}^T F(\Omega) \geqq \bar{\lambda}^T F(\Omega^*)$ $\forall\ \Omega \in \varphi'$ 成立，这表明 Ω^* 是 (NP) $(\bar{\lambda})$ 的最优解。

充分性　反设 Ω^* 不是(MP)的弱有效解，由定义，存在 $\bar{\Omega} \in \varphi'$ 使得 $F(\bar{\Omega}) < F(\Omega^*)$，因 $\bar{\lambda} \in \Lambda^+$，所以 $\bar{\lambda}^T F(\Omega) < \bar{\lambda}^T F(\Omega^*)$ 这与假设矛盾。

2.2　推论　在定理1的条件下，如果 Ω^* 是(MP)的有效解，则存在 $\bar{\lambda} \in \Lambda^+$，使得 Ω^* 是规划(NP)$(\bar{\lambda})$ 的最优解。

证：因为有效解一定是弱有效解，因此由定理1知结论为真。

下面对真有效解情形进行讨论。

2.3　定理3　设 $\bar{\lambda} \in \Lambda^{++}$，如果 Ω^* 是规划(NP)$(\bar{\lambda})$ 的最优解，则 Ω^* 是(MP) 的真有效解。

证　类似于[11]中定理6.1的证明。

2.4　定理4　在定理1假设下，如果 Ω^* 是(MP) 的真有效解，则存在 $\bar{\lambda} \in \Lambda^{++}$ 使得 Ω^* 是(NP)$(\bar{\lambda})$ 的最优解。

证　因为 Ω^* 是(MP) 的真有效解，于是存在 $M > 0$，使对每个 $i(i=1,\cdots,n)$，若 $\Omega \in \varphi'$，$\dfrac{F_i(\Omega)}{H(\Omega)} < \dfrac{F_i(\Omega^*)}{H(\Omega^*)}$ 时，总存在满足

$$\frac{F_j(\Omega)}{H(\Omega)} > \frac{F_j(\Omega^*)}{H(\Omega^*)} \text{ 的 } j(j \neq i)\text{，使}$$

$$\left(\frac{F_i(\Omega^*)}{H(\Omega^*)} - \frac{F_i(\Omega)}{H(\Omega)}\right)\bigg/\left(\frac{F_j(\Omega)}{H(\Omega)} - \frac{F_j(\Omega^*)}{H(\Omega^*)}\right) \leqq M$$

因为 $H(\Omega^*)\cdot H(\Omega) > 0$，则上式变为

$$\frac{F_i(\Omega^*)H(\Omega) - F_i(\Omega)H(\Omega^*)}{F_j(\Omega)H(\Omega^*) - F_j(\Omega^*)H(\Omega)} \leqq M \quad \text{再由} \frac{F_j(\Omega)}{H(\Omega)} > \frac{F_j(\Omega^*)}{H(\Omega^*)} \quad \text{知}$$

$$F_j(\Omega)H(\Omega^*) - F_j(\Omega^*)H(\Omega) > 0$$

这时上式变为

$$M[F_j(\Omega)H(\Omega^*) - F_j(\Omega^*)H(\Omega)] - F_i(\Omega^*)H(\Omega) + F_i(\Omega)H(\Omega^*) < 0, \quad j \neq i$$

即

$$F_i(\Omega^*)H(\Omega) - F_i(\Omega)H(\Omega^*) < 0$$

$$M[F_i(\Omega)H(\Omega^*) - F_j(\Omega^*)H(\Omega)] - F_i(\Omega^*)H(\Omega) + F_i(\Omega)H(\Omega^*) < 0, \quad j \neq i$$

在 φ' 上不相容。

由引理1知，存在 $\lambda^{(i)} \in \Lambda^+$，使得

$$\lambda_i^{(i)}[F_i(\Omega)H(\Omega^*) - F_i(\Omega^*)H(\Omega)] + \sum_{j\neq i}\lambda_j^{(i)}[M(F_i(\Omega)H(\Omega^*) - F_j(\Omega^*)H(\Omega) - F_i(\Omega^*)H(\Omega) + F_i(\Omega)H(\Omega^*))] \geqq 0 \quad \forall\ \Omega \in \varphi'$$

