

非比例可变阻尼结构频响函数的二次摄动分析

THE SECOND ORDER PERTURBATION ANALYSIS OF FREQUENCY
RESPONSE FUNCTION OF STRUCTURE WITH NON-PROPORTIONAL
CHANGEABLE DAMPING

张 湘 伟

徐 美 和

Zhang Xiangwei

Xu Meihe

(工程力学系)

摘 要 通过用复模态分析得到的频率响应函数矩阵,分析了可变阻尼参数对频响函数的灵敏度,从而得出响应功率谱及其响应加速度对阻尼参数的变化率,并将此理论应用到汽车减振阻尼参数优化控制中。

关键词 非比例阻尼;频响函数;二次摄动;减振

中国图书资料分类法分类号:O 322

ABSTRACT A simplified procedure is presented for the determination of rates of change of frequency response function matrix of system for the non-proportional changeable damping, by means of the second order perturbation technique in conjunction with complex modal analysis. Consequently, when excitation information in frequency domain is known, the sensitivity of the response power spectra and the response time history can be obtained.

KEY WORDS non-proportional damping; frequency-response function; second order perturbation; shock absorption

0 前 言

在汽车工程和高层建筑抗震设计中,经常采用各种阻尼器和粘贴高阻尼材料,传统的比例阻尼的假设不再成立,实模态分析不再奏效,必须进行复模态分析。阻尼参数的修正是进行减振设计的一种重要手段,因此,如何评价和表示这些阻尼参数对系统频响函数及其响应的影响,是结构动力学的重要课题。文献[2]曾通过状态方程用复模态向量解耦的方法导出了响应谱的二次摄动关系式。但数学推导较为复杂,计算机实施很不方便。本文借助于复模态及复特征值所表示的频响函数矩阵导出了系统频响函数的二次摄动式,数学推导较为简便,而且可用响应谱对阻尼参数的灵敏度进行分析,借助于 Fourier 变换的逆变换,继而进行时间历程响应的灵敏度分析,这在可靠性设计中有着重要的意义。

* 收文日期1989-11-21

* 本文系自然科学基金资助项目。

1 多点激振的运动方程和频响函数

结构受多点激振时动力学方程为:

$$[M]\{\ddot{V}(t)\} + [C]\{\dot{V}(t)\} + [K]\{V(t)\} = -([M][R] + [Mg])\{\ddot{V}_g(t)\} \quad (1)$$

其中矩阵[R]与拟静位移有关,由式(2)给出:

$$[R] = -[K]^{-1}[Kg]K_g \quad (2)$$

以上,[M],[C]及[K]分别是与n个非约束自由度相关的质量、阻尼和刚度阵;[M_g],[K_g]是与m个被约束的自相关的n×m阶阵;{V(t)}是结构的实位移向量;{\ddot{V}_g(t)}是激励加速度向,代表对时间的导数。引入状态向{y} = $\begin{Bmatrix} V(t) \\ \dot{V}(t) \end{Bmatrix}_{2n \times 1}$,式(1)可写成下列状态方程式。

$$[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{上式中 } [A] = \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\{f\}_{n \times 1} = -([M][R] + [Mg])\{\ddot{V}_g(t)\} \quad (5)$$

式(3)的复特征方程为

$$[B]\{\Phi\} = \lambda[A]\{\Phi\} \quad (6)$$

由式(6)可得2n个复特征值和复模态向

$$\lambda^i = u^i + j v^i \text{ 和 } [\Phi^i] \quad i = (1, 2, \dots, 2n) \quad (7)$$

上式的复特征值和复模态共轭成对地出现。

$$\text{其中 } \{\Phi^i\} = \begin{Bmatrix} \Phi^i \\ \lambda^i \Phi^i \end{Bmatrix} \quad (8)$$

