一类$2n$阶 Volterra 捕食系统的有界性和全局稳定性*

BOUNDEDNESS AND GLOBAL STABILITY FOR A CLASS OF VOLTERRA PREY-PREDATOR SYSTEMS

陈均平
Chen Junping
(重庆大学系统工程及应用数学系)

摘 要 证明了一类$2n$阶 Volterra 捕食系统的有界性,并给出另一种形式上更为简明及生态意义更清楚的全局稳定性条件。

关键词 微分方程;有界性;全局稳定性/捕食系统;捕食链系统

中国图书资料分类法分类号 O175.12;Q550.8

ABSTRACT The boundedness for a class of Volterra prey-predator systems is proved and the conditions of the global stability for this class are given, which are formally different from the previous conditions obtained by the same author.

KEY WORDS differential equation; boundedness; global stability/prey-predator systems; prey-predator chain system

0 引 言

对于3个种群的 Volterra 捕食系统,文献[1]列出了34种关系,对于3个种群以上的 n 种群 Volterra 系统,类型甚多,文献[1～10]对食物链系统、多资源单终端捕食系统、多资源多终端捕食系统的有界性、全局稳定性、持久性和绝灭性等进行研究,但尚有许多类型及问题有待深入讨论(例如,见[11])。

本文对[3]讨论的一类$2n$阶 Volterra 捕食系统补充证明了其解的有界性,其方法借助于文[8,9],但较之似更简单,此外也给出了另一种形式上更为简明且生态意义更清楚的全局稳定性条件。

文[3]讨论过的具有环状关系的多资源的捕食系统为下面的$2n$阶 Volterra 模型:

* 收文日期 1990-04-15

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = x_i(a_{i,0} - a_{i,i}x_i - a_{i,i+n}y_i) \\[2mm]
\dfrac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = y_i(-a_{i+n,0} + a_{i+n,i}x_i - a_{i+n,i+n}y_i \\[2mm]
\qquad - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{i+n,j+n}y_j + \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{i+n,j+n}y_j) \\[2mm]
\qquad i = 1,2,\cdots,n
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中$x_i(t)$、$y_i(t)$分别表示食饵种群、捕食者种群在时刻t的种群密度(在捕食者y_i之间存在着环状的捕食关系)；$a_{i,0}$表示食饵种群x_i的内禀增长率；$a_{i+n,0}$表示捕食者y_i的死亡率；$a_{i,i}$、$a_{i+n,i+n}$分别表示食饵种群x_i、捕食者种群y_i的密度制约系数；$a_{i,i+n}$表示捕食者种群y_i对食饵种群x_i的捕食系数；$a_{i+n,j+n}(1 \leqslant j \leqslant i-1)$表示种群$y_j$对$y_i$的捕食系数；$a_{i+n,i}$表示$y_i$对$x_i$的消化系数；$a_{i+n,j+n}(i+1 \leqslant j \leqslant n)$表示种群$y_i$对$y_j$的消化系数。上述这些系数按其生态意义均为非负常数，本文讨论这些系数为正的一般情形。

1　系统的有界性

为叙述简单起见，称微分方程组(1)满足初始条件：

$$
x_i(0) = x_{i0} > 0,\quad y_i(0) = y_{i0} > 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2}
$$

的解为正 Cauchy 问题。

定理1　系统(1)的正 Cauchy 问题的解是有界的。

证　记系统(1)正 Cauchy 问题的解为$x_i(t),y_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$. 显然方程组(1)除有平凡解$x_i = y_i = 0(i=1,2,\cdots,n)$外，在$2n$维空间$x_i,y_i(i=1,2,\cdots,n)$中的一切$2n-1$维超平面都是解，注意到方程组(1)的右端对一切$x_i,y_i$是解析的，初始问题的解存在唯一，故正 Cauchy 问题的解对一切$t \geqslant 0$均有$x_i(t) > 0, y_i(t) > 0(i=1,2,\cdots,n)$.