成立，即

$$F_i(\Omega)H(\Omega^*) + M\sum_{j\neq i}\lambda_j^{(i)}F_i(\Omega)H(\Omega^*) \geqq F_i(\Omega^*)H(\Omega) + M\sum_{j\neq i}\lambda_j^{(i)}F_j(\Omega^*)H(\Omega)$$

在上式中对所有 $i = 1,\cdots,n$ 求和，得

$$\sum_{j=1}^{n}(1 + M\sum_{j\neq i}\lambda_j^{(i)})F_j(\Omega)H(\Omega^*) \geqq \sum_{j=1}^{n}(1 + M\sum_{j\neq i}\lambda_j^{(i)})F_j(\Omega^*)H(\Omega)$$

令 $\bar{\lambda}_j = 1 + M\sum_{j\neq i}\lambda_j^{(i)}$，$j = 1,\cdots,n$。显然 $\bar{\lambda}_i > 0$，所以不妨设 $\bar{\lambda} \in \Lambda^{++}$，于是上式变为

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{\lambda}_jF_j(\Omega)H(\Omega^*) \geqq \sum_{j=1}^{n}\bar{\lambda}_jF_j(\Omega^*)H(\Omega)$$

用 $H(\Omega)\cdot H(\Omega^*)$ 同除上式，得

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{\lambda}_j\left(\frac{F_j(\Omega)}{H(\Omega)}\right) \geqq \sum_{j=1}^{n}\bar{\lambda}_j\left(\frac{F_j(\Omega^*)}{H(\Omega^*)}\right) \quad \forall\ \Omega \in \varphi'$$

成立，即 $\bar{\lambda}^TF(\Omega) \geqq \bar{\lambda}^TF(\Omega^*)$ 成立。这表明 Ω^* 是(NP)$(\bar{\lambda})$ 的最优解。

3 鞍点定理

考虑下述 Lagrange 函数

$$L(\Omega,u,\lambda) = \lambda^TF(\Omega) + \frac{u^TG(\Omega)}{H(\Omega)}$$

这里

$$F(\Omega) = (F_1(\Omega)/H(\Omega),\cdots,F_n(\Omega)/H(\Omega)),G(\Omega) = [G_1(\Omega),\cdots,G_m(\Omega)]$$

对于 $(\Omega,u,\bar{\lambda})$ 有如下鞍点问题

求 (Ω^*, u^*) 满足

(SP)

$$L(\Omega^*, u, \bar{\lambda}) \leqq L(\Omega^*, u^*, \bar{\lambda}) \leqq L(\Omega, u^*, \bar{\lambda})$$

$\forall\, \Omega \in \Gamma$ 和 $\forall\, u \geqq 0$ 成立

称 (Ω^*, u^*) 为 $L(\Omega, u, \bar{\lambda})$ 的鞍点。

在讨论(MP)与(SP)之间关系之前，我们先考虑如下简单形式的集函数单目标分式规划问题

$$\min \frac{V(\Omega)}{H(\Omega)}$$

(FP)

$$s.t. \quad G(\Omega) \leqq 0$$

以及相应的 Lagrange 函数 $L(\Omega, u) = \dfrac{V(\Omega)}{H(\Omega)} + \dfrac{u^T G(\Omega)}{H(\Omega)}$ 的鞍点间的关系。

3.1 命题1 设 $V(\Omega) \leqq 0, H(\Omega) > 0, \forall\, \Omega \in \Gamma$，且 $V(\Omega)$ 和 $G_i(\Omega)$ 都是 Γ 上的凸集函数，$H(\Omega)$ 是 Γ 上的凹集函数。并满足 Slater 的约束备格，存在 $\Omega_1 \in \varphi$，使得 $G_i(\Omega_1) < 0, i = 1, \cdots, m$。如果 Ω^* 是(FP)的最优解，则存在 $u \geqslant 0$，使 (Ω^*, u) 是 $L(\Omega, u)$ 的鞍点。

证 因 Ω^* 是(FP)的最优解，则

$$\forall\, \Omega \in \varphi' = \{\Omega \in \varphi \mid G(\Omega) \leqq 0\}, \quad \frac{V(\Omega)}{H(\Omega)} < \frac{V(\Omega^*)}{H(\Omega^*)} \quad \text{均不成立,}$$

