一类泛函的临界点的存在性定理*

THE EXISTENCE THEOREMS FOR CRITICAL POINTS OF A CLASS OF FUNCTIONALS

张兴友 朱继生
Zhang Xinyou Zhu Jisheng
(重庆大学系统工程及应用数学系)

摘 要 基于逼近理论的思想，我们对无穷维实 Hilbert 空间上一类泛函引入了一种序列指标(或简称 S-指标)，并对它在泛函的多重临界点问题中的应用作了讨论，从而在理论上为直接处理无穷维 Hilbert 空间上一类泛函的临界点问题提供了一种新工具。

关键词 临界点；逼近；Morse 指标

中国图书资料分类法分类号 O177.91

ABSTRACT Based on the notion of approximation, a kind of sequence index (or, for simplicity, S-index) for a class of functionals on an infinite dimensional real Hilbert space is defined, and its significance in the critical point theory is investigated. Hence the S-index as a new theoretical tool to deal with the critical point problems for a class of functionals on the infinite dimensional Hilbert space is introduced.

KEY WORDS critical point; approximation; Morse index

0 引言和记号说明

临界点理论是相当活跃的数学研究领域，诸如 Morse 理论和各种极小极大定理在最近十多年都有了巨大的发展。例如，最近文[4]对无穷维实 Hilbert 空间上满足 $f'(x) = Ax + k(x)$（其中 A 为有界自伴算子，$k(x)$ 为非线性紧映射）的泛函 f 引入一种指标，并对它在 $f(x)$ 的临界点问题方面的应用作了一些讨论。

本文基于逼近理论的思想，对无穷维 Hilbert 空间上一类较广泛的泛函 f（即只要求 $f'(x)$ 是PF映射）直接定义了一种序列指标（或简称 S－指标），并对这种指标在讨论 f 的临界点问题方面的应用作了一定的研究，从而在理论上为直接处理无穷维 Hilbert 空间上这类泛函的临界点问题提供了一种新工具。

设 A 是 $n\times n$ 实对称阵，同时也用它表示其相应的 $R^n \to R^n$ 的线性变换。本文中恒用 $M^-(A)$ 表示 A 的负特征值个数（包括重数在内），$M^0(A) = dimKerA$，$M^+(A)$ 为 A 的正特征值个数（包括重数在内）。用记号 (a_n) 表示无穷序列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$，CL$(D)$ 表示集合 D 的闭

* 收文日期 1990-07-06

包。

1 定义和主要结论

设 X 是无穷维实可分 Hilbert 空间，设其子空间序列 (X_n) 是 X 的一个滤结构(filtration)，即 $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \cdots$ 是 X 的一列维数逐渐递增的线性子空间，且 $CL(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = X$. 为方便计，我们不妨令 $\dim X_n = n$. 设 $P_n: X \to z_n$ 是正交投影算子。

1.1 定义

1.1.1 定义1[5]

设 (z_n) 是 X 中一无穷序列，(z_{n_k}) 为其子列，如果 $\exists\, z \in X$ 使得

$$\|z_{n_k} - z\| - d(z_{n_k}, X_{n_k}) \to 0 (当\ k \to \infty)$$

则称 (z_{n_k}) 与 z 相伴(associated)，记为 $(z_{n_k}) \vdash z$.

1.1.2 定义2[5]

称 X 中序列 (z_n) 为 PF 序列，是指对 (z_n) 的任意子序列 (z_{n_k})，条件 $(P_{n_k} z_{n_k}) \vdash z$ 都蕴涵了 z 是 (z_{n_k}) 的一个聚点。

容易证明定义 2 与下面定义 2′ 等价：

定义 2′：称 X 中序列 (z_n) 是 PF 序列，如果 $P_{n_k} z_{n_k} \to z$ 蕴含了 z 是 (z_{n_k}) 的一个聚点。

1.1.3 定义3[5]

设 $D \subset X$ 为 X 的子集，$g: D \to D$ 是连续映射，且 $D \subset CL(\bigcup_{n=1}^{\infty}(D \cap X_n))$. 称 g 是一个 PF 映射，如果 $\forall\ y_n \in D \cap X_n, n \in N, (g(y_n))$ 都是一个 PF 序列。

设 $f \in C^1(X,R)$，则因 X 是 Hilbert 空间，由 Riesz 表示定理知可以把 f' 看作 X 到自身的映射。记 $f_n = f|X_n$，则显然有

$$f'_n(x) = P_n f'(x), \quad x \in X_n$$

且 $f'_n: X_n \to Z_n$ 连续。

1.1.4 定义4[1]

设 $f_n \in C^1(z_n, R)$. 称 f_n 是渐近二次的，如果 $\exists\ n \times n$ 实对称阵 ${}^nA_\infty$ 使

$$|f'_n(x) - {}^nA_\infty x|/|x| \to 0 (当\ |x| \to \infty) \tag{1}$$

称 f_n 在 ∞ 处非共振是指 $M^0({}^nA_\infty) = 0$.