由复模态向量对[A]的加权正交条件

$$[\Phi]^T [A] [\Phi] = \text{diag}(a_i) \quad (9)$$

则系统的频率响应函数矩阵为:

$$[H(j\omega)] = \sum_{i=1}^n [H^i(j\omega)] \quad (10)$$

$$\text{其中 } [H^i(j\omega)] = \frac{\{\Phi^i\}\{\Phi^i\}^T}{a_i(j\omega - \lambda^i)} + \frac{\{\Phi^{i*}\}\{\Phi^{i*}\}^T}{a_i^*(j\omega - \lambda^{i*})} \quad (11)$$

这里 $[H^i(j\omega)]$ 表示第 i 阶模态位移频响函数。

$$a_i = \{\Phi^i\}^T [A] \{\Phi^i\} \quad (12)$$

2 可变阻尼系统频响函数矩阵的二次摄动分析

假设阻尼阵的每个成分的改变量可写成下列小参数 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, L)$ 的线性关系式:

$$C_i = C_i^0(1 + \alpha_i) \quad (i = 1, \dots, L) \quad (13)$$

这里 C_i^0 为初始值, C_i 为修正后的阻尼值, α_i 为第 i 个小参数,则阻尼阵可写成下列摄动关系式:

$$[C] = [C^0] + \sum_{i=1}^L [C^i] \alpha_i \quad (14)$$

$[C^0]$ 表示 $[C]$ 的初始值, $[C^i]$ 表示 $[C]$ 相对于第 i 个参数 α_i 的一次变化率。则状态矩阵 $[A]$ 可写成

$$[A] = [A^0] + \sum_k [A_k^i] \alpha_k \quad (15)$$

$$\text{这里, } [A^0] = \begin{bmatrix} C^0 & M \\ M & O \end{bmatrix} \quad [A_k^i] = \begin{bmatrix} C_k^i & O \\ O & O \end{bmatrix} \quad (16)$$

根据复模态理论的二次摄动分析^[2],可得:

$$\lambda^i = \lambda^{\alpha} + \sum_k \lambda_k^{\alpha} \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \lambda_{kl}^{\alpha} \alpha_k \alpha_l + \dots \quad (17)$$

$$\{\Phi^i\} = \{\Phi^{\alpha}\} + \sum_k \{\Phi_k^{\alpha}\} \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \{\Phi_{kl}^{\alpha}\} \alpha_k \alpha_l + \dots \quad (18)$$

将(18),(17)代入(11),则系统的频响函数矩阵可展开为

$$[H(j\omega)] = [H^0(j\omega)] + \sum_k [H_k^i(j\omega)] \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l [H_{kl}^i(j\omega)] \alpha_k \alpha_l + \dots \quad (19)$$

其中各模态位移频响应函数矩阵可展开为:

$$[H(j\omega)] = [H^0(j\omega)] + \sum_k [H_k^I(j\omega)]\alpha_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l [H_k^I(j\omega)]\alpha_k \alpha_l + \dots \quad (20)$$

这里假定 α_i 是不变的, 其中

$$\text{零次项: } [H_{ij}^0(j\omega)] = \frac{\{\varphi^{0j}\} \{\varphi^{0i}\}^T}{a_i(j\omega - \lambda^{0i})} + \frac{\{\varphi^{0i*}\} \{\varphi^{0j*}\}^T}{a_i^*(j\omega - \lambda^{0i*})} \quad (21)$$

一次变化率:

$$\begin{aligned} [H_{ij}^I(j\omega)] &= \frac{1}{a_i} \left[\frac{\{\varphi^{0j}\} \{\varphi_k^I\}^T}{j\omega - \lambda^{0i}} + \frac{\lambda_k^I \{\varphi^{0j}\} \{\varphi^{0i}\}^T}{(j\omega - \lambda^{0i*})^2} + \frac{\{\varphi_k^I\} \{\varphi^{0i}\}^T}{j\omega - \lambda^{0i}} \right] \\ &+ \frac{1}{a_i^*} \left[\frac{\{\varphi^{0j*}\} \{\varphi_k^{I*}\}^T}{j\omega - \lambda^{0i*}} + \frac{\lambda_k^{I*} \{\varphi^{0j*}\} \{\varphi^{0i*}\}^T}{(j\omega - \lambda^{0i*})^2} + \frac{\{\varphi_k^{I*}\} \{\varphi^{0i*}\}^T}{j\omega - \lambda^{0i*}} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