又因为 $H(\Omega) > 0, H(\Omega^*) > 0$，于是由上式有 $V(\Omega)H(\Omega^*) - V(\Omega^*)H(\Omega) < 0 \quad \forall\, \Omega \in \varphi'$ 不成立。即

$$V(\Omega)H(\Omega^*) - V(\Omega^*)H(\Omega) < 0, \quad G_i(\Omega) \leqq 0, i = 1, \cdots, m$$

在凸集族 φ 上不相容。由文[4]中定理 3.1 知，存在 m 个不全为 0 的非负数 $\bar{\lambda} \geqq 0 \quad i = 1, \cdots, m$，使

$$V(\Omega)H(\Omega^*) - V(\Omega^*)H(\Omega) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i G_i(\Omega) \geqq 0, \quad \forall\, \Omega \in \varphi$$

用 $H(\Omega^*)H(\Omega) > 0$ 除上式两边，得

$$\frac{V(\Omega)}{H(\Omega)} - \frac{V(\Omega^*)}{H(\Omega^*)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\bar{\lambda}_i}{H(\Omega^*)} \frac{G_i(\Omega)}{H(\Omega)} \geqq 0$$

取 $\bar{u}_i = \bar{\lambda}_i / H(\Omega^*) \geqq 0, \quad i = 1, \cdots, m$，上式变为

$$\frac{V(\Omega^*)}{H(\Omega^*)} \leqq \frac{V(\Omega)}{H(\Omega)} + \bar{u}^T \cdot \frac{G(\Omega)}{H(\Omega)}$$

即

$$\frac{V(\Omega^*)}{H(\Omega^*)} \leqq L(\Omega,\bar{u}) \qquad \forall\ \Omega \in \varphi \tag{1}$$

特别取 $\Omega = \Omega^*$ 时，有 $\frac{\bar{u}^T G(\Omega^*)}{H(\Omega^*)} \geqq 0$ 因为 $H(\Omega^*) > 0$，由上式有 $\bar{u}^T G(\Omega) \geqq 0$，但由 $\bar{u} \geqq 0$ 及 $G(\Omega^*) \leqq 0$，又有 $\bar{u}^T G(\Omega^*) \leqq 0$，因而 $\bar{u}^T G(\Omega^*) = 0$，那么

$$L(\Omega^*,\bar{u}) = \frac{V(\Omega^*)}{H(\Omega^*)} + \frac{\bar{u}^T G(\Omega^*)}{H(\Omega^*)} = \frac{V(\Omega^*)}{H(\Omega^*)}$$

由不等式(1)便得　　$L(\Omega^*,\bar{u}) \leqq L(\Omega,\bar{u}), \forall\ \Omega \in \varphi'$　　(2)

另一方面，由 $G(\Omega^*) \leqq 0$ 可知，$\forall\ u \geqq 0$，有 $u^T G(\Omega^*) \leqslant 0$ 又因 $H(\Omega^*) > 0$，因而也有 $\frac{\bar{u}^T G(\Omega^*)}{H(\Omega^*)} \leqq 0$，于是有 $\frac{V(\Omega^*)}{H(\Omega^*)} + \frac{\bar{u}^T G(\Omega^*)}{H(\Omega^*)} \leqq \frac{V(\Omega^*)}{H(\Omega^*)} = L(\Omega^*,\bar{u})$

即　　$L(\Omega^*,\bar{u}) \leqq L(\Omega^*,\bar{u}), \forall\ u \geqq 0$　　(3)

综合不等式(2)和(3)可得：

$$L(\Omega^*,u) \leqq L(\Omega^*,\bar{u}) \leqq L(\Omega,\bar{u}), \forall\ \Omega \in \varphi', \forall\ u \geqq 0$$

即 $(\Omega^*,\bar{u})$ 是 $L(\Omega,u)$ 的鞍点。

注：此命题是文[4]中定理3.2的推广。

利用上述命题，我们讨论(MP)与其相应鞍点问题(SP)的关系。

3.2　定理5　设 $F_i(\Omega) \geqq 0, H(\Omega) > 0, \forall\ \Omega \in \varphi$，且 $F_i(\Omega)$ 和 $G_j(\Omega)$ 都是 φ 上凸集函数，$H(\Omega)$ 是 φ 上的凹集函数。且满足 Slater 约束备格，$\bar{\lambda} \in \Lambda^+$，如果 Ω^* 是(NP)$(\bar{\lambda})$ 的最优解，则存在 $\bar{u} \geqq 0$，使得 $(\Omega^*,\bar{u})$ 是 $L(\Omega,u,\bar{\lambda})$ 的鞍点。