为了证明对一切$t \geqslant 0$均有$x_i(t),y_i(t)$有界，引入以下常数：

$$
\begin{cases}
k_i = a_{i,0}/a_{i,i},\ \alpha_i = \max(k_i, x_{i0}),\ i = 1,2,\cdots,n \\
k'_n = (-a_{2n,0} + a_{2n,n}\alpha_n)/a_{2n,2n},\ \alpha'_n = \max(k'_n, y_{n0}) \\
k'_{n-1} = (-a_{2n-1,0} + a_{2n-1,n-1}\alpha_{n-1} + a_{2n-1,2n}\alpha'_n)/a_{2n-1,2n-1}, \\
\alpha'_{n-1} = \max(k'_{n-1}, y_{n-1,0}),\ \cdots\cdots, \\
k'_1 = (-a_{n+1,0} + a_{n+1,1}\alpha_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} a_{n+1,n+j}\alpha'_j)/a_{n+1,n+1} \\
\alpha'_1 = \max(k'_1, y_{10})
\end{cases}
\tag{3}
$$

显然$k_i,\alpha_i,k'_i,\alpha'_i(i=1,2,\cdots,n)$是可以依次唯一确定的常数，并且$\alpha_i,\alpha'_i$均为正。

注意到对一切$t \geqslant 0$有$x_i(t) > 0, y_i(t) > 0(i=1,2,\cdots,n)$，并由方程组(1)可知，一旦$x_i(t) \geqslant k_i$时，则有$\dot{x}_i \leqslant 0$. 因此对一切$t \geqslant 0$均有$x_i(t) \leqslant \alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$，即一切$x_i(t)$是有界的。

因为由方程组(1)及对一切t,$x_i(t) > 0, y_i(t) > 0$并且$x_i(t) \leqslant \alpha_i$，故

$$
\dot{y}_n = y_n(-a_{2n,0} + a_{2n,n}x_n - a_{2n,2n}y_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{i+n,j+n}y_j)
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant y_n(-a_{2n,0}+a_{2n,n}x_n-a_{2n,2n}y_n)\\
&\leqslant a_{2n,2n}y_n(k'_n-y_n)\leqslant 0,\forall\, t\geqslant 0,y_n\geqslant k'_n
\end{aligned}
\tag{4}
$$

故对一切 $t\geqslant 0$，总有 $0<y_n(t)\leqslant \alpha'_n$，即 $y_n(t)$ 有界。

注意到

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_{n-1}&=y_{n-1}(-a_{2n-1,0}+a_{2n-1,n-1}x_{n-1}-a_{2n-1,2n-1}y_{n-1}\\
&\quad-\sum_{j=1}^{n-1}a_{i+n,j+n}y_j+a_{2n-1,2n}y_n)\\
&\leqslant y_{n-1}(-a_{2n-1,0}+a_{2n-1,n-1}x_{n-1}+a_{2n-1,2n}y_n-a_{2n-1,2n-1}y_{n-1})\\
&\leqslant a_{2n-1,2n-1}y_{n-1}(k'_{n-1}-y_{n-1})\leqslant 0,\forall\, t\geqslant 0,y_{n-1}\geqslant k'_{n-1}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

故对一切 $t\geqslant 0$，总有 $0<y_{n-1}(t)\leqslant \alpha'_{n-1}$，即 $y_{n-1}(t)$ 有界。

依此进行下去，对 $y_1(t)$ 有

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1&=y_1(-a_{n+1,0}+a_{n+1,1}x_1-a_{n+1,n+1}y_1+\sum_{j=2}^{n}a_{n+1,n+j}y_j)\\
&\leqslant a_{n+1,n+1}y_1(k'_1-y_1)\leqslant 0,\forall\, t\geqslant 0,y_1\geqslant k'_1
\end{aligned}
\tag{6}
$$

故对一切 $t\geqslant 0$，总有 $0<y_1(t)\leqslant \alpha'_1$，即 $y_1(t)$ 有界，证毕。

2 全局稳定性问题

为了使阐明全局稳定性的定理2的证明叙述清楚起见，引入以下的引理。

引理1 下列恒等式成立：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=2}^{n}c_i^*(y_i-y_i^*)\sum_{j=1}^{i-1}a_{i+n,n+j}(y_j-y_j^*)\\
&=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}c_j^*a_{j+n,n+i}(y_i-y_i^*)(y_j-y_j^*)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

引理2 当下列 $(n-1)(n-2)/2$ 个条件：

$$
\begin{aligned}
&a_{2n,n+i}a_{n+i,n+j}a_{n+j,2n}=a_{2n,n+j}a_{n+j,n+i}a_{n+i,2n}\\
&i=1,2,\cdots,n-2;j=i+1,i+2,\cdots,n-1.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