下面假设存在 $n \times n$ 实对称阵 ${}^nA_0$ 使得

$$|f'_n(x) - {}^nA_0 x|/|x| \to 0 (当\ |x| \to 0) \tag{2}$$

1.1.5 定义5

称 $f \in C^1(X,R)$ 在 ∞ 处 B — 非共振，是指当 n 充分大时有 $M^0({}^nA_\infty) = 0$. 若已知 0 是 f 的临界点，称 0 是 B — 非退化临界点是指当 n 充分大时 $M^0({}^nA_0) = 0$.

显然，对任意自然数 n，$M^-({}^nA_0)$、$M^-({}^nA_\infty)$ 和 $M^0({}^nA_0)$、$M^0({}^nA_\infty)$ 都有明确定义。

下面我们定义引言中所说的 S — 指标。

1.1.6 定义6

设 $f \in C^1(X,R)$ 使得 $f'_n(x) = P_n f'(x), x \in X_n$，满足(1)，(2)，则我们可以定义序列指标如下：

$$S^-(f,\infty)=(M^-({}^1A_\infty),M^-({}^2A_\infty),M^-({}^3A_\infty),\cdots);$$

$$S^-(f,0)=(M^-({}^1A_0),M^-({}^2A_0),M^-({}^3A_0),\cdots);$$

$$S^0(f,\infty)=(M^0({}^1A_\infty),M^0({}^2A_\infty),M^0({}^3A_\infty),\cdots);$$

$$S^0(f,0)=(M^0({}^1A_0),M^0({}^2A_0),M^0({}^3A_0),\cdots);$$

定义了 S — 指标以后，我们规定这种指标的一些简单运算。

1.1.7 定义 7

设 $S=(s_n)$ 和 $S'=(s'_n)$ 是两个序列指标，称 S 与 S' 等价是指 $\exists\ n_0\in N$，当 $n\geqslant n_0$ 时 $s_n=s'_n$，记之为 $S\simeq S'$．设 $\tilde{S}=(\tilde{s}_n)$ 也是一个 S- 指标，称序列 $(s_n+\tilde{s}_n)$ 为它们的和，记为 $S+\tilde{S}$．同时用记号 $\langle S,S+\tilde{S}\rangle$ 表示如下的所有 S- 指标 $\Gamma=(\gamma_n)$ 组成的集合：

$$s_n\leqslant\gamma_n\leqslant s_n+\tilde{s}_n,\forall\ n\in N.$$

用 $L=(l_n)\in\langle S,S+\tilde{S}\rangle$ 表示 $\langle S,S+\tilde{S}\rangle$ 中有一个序列与 L 等价。

显然上述概念全是良定义的(will-defined)。

1.2 主要结论

1.2.1 定理 1

设 $f\in C^1(X,R)$ 使得 $f':X\to X$ 是连续闭 PF 映射，且 $f'_n(x)=P_nf'(x)$ 满足(1)，如果 $S^0(f,\infty)\simeq(0)$，这里(0)表示该序列全是 0 元，则 f 至少有一个临界点。

当已知 0 是 f 的 B- 非退化临界点，即 $S^0(f,0)\simeq(0)$，我们有

1.2.2 定理 2

设 $f\in C^1(X,R)$ 使得 $f':X\to X$ 是连续闭 PF 映射，且 $f'_n(x)=P_nf'(x)$ 满足(1)、(2)，如果 $S^0(f,\infty)\simeq S^0(f,0)\simeq(0)$，$S^-(f,\infty)\not\simeq S^-(f,0)$ 且 $\exists\ \gamma>0$，当 n 充分大时有 $|f'_n(x)-{}^nA_0x|<\frac{1}{2}|{}^nA_0^{-1}|^{-1}\cdot|x|$(当 $|x|<\gamma$)，则 f 至少有一个非平凡临界点。

当 $S^0(f,0)\not\simeq(0)$，即 0 不是 f 的 B — 非退化临界点时，我们有：

1.2.3 定理 3

设 $f\in C^2(X,R)$ 使得 $f':X\to X$ 是闭 PF 映射且 $f'_n(x)$ 满足(1)、(2)，若 $S^0(f,\infty)\simeq(0)$，$S^-(f,\infty)\notin\langle S^-(f,0),S^-(f,0)+S^0(f,0)\rangle$，且存在 $\gamma>0$，使当 n 充分大时

$$|f'_n(x)-{}^nA_0|<\frac{1}{2}|{}^nA^*|^{-1},\quad |x|<2\gamma,$$

这里 ${}^nA^*=({}^nA_0|\mathrm{Rang}({}^nA_0))^{-1}$，则 f 至少有一个非平凡临界点。

2 定理的证明

为证这几个定理，我们需要几个引理。为后面说明方便，我们将之叙述为我们所需的形式：

2.1 引理1[5]

设 $g:D\subset X\to X$ 是连续闭 PF 映射，$P_n:X\to X_n$ 为正交投影，则 $0\in g(D)$ 等价于

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=0,\ 其中\ x_{n_k}\in P_{n_k}g(X_{n_k}\cap D)$$

2.2 引理2[1]