二次变化率:

$$\begin{aligned} [H_{ij}^{II}(j\omega)] &= \frac{1}{a_i} \left[\frac{\{\varphi^{0j}\} \{\varphi_k^{II}\}^T}{j\omega - \lambda^{0i}} + \frac{\lambda_k^{II} \{\varphi^{0j}\} \{\varphi^{0i}\}^T}{(j\omega - \lambda^{0i*})^2} + \frac{\{\varphi_k^{II}\} \{\varphi^{0i}\}^T}{j\omega - \lambda^{0i}} \right] \\ &+ \left[\frac{\lambda_k^{II} \lambda_l^{II}}{(j\omega - \lambda^{0i})^3} + \frac{\lambda_k^{II}}{(j\omega - \lambda^{0i*})^2} \frac{\{\varphi^{0j}\} \{\varphi^{0i}\}^T}{\{\varphi_k^{II}\} \{\varphi^{0i}\}^T} + \frac{\lambda_l^{II}}{(j\omega - \lambda^{0i*})^2} \frac{\{\varphi_k^{II}\} \{\varphi^{0i}\}^T}{\{\varphi_l^{II}\} \{\varphi^{0i}\}^T} + \frac{1}{j\omega - \lambda^{0i}} \frac{\{\varphi_k^{II}\} \{\varphi_l^{II}\}^T}{\{\varphi_k^{II}\} \{\varphi_l^{II}\}^T} \right] \\ &+ \frac{1}{a_i^*} \left[\frac{\{\varphi^{0j*}\} \{\varphi_k^{II*}\}^T}{j\omega - \lambda^{0i*}} + \frac{\lambda_k^{II*} \{\varphi^{0j*}\} \{\varphi^{0i*}\}^T}{(j\omega - \lambda^{0i*})^2} + \frac{\{\varphi_k^{II*}\} \{\varphi^{0i*}\}^T}{j\omega - \lambda^{0i*}} \right] + \left[\frac{\lambda_k^{II*} \lambda_l^{II*}}{(j\omega - \lambda^{0i*})^3} + \right. \\ &\left. \left[\frac{\lambda_k^{II*}}{(j\omega - \lambda^{0i*})^2} \frac{\{\varphi^{0j*}\} \{\varphi^{0i*}\}^T}{\{\varphi_k^{II*}\} \{\varphi^{0i*}\}^T} + \frac{\lambda_l^{II*}}{(j\omega - \lambda^{0i*})^2} \frac{\{\varphi_k^{II*}\} \{\varphi^{0i*}\}^T}{\{\varphi_l^{II*}\} \{\varphi^{0i*}\}^T} + \frac{1}{j\omega - \lambda^{0i*}} \frac{\{\varphi_k^{II*}\} \{\varphi_l^{II*}\}^T}{\{\varphi_k^{II*}\} \{\varphi_l^{II*}\}^T} \right] \right] \quad (23) \end{aligned}$$

这样便得到了系统的频率响应函数关于阻尼参数的一次变化率、二次变化率, 这个结果是非常有意义的, 因为它描述了系统传递特性对阻尼变化的敏感程度, 借助 Fourier 变换及其逆变换, 我们还可以根据输入情况, 得到响应功率谱, 相关函数, 相干函数以及时间历程响应对阻尼参数的灵敏度。另一方面, 由于在频域内, 位移、速度、加速度之间转换都很方便, 它们仅差一个乘积因子 $(j\omega)$, 在计算中可以一举多得。尤其是到了响应的时间历程的灵敏度, 这在可靠性设计中十分有用。