满足时，则下列 $n(n+1)/2$ 个以 $c_i^*(i=1,2,\cdots,n;n\geqslant 3)$ 为未知数的线性齐次方程组

$$
\begin{aligned}
&c_i^*a_{i+n,n+j}-c_j^*a_{j+n,i+n}=0\\
&i=1,2,\cdots,n-1;j=i+1,i+2,\cdots,n
\end{aligned}
\tag{9}
$$

有解：

$$
c_n^*=1,c_i^*=a_{2n,n+i}/a_{n+i,2n},(i=1,2,\cdots,n-1)
\tag{10}
$$

引理1、2均不难直接验证。

定理2 设 $z^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*,y_1^*,\cdots,y_n^*)$ 是微分方程组(1)的唯一正平衡点，当微分方程组(1)的系数满足 $(n-1)(n-2)/2$ 个条件：

$$
\begin{aligned}
&a_{2n,n+i}a_{n+i,n+j}a_{n+j,2n}=a_{2n,n+j}a_{n+j,n+i}a_{n+i,2n}\\
&i=1,2,\cdots,n-2;j=i+1,i+2,\cdots,n-1.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

时，正平衡点 $z^*(x_i^*>0,y_i^*>0)$ 在空间 $x_i>0.y_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 内是全局渐近稳定的。

证 我们构造 $V(x_1,\cdots,x_n,y_1\cdots,y_n)$ 函数[1]：

$$V=\sum_{i=1}^{n}c_i[x_i-x_i^*(1+\ln x_i/x_i^*)]+\sum_{i=1}^{n}c_i^*[y_i-y_i^*(1+\ln y_i/y_i^*)] \tag{12}$$

V具有以下性质：

(1) $V(z^*)=0$，

(2) 在 $x_i>0, y_i>0(i=1,2,\cdots n)$ 内，只要 $X=(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)\neq z^*$，则 $V(X)>0$。

(3) V 有唯一极值点 z^*，且在 z^* 处取最小值。由此可见，V 在 $x_i>0, y_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 内是具有无穷大性质的李雅普诺夫函数(其中 c_i^* 为(9)的解，表示如(10)，c_i 为后面待定的正常数)。

V 沿着方程组(1)对 t 的全导数为：

$$\begin{aligned}\dot V|_{(1)}&=\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{\dot x_i}{x_i}(x_i-x_i^*)+\sum_{i=1}^{n}c_i^*\frac{\dot y_i}{y_i}(y_i-y_i^*)\\&=-\sum_{i=1}^{n}c_ia_{i,i}(x_i-x_i^*)^2-\sum_{i=1}^{n}a_{i+n,i+n}c_i^*(y_i-y_i^*)^2\\&\quad-\sum_{i=1}^{n}c_ia_{i,i+n}(x_i-x_i^*)(y_i-y_i^*)+\sum_{i=1}^{n}c_i^*a_{i+n,i}(x_i-x_i^*)(y_i-y_i^*)\\&\quad-\sum_{i=2}^{n}c_i^*(y_i-y_i^*)\sum_{j=1}^{i-1}a_{i+n,j+n}(y_j-y_j^*)+\sum_{i=1}^{n-1}c_i^*(y_i-y_i^*)\sum_{j=i+1}^{n}a_{i+n,n+j}(y_j-y_j^*)\end{aligned}$$

选取 $c_ia_{i,i+n}=a_{i+n,i}c_i^*(i=1,2,\cdots,n)$，并由引理1得到

$$\begin{aligned}\dot V|_{(1)}=&-\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i-x_i^*)^2-\sum_{i=1}^{n}c_i^*(y_i-y_i^*)^2\\&+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(c_i^*a_{i+n,n+j}-c_j^*a_{j+n,i+n})(y_i-y_i^*)(y_j-y_j^*)\end{aligned} \tag{13}$$

在定理的条件下，按照引理2选取 c_i^* 得到

$$\dot V|_{(1)}=-\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i-x_i^*)^2-\sum_{i=1}^{n}c_i^*(y_i-y_i^*)^2\leqslant 0 \tag{14}$$

且 $\dot V=0$ 除 z^* 外不含方程组(1)的任何整条轨线，并由定理1知任何正 Cauchy 问题的解是有界的，由文献[12]知 z^* 在 $x_i>0, y_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 内是全局稳定的，证毕。