设 $f_n\in C^1(X_n,R)$ 是渐近二次的，在 ∞ 处非共振，则 f_n 至少有一个临界点。

2.3 定理1的证明

因 $f'_n = P_n f'|_{X_n}$ 满足(1)，即 $f_n: X_n \to X_n$ 是 C^1 的渐近二次型。由 $S^0(f,\infty) \simeq (0)$ 知∃ $n_0 \in N$ 使得 $n \geqslant n_0$ 时 $M^0({}^nA_\infty) = 0$，即 f_n 在 ∞ 处非共振。由引理2知 f_n 至少有一临界点，即 $0 \in f_n(X_n) \triangleq \{f'_n(x); x \in X_n\}$，当 $n \geqslant n_0$ 时、而由定理假设知 f' 是闭PF映射，点列(0)的聚点显然还是0点，因此由引理1知 $0 \in f'(X)$。证毕。

为证定理2和定理3，尚需如下引理：

2.4 引理3[4]：

设 $f_n \in C^1(X_n, R)$ 使得 f_n 满足(1)、(2)，若 $M^0({}^nA_0) = M^0({}^nA_\infty) = 0$，且 $M^-({}^nA_0) \neq M^-({}^nA_\infty)$，则 f_n 至少有一个非平凡临界点，且若对 $r > 0$ 有

$$|f'_n(x) - {}^nA_0 x| < \frac{1}{2}|{}^nA_0^{-1}| \cdot |x|, \quad |x| < r \tag{3}$$

则在 $B_r^n = \{x \in X_n \mid |x| < r\}$ 之外有临界点。

2.5 引理4[4]

设 $f_n \in C^2(X_n, R)$ 使得 f_n 满足(1)，(2)，若 $M^0({}^nA_\infty) = 0, M^-({}^nA_\infty) \notin \langle M^-({}^nA_0), M^-({}^nA_0) + M^0({}^nA_0)\rangle$，则 f 至少有一个非平凡临界点。且若对 $r > 0$ 有

$$|f''_n(x) - {}^nA_0| < \frac{1}{2}|{}^nA^*|^{-1}, \quad |x| < 2r \tag{4}$$

这里 ${}^nA^* = ({}^nA_0 | \mathrm{Rang}({}^nA_0))^{-1}$，则 f_n 至少有一个临界点在 B_r^n 之外。

2.6 定理2的证明：

由假设知∃ $n_0 \in N$，当 $n \geqslant n_0$ 时，$M^0({}^nA_\infty) = M^0({}^nA_0) = 0$，且存在子列 (n_k) 和 $k_0 \in N$，使当 $k > k_0$ 时有 $M^-({}^{n_k}A_0) \neq M^-({}^{n_k}A_\infty)$，于是由引理3知 f_{n_k} 至少有一个非平凡临界点，同时 f'_{n_k} 满足(3)，因此 $0 \in f_{n_k}(X_{n_k} \backslash B_r^{n_k})$，再由引理1知 $0 \in f'(X \backslash B_r)$，这里 $B_r = \{x \in X \mid |x| < r\}$，即 f 在球 B_r 之外至少有一个临界点。证毕。

2.7 定理3的证明：

由引理4和引理1，采用和定理2完全一样的方法即可，故略去。

3 一点说明

我们可以证明(或见[7])：若 $f'(x) = Ax + K(x)$，其中 A 为有界自伴算子，$K(x)$ 为(非线性)紧连续算子，A 闭值域，0不是 A 的本质谱点，f 是渐近二次的，A_∞ 具有有界逆，则 f' 是闭映射，且对于任何关于 A 的逼近格式有 f' 是PF映射。因此从某种意义上说，我们这里的结果是对[4]的改进，但我们这里的结果并不单纯是[4]的推广，因为即使考虑 $f'(x) = Ax + K(x)$ 的情形，我们这里的指标也和[4]中指标不同。

我们这里建立起来的 S — 指标理论，同样可以用来处理渐近线性 Hamilton 系统的周期解问题，详细讨论请见[8]。

致谢：张四清博士对本文第一作者给予了很大的帮助，在此表示衷心的感谢！

参 考 文 献

1 Amann H, Zehnder E. Nontrivial Solutions for a class of nonresonance problems and applications to nonlinear differential equations. Ann Scuola Norm Sup. Pisa; 1980, 8(4); 35～97

2 Chang K C. Solutions of asymptotically linear operator equations via Morse theory. Comm Pure Appl Math, 1981, (34); 693～712

3 Lazer A C, Solimini S. Nontrivial Solutions of operator equations and Morse indices of critical points of min-max type. Nonlinear Anal TMA, 1988, 12(8); 761～775

4 Li Shujie, Liu J Q. Morse theory and asymptotically Hamiltonian System. J Differential Equations, 1989, (78); 53～73

5 Kryszewski W, Przeragzki B, Werenski s. Remarks on approximetion methods in degree theory. Tran AMS, 1989, 316(1); 97～114

6 张恭庆. 临界点理论及其应用. 上海: 上海科学技术出版社, 1986

7 朱继生. 关于拓扑度理论中逼近方法的一个注记. 南京: 全国第五届泛函分析会议资料. 1990, 11

8 张兴友. 重庆大学硕士论文. 1991, 4