

# 双二阶开关电容滤波器的灵敏度研究\*

## A STUDY OF THE SENSITIVITY OF BIQUADRATIC SWITCHED CAPACITOR FILTER

曾孝平

Zeng Xiaoping

(重庆大学电气工程系)

**摘 要** 分析了双二阶开关电容滤波器(SCF)特征角频率 $\omega_0$ 和品质因数 $Q$ 的灵敏度,以高 $Q$ 带通滤波器为例,计算了SC支路按不同方向转移的三种不同电路以及单位电容改变时的 $S_{\omega_0}^{\%}$ 和 $S_Q^{\%}$ ,并给出了计算机仿真结果。结果表明, $\omega_0$ 和 $Q$ 的灵敏度可精确地用各支路电容解析表达,其值只取决于各支路电容比而与电容值无关,当支路增益转移时,其灵敏度相应转置。

**关键词** 滤波器;灵敏度/开关电容

中国图书资料分类法分类号 TN 713.91

**ABSTRACT** The purpose of this paper is to analyze the sensitivity of characteristic frequency and quality factor in switched capacitor filter(SCF). Taking the high  $Q$  bandpass filter for example, we change the SC branches in different ways and the normalized capacitance value, and calculate the  $S_{\omega_0}^{\%}$  and  $S_Q^{\%}$  of the circuit. The results of computer imitation are illustrated. It is found that the sensitivity for characteristic frequency  $\omega_0$  and quality factor  $Q$  in biquadratic switched capacitor filter can be expressed exactly in the term of the analytic expression of the branch capacitance. The value of the  $S_{\omega_0}^{\%}$  and  $S_Q^{\%}$  only depends on the capacitance ratio and has nothing to do with the value of the capacitor. The sensitivity is transposed according to the changing of branches.

**KEY WORDS** filter; sensitivity/switched capacitor

## 0 引 言

滤波器的特性对元件变化的灵敏度是开关电容滤波器(SCF)性能的一个重要指标。为了获得低灵敏度的开关电容滤波器,常采用双二阶电路。但是并非所有的双二阶电路都具有低灵敏度的特点。因此双二阶开关电容滤波器的灵敏度一直是电路设计中的一个重要问题,为此,人们作了大量的研究<sup>[1-6]</sup>。为了得到 $\omega_0$ 和 $Q$ 的简单表达式,常采用近似的方法<sup>[1-3]</sup>,将要实现的双二阶 $Z$ 域传递函数的分子、分母系数分别用其在 $S$ 域中零点和极点的特征角频率和品质因数近似表示,得到特征角频率和品质因数与各电容的关系,但是这种近似代换只

\* 收文日期 1990-03-16

能在一定条件下适用<sup>[2]</sup>。本文用双线性变换将予畸变后的  $S$  域特征角频率  $\omega_0$  和品质因数  $Q$  映射到  $Z$  域, 得到  $Z$  域传递函数的系数与  $\omega_0$  和  $Q$  的精确关系, 写出了用通用结构各支路电容表示  $\omega_0$  和  $Q$  的解析式。通过这个关系式可以了解  $\omega_0$  和  $Q$  对各支路电容灵敏度的相互关系, 为计算机辅助优化设计带来了方便。

## 1 双二阶 SCF 中 $\omega_0$ 和 $Q$ 灵敏度的一般表达式

设要实现的双二阶函数在  $S$  域经频率予畸变后的标准式为

$$H'(S) = \frac{N'(S)}{D'(S)} = \frac{k_2 S^2 + k_1 S + k_0}{S^2 + \frac{\omega_0}{Q} S + \omega_0^2} \quad (1)$$

通过双线性变换得到的  $Z$  域标准式为

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_0}{b_2 z^{-2} + b_1 z^{-1} + 1} \quad (2)$$

因此双二阶函数的特征角频率  $\omega_0$  和品质因数  $Q$  可用  $Z$  域传递函数的系数  $b_2$  和  $b_1$  精确地表示为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\omega_0}{Q} \\ \omega_0^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{b_2 - b_1 + 1} (b_2 \ b_1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{T_c} & (\frac{2}{T_c})^2 \\ -1 & 0 & (\frac{2}{T_c})^2 \\ 1 & \frac{4}{T_c} & (\frac{2}{T_c})^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$T_c$  为时钟周期。令

$$\omega_b = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{4}{T_c} \frac{1 - b_2}{b_2 - b_1 + 1} = \frac{4}{T_c} \frac{L}{N} \quad (4)$$

$$\omega_0 = \frac{2}{T_c} \sqrt{\frac{b_2 + b_1 + 1}{b_2 - b_1 + 1}} = \frac{2}{T_c} \sqrt{\frac{M}{N}} \quad (5)$$