证　令 $\sum^{n=1}\bar{\lambda}_i F_i(\Omega) = V(X)$，应用命题1可知结论成立。

3.3　定理6　设 $F_i(\Omega) \geqq 0, H(\Omega) > 0$，且 $F_i(\Omega)$ 和 $G_i(\Omega)$ 都是 φ 上凸集函数，$H(\Omega)$ 是凹集函数，且满足 Slater 约束备格。如果 Ω^* 是(MP)的弱有效解(或有效解)，则存在 $\bar{\lambda} \in \Lambda^+$ (或 Λ^{++})，$\bar{u} \geqq 0$，使 $(\Omega^*,\bar{u})$ 是 $L(\Omega,u,\bar{\lambda})$ 的鞍点。

证　由定理1(或定理4)知，存在 $\bar{\lambda} \in \Lambda^+$ (或 $\bar{\lambda} \in \Lambda^{++}$)。使 Ω^* 是规划(NP)$(\bar{\lambda})$ 的最优解，再由定理5知，存在 $\bar{u} \geqq 0$，使 $(\Omega^*,\bar{u})$ 是 $L(\Omega,u,\bar{\lambda})$ 的鞍点。

3.4　定理7　设 $F_i(\Omega) \geqq 0, H(\Omega) > 0$，且 $F_i(\Omega)$ 和 $G_i(\Omega)$ 都是凸集函数，$H(\Omega)$ 是凹集函数，且满足 Slater 约束备格。如果 Ω^* 是(MP)的有效解，那么存在 $\bar{\lambda} \in \Lambda^+, \bar{u} \geqq 0$，使 $(\Omega^*,\bar{u})$ 是 $L(\Omega,u,\bar{\lambda})$ 的鞍点。

证　由定理1的推论知，存在 $\bar{\lambda} \in \Lambda^+$，使 Ω^* 是规划(NP)$(\bar{\lambda})$ 的最优解，再由定理5知，存在 $\bar{u} \geqq 0$，使 $(\Omega^*,\bar{u})$ 是 $L(\Omega,u,\bar{\lambda})$ 的鞍点。

参 考 文 献

1 Morris R J. Optimal constrained selection of measurable subsets. J. Math. Anal. Appl. ,1979,70(2):546～562

2 Lai H C. Yang S S,Huang G R. Duality in mathematical programming of set functions "On Fenchel duality theorem". J. Math. Anal. Appl. ,1983,93(1):223～234

3 Lai H C, Yang S S. Saddle point and duality in the optimization theory of convex set functions, . J. Austral. Math. Soc. (Ser B),1982,24(1):130～137

4 Chou J H. Hsia W S,LeeT Y. On multiple objective programming problems with set functions. J. Math. Anal. Appl. , 1985,(2):383～394

5 Geoffrion A M. Proper efficiency and theory of vector maximization. J. Math. Anal. Appl. ,1968,22(2):618～630

6 Hsia W S, Lee T Y . Lagrangian function and duality theory in multiobjective programming with set functions. J. O. T. A. ,1988,57(1):239～251

7 Taning T ,Sawaragi Y. Duality theory in multiobjective programming. J. O. T. A. ,1979,27(2):509～529

8 Lai H C,Lin L J,The Fenchel-Morean theorem for set functions. Proc. Amer. Math. Soc. ,1985,103(1):85～90

9 Hsis W S,Lee T Y. Proper D-solutions of multiobjective programming problems with set functions. J. O. T. A. ,1987, 53(1):247～258

10 林锉云. 多目标分式规划的基本定理,应用数学学报,1983,6(2):247～250

11 顾基发,魏权龄,最优化方法及其应用,运筹报导(4),中科院数学所,1987

12 Begis D, Glowinski R . Application de la Metheode des élements finis álapproximation dún problème approachés. Appl,Optim,1975,2(1):130～169

13 Cea J, Gioan A ,Michel M. Quelques résultats sur L'identification de domaines. Colcol,1973,10(1):133～145

14 Wang D K C .On a class of optimization problems involving domain variations,Lecture Notes in Control and information Sciences(NO. 2). Berlin:Springer-Verlag,1977. 49