3 响应功率谱的二次摄动分析

上面提到, 频响应函数对于阻尼参数的变化率的解决, 有多种用途, 下面仅描述响应功率谱关于阻尼参数的变化方式, 其余的摄动式可以类推。

假设激励力的加速度功率谱矩阵为 $[S_{\ddot{v}_g} \ddot{v}_g(\omega)]_{m \times m}$ 由(5)得激励力的功率谱矩阵为

$$[S_{rr}(\omega)]_{n \times n} = ([M][R] + [Mg])[S_{\ddot{v}_g} \ddot{v}_g(\omega)]([R]^T[M] + [Mg]^T) \quad (25)$$

由随机振动理论,响应功率谱可表示为

$$[S_{vv}(\omega)]_{n \times n} = [H(j\omega)][S_{ff}(\omega)][H^*(j\omega)]^T \quad (26)$$

这里, $[S_{\ddot{v}_s \ddot{v}_s}(\omega)]$ 、 $[S_{ff}(\omega)]$ 、 $[S_{vv}(\omega)]$ 分别表示激励加速度、输入力、响应相对位移的功率谱矩阵。

将(19)代入(26)得响应功率谱的展开式:

$$[S_{vv}(\omega)] = [S_{vv}^0(\omega)] + \sum_k [S_{vv}^1(\omega)]\alpha_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l [S_{vv}^{kl}(\omega)]\alpha_k \alpha_l + \dots \quad (27)$$

其中:0次项:

$$[S_{vv}^0(\omega)] = [H^0(j\omega)][S_{ff}(\omega)][H^{0*}(j\omega)]^T \quad (28)$$

一次变化率:

$$[S_{vv}^1(\omega)] = [H^0(j\omega)][S_{ff}(\omega)][H^{1*}(j\omega)]^T + [H^{1*}(j\omega)][S_{ff}(\omega)][H^0(j\omega)]^T \quad (29)$$

二次变化率:

$$[S_{vv}^{kl}(\omega)] = [H^0(j\omega)][S_{ff}(\omega)][H_{kl}^{1*}(j\omega)]^T + [H_{kl}^{1*}(j\omega)][S_{ff}(\omega)][H^0(j\omega)]^T \quad (30)$$

再来考虑响应的绝对加速度的功率谱,根据振动理论,相对位移 $\{v(\omega)\}$ 的频谱 $\{v(\omega)\}$ 可由下式给出:

$$\{v(\omega)\} = [H(j\omega)]([M][R] + [Mg])\{\ddot{v}_s(\omega)\} \quad (31)$$

而绝对位移 v^s 则由下式给出

$$\{v^s\} = \{v\} + \{v^s\} = \{v\} + [R]\{v_s\} \quad (32)$$

这里, $\{v\}$ 为相对位移, $\{v^s\}$ 为准静位移。

因此绝对加速度可写为

$$\{a^s\}_n = \{\ddot{v}\}_n + [R]_{n \times m}\{\ddot{v}_s\}_m \quad (33)$$

这里, $\{\ddot{v}\}$ 表示相对加速度; $\{\ddot{v}_s\}$ 是激励加速度。由式(31)得响应的相对加速度的频谱为

$$\{a(\omega)\} = -\omega^2 [H(j\omega)] ([M][R] + [Mg]) \{\ddot{v}_g(\omega)\} \quad (34)$$

由(33)得响应的绝对加速度频谱

$$\{a^i(\omega)\} = [[R] - \omega^2 [H(j\omega)] ([M][R] + [Mg])] \{\ddot{v}_g(\omega)\} \quad (35)$$

从式(35)可以得到响应的绝对加速度的功率谱:

$$[S^a(\omega)] = [[R] - \omega^2 [H(j\omega)] ([M][R] + [Mg])] [S_{v_g}(\omega)] \cdot ([R]^T - \omega^2 ([R]^T [M] + [Mg]^T) [H^*(j\omega)]^T) \quad (36)$$