其中

$$L = 1 - b_2 \quad (6a)$$

$$M = b_2 + b_1 + 1 \quad (6b)$$

$$N = b_2 - b_1 + 1 \quad (6c)$$

那么,  $\omega_0, Q$  对各电容  $x$  的灵敏度可表示为

$$\begin{aligned} S_x^{\omega_0} &= \frac{\partial \ln \omega_0}{\partial \ln x} = x \frac{\partial}{\partial x} \left( \ln \frac{2}{T_c} + \frac{1}{2} \ln M - \frac{1}{2} \ln N \right) \\ &= \frac{x}{2} \left( \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} S_x^Q &= \frac{\partial \ln Q}{\partial \ln x} = x \frac{\partial}{\partial x} (\ln \omega_0 - \ln \omega_b) \\ &= x \left[ \frac{1}{2M} \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{1}{2N} \frac{\partial N}{\partial x} - \left( \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial x} \right) \right] \\ &= x \left[ \frac{1}{2M} \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{2N} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (7b)$$

图 1(a) 是双二阶 SCF 的通用结构的信号流图, SC 电导支路增益为  $\tilde{Y}_i = y_i - y_i z^{-1}$ , 阻抗

支路增益为  $Z_i = \frac{-1}{c_i(1-z^{-1})}$ , 图1(b)是支路电路图<sup>[7]</sup>, 图1(c)是 SCF 电路图. 它的 Z 域传递函数为

$$H(z) = \frac{F_0(z)}{V_1(z)} = \frac{\bar{F}_1\bar{F}_3 - \bar{F}_2(c_2(1-z^{-1}) + \bar{F}_4)}{c_1c_2(1-z^{-1})^2 + c_2(1-z^{-1})\bar{F}_4 + c_1(1-z^{-1})\bar{F}_6 - \bar{F}_3\bar{F}_5 + \bar{F}_4\bar{F}_6} \quad (8)$$

将式(8)展开, 并与式(2)比较得

$$a_2 = (y_1^*y_3^* - y_2^*(c_1 + y_4^*))/b_0 \quad (9a)$$

$$a_1 = -(y_1^*y_3^* + y_1^*y_3^* - y_2^*(c_1 + y_4^*) - y_2^*(c_1 + y_4^*))/b_0 \quad (9b)$$

$$a_0 = [y_1^*y_3^* - y_2^*(c_1 + y_4^*)]/b_0 \quad (9c)$$

$$b_2 = (c_1c_2 + c_2y_4^* + c_1y_6^* - y_3^*y_5^* + y_4^*y_6^*)/b_0 \quad (9d)$$

$$b_1 = -(2c_1c_2 + (y_4^* + y_4^*)c_2 + (y_6^* + y_6^*)c_1 - (y_3^*y_5^* + y_3^*y_5^*) + y_4^*y_6^* + y_4^*y_6^*)/b_0 \quad (9e)$$