为清楚起见，具体写出当 $n=3$ 时，方程组(1)为如下的六阶非线性方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1(a_{1,0}-a_{1,1}x_1-a_{1,4}y_1)\\\dfrac{dx_2}{dt}=x_2(a_{2,0}-a_{2,2}x_2-a_{2,5}y_2)\\\dfrac{dx_3}{dt}=x_3(a_{3,0}-a_{3,3}x_3-a_{3,6}y_3)\\\dfrac{dy_1}{dt}=y_1(-a_{4,0}+a_{4,1}x_1-a_{4,4}y_1+a_{4,5}y_2+a_{4,6}y_3)\\\dfrac{dy_2}{dt}=y_2(-a_{5,0}+a_{5,2}x_2-a_{5,4}y_1-a_{5,5}y_2+a_{5,6}y_3)\\\dfrac{dy_3}{dt}=y_3(-a_{6,0}+a_{6,3}x_3-a_{6,4}y_1-a_{6,5}y_2-a_{6,6}y_3)\end{cases} \tag{15}$$

推论1 当 $n=3$ 时，微分方程(1)，即(15)若有唯一的正平衡点 $z^*=(x_1^*,x_2^*,x_3^*,y_1^*,$

y_2^*, y_3^*)，并且(15)的系数满足条件(应用条件(11))：

$$a_{5,4}a_{4,5}a_{5,6} = a_{5,5}a_{5,4}a_{4,6} \tag{16}$$

则 z^* 是全局渐近稳定的。

推论 2　当 $n=4$ 时，微分方程组(1)有唯一正平衡点 z^*，并且满足以下条件(应用条件(11))

$$a_{8,5}a_{5,6}a_{6,8} = a_{8,6}a_{6,5}a_{5,8};$$
$$a_{8,5}a_{5,7}a_{7,8} = a_{8,7}a_{7,5}a_{5,8};$$
$$a_{8,8}a_{7,8}a_{6,7} = a_{8,7}a_{7,6}a_{5,8}.$$

则 z^* 是全局渐近稳定的。

从以上推论可以看出，当 $n=3$ 时，所得到的补充条件与文[3]中所得到的条件是完全一样的。但当 $n>3$ 时，本文得到的条件更为简单。不难验证，这些条件与在[3]中的条件是等价的，不过，这里得到的条件其生态意义更清楚，即只需要沿着 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的任何3个种群 $y_i, y_j, y_k(i\neq j\neq k, i,j,k=1,2,\cdots,n)$ 构成的三角形非顺环上捕食系数与消化系数之间保持一定的平衡，就是保证整个生态系统是全局稳定的。

参 考 文 献

1 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法. 北京：科学出版社，1988

2 Goh B. S. ,Global Stability in Many-Species Systems. The American Naturalist, 1977, 111

3 陈均平，张洪德，陈兰荪. 两类 Volterra 模型的全局稳定性. 生物数学学报，1986，1(1)：60～63

4 张洪德，陈均平. 具线性密度制约的2n阶捕食系统的稳定性. 南充师院学报，1986，7(1)

5 王寿松. 昆虫与天敌系统的稳定性. 生物数学学报，1986，1(1)：37～45

6 Л. О. Логофет, Исследование системы n-ПАР《хищник—жертва》, связанных по конкуренции, доклады Академии Наук СССР Т. 1975, 224：3, 229～231

7 Redheffer R, Zhou Zhiming. Global Asymptotic Stability for a class of Manyvariable Volterra Prey-predator Systems. J. Nonlinear Amal. Theor. Math. Appl. 1981, 5(12)：1303～1309

8 代国仁，陈兰荪. 一个多资源食物链系统的有界性和稳定性. 应用数学学报，1988，11(2)：253～256

9 康纪权，代国仁. 也论有线性密度制约的2n阶捕食系统的稳定性. 四川师院学报，1989，10(1)：69～75

10 刘天一. 一类多种群猎物—捕食者生态系统的稳定性. 应用数学学报，1987，10(4)：498～503

11 陆征一. 关于六维 Lotka-Volterra 捕食被捕食链型系统的 Lasalle 不变集. 四川大学学报，1988，25(2)：145～150

12 秦元勋，王慕秋，王联. 运动稳定性理论与应用. 北京：科学出版社，1981