为了说明方法,下面推出响应绝对加速度谱关于阻尼小参数 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, L)$ 的一次摄动展开式:将式(19)代入式(36),得

$$[S^a(\omega)] = [S^{a0}(\omega)] + \sum_k [S_k^a(\omega)] \alpha_k \quad (37)$$

其中,

$$[S^{a0}(\omega)] = [[R] - \omega^2 [H^0(j\omega)] ([M][R] + [Mg])] [S_{v_g}(\omega)] \cdot ([R]^T - \omega^2 ([R]^T [M] + [Mg]^T) [H^{0*}(j\omega)]^T) \quad (38)$$

$$[S_k^a(\omega)] = -\omega^2 [H_k^1(j\omega)] ([M][R] + [Mg]) [S_{v_g}(\omega)] \cdot ([R]^T - \omega^2 ([R]^T [M] + [Mg]^T) [H^{0*}(j\omega)]^T) - \omega^2 [[R] - \omega^2 [H^0(j\omega)] ([M][R] + [Mg])] \cdot [S_{v_g}(\omega)] \cdot ([R]^T [M] + [Mg]^T) [H_k^{1*}(j\omega)]^T \quad (39)$$

在具体问题中,为了考察某一点响应绝对加速度的自谱,只须在式(39)中分出某一个元素即可,如第 j 点响应加速度自谱的一次摄动为:

$$S_{ij}^a(\omega) = S_{ij}^{a0}(\omega) + \sum_k S_{ijk}^a(\omega) \alpha_k \quad (40)$$

根据振动理论,某点的位移(或加速度)的均方值与该点位移(或加速度)的功率谱有关,即:

$$E[v^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_v(\omega) d\omega \quad (41)$$

这里 $E[v]^2$ 表示某点的位移(或加速度)均方,而 $S_v(\omega)$ 表示这点位移或加速度的功率谱。

对式(40)两边施行广义积分,可得到系统某一点的响应绝对加速度均方的一次摄动展开

式:

$$\bar{\xi}_j^2 = \bar{\xi}_j^{20} + \sum_k \bar{\xi}_{jk}^{21} \alpha_k \tag{42}$$

其中

$$\bar{\xi}_j^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{jj}^a(\omega) d\omega$$

$$\bar{\xi}_j^{20} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{jj}^{a0}(\omega) d\omega$$

$$\bar{\xi}_{jk}^{21} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{jk}^{a1}(\omega) d\omega$$

分别表示第 j 点响应的绝对加速度的均方、均方的初始值以及对 α_k 的一次变化率。

4 在汽车减振优化中的应用

我们选择了重庆汽车厂从日本引进的五十铃轻型载重车为研究对象,将车架分成20个单元,受四轮激振的 FEM 模型,以一维 Belgian Pavement 模型的激振加速度的功率谱作为输入,将1.75吨载重量及本身的发动机、车架重量按照车架的几何尺寸转化为每个单元的重量密度,忽略结构本身及轮胎的阻尼,仅考虑悬架系统的减振器的阻尼。以减振为目标来优化前后两阻尼器参数。

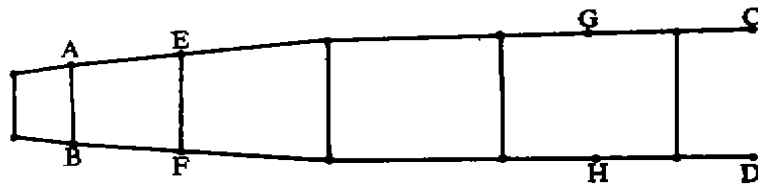


图1 五十铃车架 FEM 模型

以车架上 A、B、C、D 四点响应的垂直绝对加速度的最小均方为优化目标 相应的目标函数选为:

$$\min: G(\alpha_1, \alpha_2) = \bar{\xi}_a^{20} + \sum_{k=1}^2 \bar{\xi}_{ak}^{21} \alpha_k \tag{43}$$