$$b_0 = c_1c_2 + c_2y_4^* + c_1y_6^* - y_3^*y_5^* + y_4^*y_6^* \quad (9f)$$

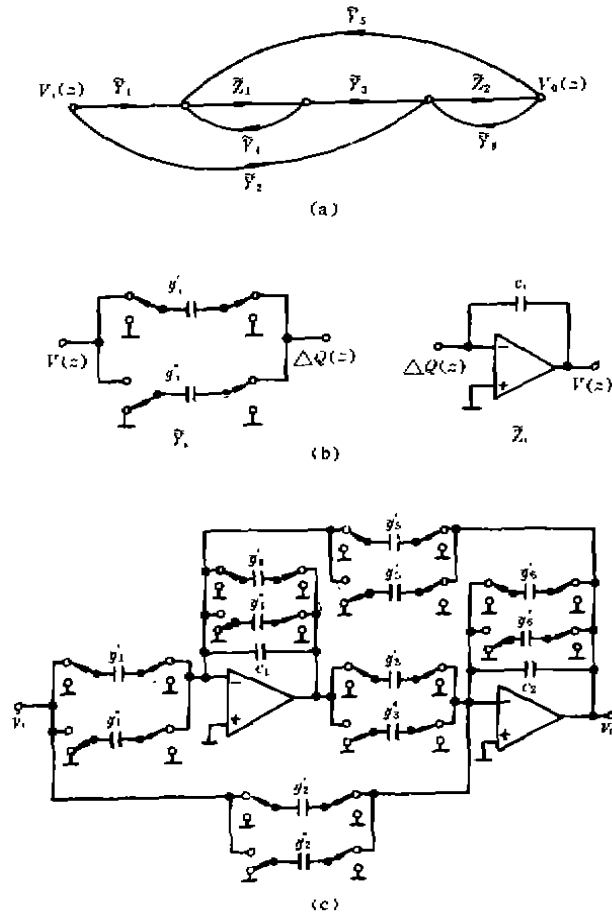


图1 双二阶 SCF 通用结构

因此

$$b_0L = b_0(1 - b_2) = c_2(y_4^* - y_4^*) + c_1(y_6^* - y_6^*) - (y_3^*y_5^* - y_3^*y_5^*) + (y_4^*y_6^* - y_4^*y_6^*) \quad (10a)$$

$$b_0M = b_0(b_2 + b_1 + 1)$$

$$= -(y_3^*y_5^* - (y_3^*y_5^* + y_3^*y_5^*) + y_3^*y_5^*) + y_4^*y_6^* - (y_4^*y_6^* + y_4^*y_6^*) + y_4^*y_6^* \quad (10b)$$

$$b_0N = b_0(b_2 - b_1 + 1) = 4c_1c_2 + 2c_2(y'_4 + y''_4) + 2c_1(y'_6 + y''_6) - (y'_3y'_5 + y'_3y''_5 + y''_3y'_5 + y''_3y''_5) + (y'_4y'_6 + y'_4y''_6 + y''_4y'_6 + y''_4y''_6) \quad (10c)$$

将式(10)代入式(7)就可以得到  $\omega_0$ 、 $Q$  对各支路的灵敏度。

从式(8)可知,该式的冗余度很大,因此各支路参数的选择非常灵活,例如选择  $\tilde{Y}_4 = y'_4$ 、 $\tilde{Y}_6 = 0$ ,或  $\tilde{Y}_4 = 0$ 、 $\tilde{Y}_6 = y'_6$ ,也可选择  $\tilde{Y}_4 = y'_4$ 、 $\tilde{Y}_6 = y'_6$  等,我们称相应的电路分别为 I、II 和 III 型<sup>[7]</sup>。由于  $\tilde{Y}_3\tilde{Y}_5$  是以积的形式出现在式(8)中, $\tilde{Y}_3$  和  $\tilde{Y}_5$  可以有不同的选择,因此共有六种组合,表 1 列出了三种电路各种组合下的  $L$ 、 $M$  和  $N$  的表达式。

表 1 三种电路各种组合下  $L$ 、 $M$  和  $N$  的表达式

	$c_1 \ c_1 \ y'_3 \ y'_3 \ y'_5 \ y'_5 \ y'_4 \ y'_6$	L	M	N
I	✓✓✓ ✓✓✓	$c_2y'_4 - y'_3y'_5$	$-y'_3y'_5 + y'_3y''_5$	$4c_1c_2 - y'_3y'_5 - y'_3y''_5 + 2c_2y'_4$
II	✓✓✓ ✓✓ ✓	$c_1y'_6 - y'_3y'_5$	$-y'_3y'_5 + y'_3y''_5$	$4c_1c_2 - y'_3y'_5 - y'_3y''_5 + 2c_1y'_6$
III	✓✓✓ ✓✓✓✓	$c_1y'_6 + c_2y'_4 - y'_3y'_5 + y'_4y'_6$	$-y'_3y'_5 + y'_3y''_5 + y'_4y'_6$	$4c_1c_2 - y'_3(y'_5 + y''_5) + 2c_1y'_6 + 2c_2y'_4 + y'_4y'_6$
I'	✓✓✓✓ ✓✓	$c_2y'_4 - y'_3y'_5$	$-y'_3y'_5 + y'_3y''_5$	$4c_1c_2 - y'_3y'_5 - y'_3y''_5 + 2c_2y'_4$
II'	✓✓✓✓ ✓ ✓	$c_1y'_6 - y'_3y'_5$	$-y'_3y'_5 + y'_3y''_5$	$4c_1c_2 - y'_3y'_5 - y'_3y''_5 + 2c_1y'_6$
III'	✓✓✓✓ ✓✓✓	$c_2y'_4 + c_1y'_6 - y'_3y'_5 + y'_4y'_6$	$-y'_3y'_5 + y'_3y''_5 + y'_4y'_6$	$4c_1c_2 - y'_3(y'_5 + y''_5) + 2c_1y'_6 + 2c_2y'_4 + y'_4y'_6$