$\bar{\xi}_a^{20}$ 、 $\bar{\xi}_{ak}^{21}$ 分别表示 A、B、C、D 四点垂直绝对加速度均方的算术平均。

为了保证前后悬挂的可靠性,将可靠性条件作为优化的约束条件。根据可靠性的灵敏度讨论结果[另文发表]以悬挂处的可靠性保证条件作为约束条件。

$$\text{st: } \beta_a^0 + \sum_{k=1}^2 \beta_a^k \alpha_k \geq \beta^* \tag{44}$$

$$\beta_b^0 + \sum_{k=1}^2 \beta_b^k \alpha_k \geq \beta^* \tag{45}$$

这里 $\rho_E, \rho_G, \rho_E, \rho_G$ 分别前、后悬挂处 E、G 的可靠性指标的初始值和对阻尼参数的灵敏度, 可由频响函数以及输入谱算出。另外由于阻尼修正参数 α_1, α_2 是小参数, 约束 α_1, α_2 的变化范围。

$$\text{st: } \omega_1^2 \leq 0.04 \quad (46)$$

$$\omega_2^2 \leq 0.04 \quad (47)$$

优化方法采用可变误差的多面体算法, 由于最后优化的问题不很复杂, 迭代次数只用了 43 次精度计算到 0.7143×10^{-3} 。

有限元模型的一些几何尺寸从实际车架直接测得。断面矩及极惯性矩可用材料力学方法计算, 考虑满载情况, 整车重量为 3950kg, 悬挂上质量取为 3400kg, 前悬挂下质量设为 250kg, 后悬挂下质量取为 300kg, 前钢板弹簧的刚度取为 $k_1 = 99\text{kN/m}$, 后钢板弹簧刚度 k_2 为 120kN/m, 前减振器阻尼取为 $C_1 = 6.533\text{kN}\cdot\text{s/m}$, 右减振器阻尼 $C_2 = 7.938\text{kN}\cdot\text{s/m}$, 轮胎刚度取为 $K_3 = K_4 = 735\text{kN/m}$ (前后一致), 在计算前后悬挂的可靠性指标时, 由前后悬挂的动挠度指标, 前后悬挂的容许位移的均值分别取为 208mm 和 175mm, 方差 (均方根) 都取为 50mm, 设车速 $V = 60\text{km/h}$, 以一维 Belgain Pavement 路面模型模拟所得到的频谱, 功率谱作为输入 (左右取值不同)。

优化计算得到修改参数 $\alpha_1 = 0.112$ (前阻尼器), $\alpha_2 = 0.176$ (后阻尼器); 前桥上车架的 E 点垂直加速度的时间历程曲线见图 2, (a 表示修改前, b 表示修改后)