如果把  $y'_3$ 、 $y''_3$  分别与  $y'_5$ 、 $y''_5$  对换,或把  $c_1$ 、 $y'_6$ 、 $y''_6$  与  $c_2$ 、 $y'_4$ 、 $y''_4$  对换所得到的式子称为变换前的转置,用上标“T”表示,并称  $y'_3$ 、 $y''_3$  和  $y'_5$ 、 $y''_5$ ;  $c_1$ 、 $y'_6$ 、 $y''_6$  和  $c_2$ 、 $y'_4$ 、 $y''_4$  互为转置变量。这样不仅书写方便,而且各支路灵敏度之间的关系更加清楚。表 2 列出了  $\omega_0$  和  $Q$  在这六种电路中对各支路灵敏度的表达式。

由表 2 可以看出双二阶 SCF 电路中  $\omega_0$  和  $Q$  的灵敏度具有以下特点:

1. 特征角频率  $\omega_0$  和品质因数  $Q$  对各支路电容  $x$  的灵敏度  $S^{\omega_0}_x$  和  $S^Q_x$  只取决于各支路电容的比值,而与其电容值无关。这是因为在  $L$ 、 $M$ 、 $N$  的表达式中,它们的每一项都是两个电容值之积,而  $x \frac{\partial L}{\partial x}$ 、 $x \frac{\partial M}{\partial x}$  和  $x \frac{\partial N}{\partial x}$  的每一项也必然是两个电容值的积,因此当电容同时扩大  $K$  倍时,  $\frac{x}{L} \frac{\partial L}{\partial x}$ 、 $\frac{x}{M} \frac{\partial M}{\partial x}$ 、 $\frac{x}{N} \frac{\partial N}{\partial x}$  的分子分母同时扩大  $K^2$  倍,其值不变。

2. 当互为转置变量的支路互换时,其灵敏度相应转置。例如在表 2 中,将 A 选择的反馈支路  $\tilde{Y}_5 = y'_5 - y''_5z^{-1}$  和前向支路  $\tilde{Y}_3 = y'_3$  互换而形成的 B 选择,其灵敏度关系中  $y'_3$ 、 $y''_3$ 、 $y'_5$ 、 $y''_5$  分别与 A 选择中的  $y'_5$ 、 $y''_5$ 、 $y'_3$ 、 $y''_3$  互换。如

$$S^{\omega_0}_{y'_3} = S^{\omega_0}_{y'_5} = \frac{y'_5}{2} \left( \frac{-y''_5 + y'_5}{M^T} + \frac{y'_3 + y''_3}{N^T} \right)$$

又例如将 A 选择的 I 型电路的反馈支路  $\tilde{Y}_4 = y'_4$  转移到  $\tilde{Y}_6 = y'_6$  而形成的 II 型电路,其灵敏度关系中  $c_1$ 、 $c_2$ 、 $y'_6$  分别与 I 型电路中的  $c_2$ 、 $c_1$ 、 $y'_4$  互换。如

$$S^{\omega_0}_{c_2} = S^{\omega_0}_{c_1} = -\frac{2c_2 + y'_6}{N^T} c_1$$

表2  $\omega_0$  和  $Q$  在六种电路中对各支路灵敏度的表达式

A 选择 $y_3(y_5 - y_6z^{-1})$						
$S_x^{ub}$			$S_x^o$			
	I	II	III	I	II	III
$c_1$	$-\frac{c_1c_2}{N}$	$S_{1c_2}^{ub}$	$-\frac{2c_2 + y_6}{N}c_1$	$\frac{c_1c_2}{N}$	$S_{1c_2}^{oT}$	$c_1\left(\frac{2c_2 + y_6}{N} - \frac{y_6}{L}\right)$
$c_2$	$-\frac{2c_1 + y_4}{N}c_2$	$S_{1c_1}^{ub}$	$-\frac{2c_1 + y_4}{N}c_2$	$\left(\frac{2c_1 + y_4}{N} - \frac{y_4}{L}\right)c_2$	$S_{1c_1}^{oT}$	$c_2\left(\frac{2c_1 + y_4}{N} - \frac{y_4}{L}\right)$
$y_3$	$\frac{y_3}{2}\left(\frac{-y_5 + y_6}{M} + \frac{y_5 + y_6}{N}\right)$			$y_3\left(\frac{-y_5 + y_6}{2M} - \frac{y_5 + y_6}{2N} - \frac{y_6}{L}\right)$		
$y_3^*$	0			0		
$y_5^*$	$\frac{y_3y_5^*}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right)$			$-\frac{y_3y_5^*}{2}\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right)$		
$y_5^*$	$-\frac{y_3y_5^*}{2}\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right)$			$-\frac{y_3y_5^*}{2}\left(\frac{1}{2M} + \frac{1}{2N} - \frac{1}{L}\right)$		
$y_4$	$-\frac{c_1y_4}{N}$	0	$\frac{y_4}{2}\left(\frac{y_6}{M} - \frac{2c_2 + y_5}{N}\right)$	$c_2y_4\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{L}\right)$	0	$y_4\left(\frac{y_6}{2M} + \frac{2c_2 + y_5}{2N} - \frac{c_2 + y_6}{L}\right)$
$y_6$	0	$S_{1y_4}^{ub}$	$\frac{y_6}{2}\left(\frac{y_4}{M} - \frac{2c_1 + y_4}{N}\right)$	0	$S_{1y_4}^{oT}$	$y_6\left(\frac{y_4}{2M} + \frac{2c_1 + y_4}{2N} - \frac{c_1 + y_4}{L}\right)$
B 选择 $(y_3 - y_3^*z^{-1})y_5^*$						
$S_x^{ub}$			$S_x^o$			
	I'	II'	III'	I'	II'	III'
$c_1$	$S_{1c_1}^{ub}$	$S_{1c_2}^{ubT}$	$S_{IIc_1}^{ub}$	$S_{1c_1}^o$	$S_{1c_2}^{oT}$	$S_{IIc_1}^o$
$c_2$	$S_{1c_2}^{ub}$	$S_{1c_1}^{ubT}$	$S_{IIc_2}^{ub}$	$S_{1c_2}^o$	$S_{1c_1}^{oT}$	$S_{IIc_2}^o$
$y_3^*$	$S_{Ay_3}^{ubT}$			$S_{Ay_3}^{oT}$		
$y_3^*$	$S_{Ay_5}^{ubT}$			$S_{Ay_5}^{oT}$		
$y_5^*$	0			0		
$y_6^*$	$S_{Ay_3}^{ubT}$			$S_{Ay_3}^{oT}$		
$y_4$	$S_{1y_4}^{ub}$	0	$S_{IIy_4}^{ub}$	$S_{1y_4}^o$	0	$S_{IIy_4}^o$
$y_6$	0	$S_{1y_4}^{ubT}$	$S_{IIy_6}^{ub}$	0	$S_{1y_4}^{oT}$	$S_{IIy_6}^o$

## 2 计算举例

这一节以高 Q 带通滤波器

$$H(z) = \frac{0.1321(1 - z^{-1})}{z^{-2} - 0.5911z^{-1} + 1.0835}$$

为例,计算几种不同电路的灵敏度。表3列出了实现该函数的 I、II 和 III 型电路有关电容和 L、M、N 的值,表中还列出了对 III 型电路的支路增益调节后的电路 I' 和将 I' 电路的单位电容取为 47pF 的电路 II'' 以便比较。表4列出了各灵敏度的值。

表3 几种电路的有关电容及其 L、M、N 的值

	$c_1$	$c_2$	$y_3$	$y_5$	$y_5$	$y_4$	$y_6$	L	M	N
I	1	1	1	1.4923	0	0.0835	0	0.0835	1.4923	2.6747
II	1	1	1	1.4923	0	0	0.0835	0.0835	1.4923	2.6747
I'	1.19	11.9	1.19	17.87	0	0	1	1.19	21.2653	37.7587
II''	56	560	56	840	0	0	47	2632.71	47040	83664
III	1	1	1	2.4925	1.2935	0.5418	0.5418	0.0835	1.4925	2.6747

由表4可以看出:

1. III 型电路与 I 型电路的灵敏度关系发生了转置,即  $c_1, c_2, y_4, y_6$  与 I 型电路的灵敏度的  $c_2, c_1, y_6, y_4$  互换;
2. 电路 I' 与 II 的灵敏度不等,即调节支路增益会改变其灵敏度;
3. 电路 II'' 与 I' 的灵敏度相同,即电容值的改变不影响其灵敏度。
4. 电路 I、II、I' 和 II'' 的灵敏度均小于 1,即具有低灵敏度的特点,而 III 型电路的灵敏度较高,一般来说,带通滤波器  $\omega_0$  的灵敏度比 Q 的灵敏度要求更高,由于  $S_{\omega_0}^{c_1}$  约等于 1,故基本可用。图 2 给出了计算机仿真的理想响应曲线和  $y_3$  增大 10% 的频率响应曲线。

表 4  $\omega_0$  和 Q 在几种电路中对各支路灵敏度的值

	$S_{\omega_0}^{c_i}$					$S_Q^{y_i}$				
	I	II	I'	II''	III	I	II	I'	II''	III
$c_1$	-0.7477	-0.7790	-0.7816	-0.7811	-0.9503	0.7477	0.2210	-0.2184	-0.2184	-5.5383
$c_2$	-0.7790	-0.7477	-0.7500	-0.7497	-0.9503	0.2210	0.7477	0.7500	0.7497	-5.5383
$y_3$	-0.7790	0.7790	0.7816	0.7811	1.1095	0.2210	0.2210	0.2184	0.2189	-15.7970
$y_5$	0.7790	0.7790	0.7816	0.7811	0.6752	-0.2210	-0.2210	-0.2184	-0.2189	-0.1916
$y_5$	0	0	0	0	-0.1916	0	0	0	0	-14.8158
$y_4$	-0.0312	0	0	0	-0.1591	-0.9688	0	0	0	-12.9907
$y_6$	0	-0.0312	-0.0315	-0.0315	-0.1591	0	-0.9688	-0.9685	-0.9685	-12.9907

### 3 结 论

双二阶 SCF 电路的灵敏度  $S_{\omega}^{\omega_0}$  和  $S_{\omega}^{\omega_1}$  可以用支路电容解析表达, 其值取决于电容比, 而与电容值无关, 调节支路增益时会改变其灵敏度, 当支路转移时, 其灵敏度相应转置。

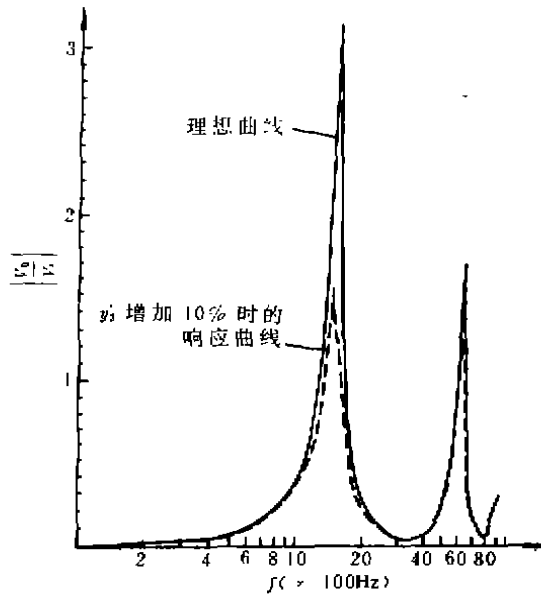


图 2 计算机仿真响应曲线

### 参 考 文 献

- 1 Fleisher P E, Laker K R. A Family of Active Switched Capacitor Biquad Building Blocks. Bell Syst tech J, 1979, 58 (10), 2235~2269
- 2 Laker K R et al. Design and Implementation of Cascaded Switched-Capacitor Delay Equalizers. IEEE Trans, 1985, CAS-32(7), 700~711
- 3 Fischer G et al. High-Q SC Biquad with a Minimum Capacitor Spread. Electron Lett, 1982, 18(25), 1087~1088
- 4 Szentirmai G et al. Switched-Capacitor Building Blocks. IEEE Trans, 1980, CAS-27(6), 492~500
- 5 Jacobs G M. Allpass Biquadratic Switched-Capacitor Filters. IEEE Trans, 1985, CAS-32(1), 1~12
- 6 Karagöz C et al. Active Switched Capacitor Filter Realization for a Biquadratic Voltage Transfer Function. Int J Electronics, 1983, 54(2), 211~220
- 7 周宝薇, 曾孝平. 用 SC 支路和 Z 域信号流图精确设计双二阶 SCF. 电子学报, 1988, 16(3), 71~78
- 8 曾孝平, 周宝薇. 开关电容滤波器运放有限增益效应补偿. 重庆大学学报, 1988, 11(6), 49~56