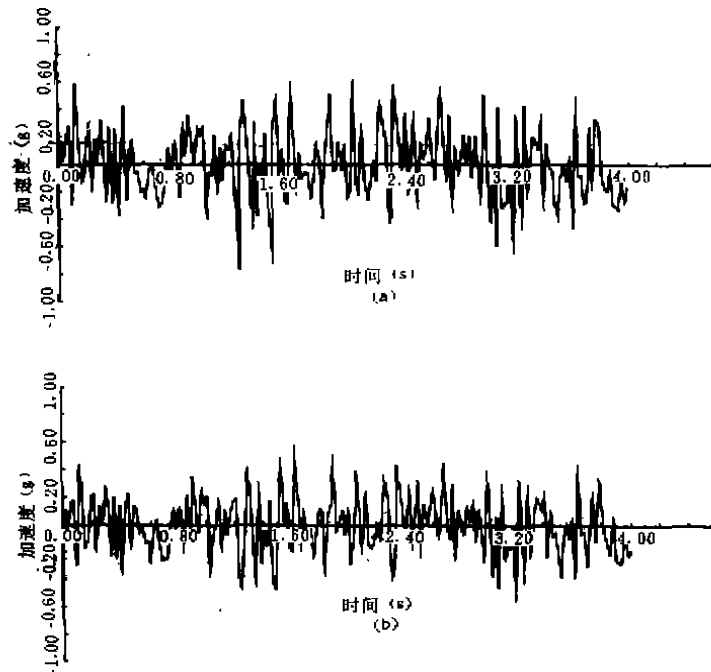


图2 修改前后 E 点的垂直加速度时程曲线 (a 表示修改前, b 表示修改后)

车架上前右悬挂处 E 点垂直加速度的自功率谱 (见图 3 的 a、b)。

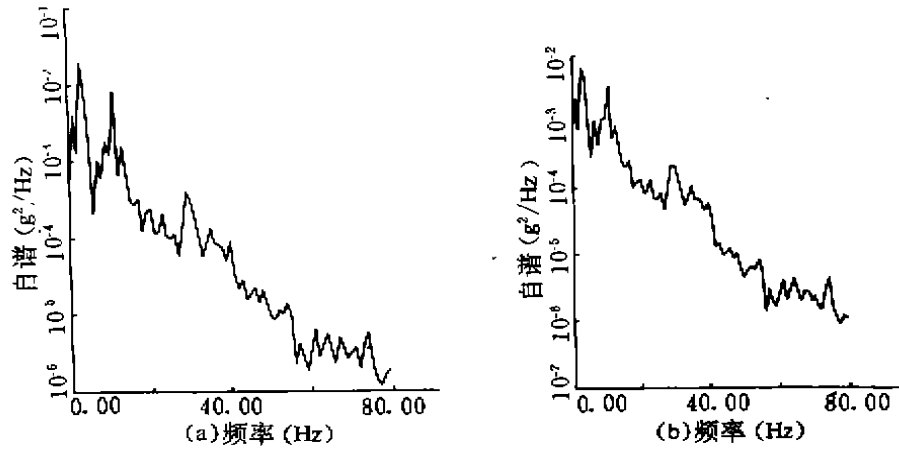


图3 E点的垂直加速度自动功率(a表示修改前,b表示修改后)

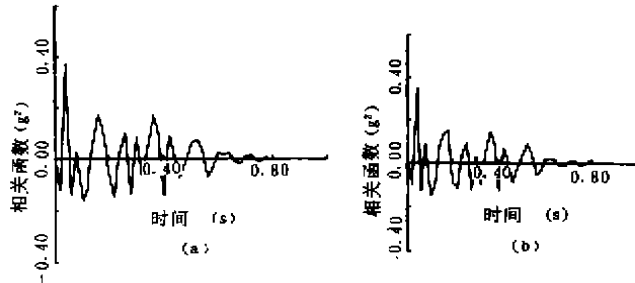


图4 车轴激励与E点响应垂直加速度的相关函数曲线(a表示修改前,b表示修改后)

前右轮的路面输入与车架上前右悬挂处的重加速度输出的互相关函数的曲线(见图4的a、b)从图中可以看出,振动从地面传到车架上滞后时间为0.04秒。

5 结 论

本文提出的受多点激励时可变阻尼的振动系统的频响函数及响应灵敏度的分析方法具有通用性,除了本文列举的加速度时程,自谱、相关函数曲线外,对于响应的互谱、自相关以及相干函数的计算,本方法同样适用。

参 考 文 献

- 1 中桐久田. 确率有限要素法入门,培风馆(1985)
- 2 张湘伟. 具有非比例随机阻尼结构概率有限元谱分析,中南、西南九省(市)计算力学学术会文集,1987,12, 郑州。
- 3 张阿舟等. 阻尼系统的复模态理论,南京航空学院学报,1983(1)。