

钟表齿轮滚刀齿形设计及其代用圆弧

THE TOOTH FORM DESIGN OF CLOCK AND WATCH GEAR HOB AND ITS SUBSTITUTING CIRCULAR ARC

李文贵 邓兴奕

Li Wengui Deng Xingyi

(重庆大学机械工程一系)

摘要 本文根据齿轮啮合原理,用矢量计算方法推出了钟表齿轮滚刀齿形设计的计算公式;详细讨论了满足误差控制要求的滚刀齿形代用圆弧的确定方法;并给出了在苹果-Ⅱ计算机上算出的例子。

关键词 齿形;齿形误差/曲率;代用圆弧

中国图书资料分类法分类号 TG721

ABSTRACT Basing on the principles of gear mesh, we infer the numerical formula of tooth form design for the clock and watch gear hob by vector analysis, study the fixed method of substituting circular arc for the hob tooth form, which satisfies the demand for error-controlling, and give out an example which is numerated, on apple-Ⅱ computer.

KEY WORDS tooth form; tooth profile error / curvature; substituting circular arc

本文拟用矢量计算法和迭代法进行钟表齿轮滚刀的齿形设计并优化其代用圆弧。

1 钟表齿轮滚刀的齿形设计

因钟表齿轮滚刀的螺旋升角很小,通常就以和钟表齿轮相啮合的齿条齿形作为滚刀的法向齿形。因而,滚刀齿形设计就是求与钟表齿轮相啮合的齿条齿形。

1.1 工件与刀具齿形的坐标系(如图1)

\sum_1 —— $O_1x_1y_1z_1$: 为与工件固连的坐标系。 z_1 轴为工件回转轴线, y_1 轴为轮齿的对称轴线。

\sum_2 —— $O_2x_2y_2z_2$: 为与刀具齿条固连的坐标系。 x_2 轴与刀具节线重合;在原始位置原点与节点P重合, y_2 轴与 y_1 轴重合。

\sum_0 —— $Px_0y_0z_0$: 为空间固定坐标系,原点为节点, x_0 轴与刀具节线重合。

1.2 在 \sum_1 坐标系中钟表齿轮齿形方程

* 收文日期 1990-11-30

1.2.1 \widehat{AB} 圆弧投齿形

设 \widehat{AB} 圆弧段上任意点 M 的径矢为 \vec{R}_{11} ：

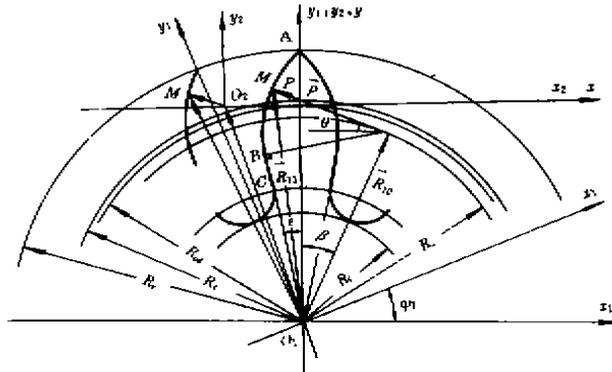


图 1

$$\vec{R}_{11} = \vec{R}_{10} + \vec{\rho} \tag{1}$$

式中 \vec{R}_{10} ——齿形圆弧中心的径矢；

$$\vec{R}_{10} = (R_2 \sin \beta, R_2 \cos \beta, 0),$$

R_2 ——齿形的中心圆半径，

$$\beta = \arccos \frac{R_f^2 + R_2^2 - \rho^2}{2R_f R_2} - \frac{K_e \cdot \tau}{2}$$

式中： R_f 、 ρ 、 K_e 分别为齿轮分圆半径、齿形圆弧半径、决定齿厚的系数；而 $\tau = 2\pi/z$ ，为齿间角， z 为齿轮齿数。

用 $\vec{\rho}$ 代表以 θ 为参变量的动点 M 的半径矢量：

$$\vec{\rho} = \{-\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0\}$$

由以上可知， \widehat{AB} 段上动点 M 的径矢 \vec{R}_{11} 是参变量 θ 的函数，则(1)式可记为

$$\vec{R}_{11} = \vec{R}_{11}(\theta)$$

如图2所示，上式中 θ 的取值范围为 $[\theta_1, \theta_2]$ ，

$$\theta_1 = \arccos \frac{R_2^2 + \rho^2 - R_f^2}{2R_2 \rho} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

$$\theta_2 = \arccos \frac{\rho}{R_2} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

1.2.2 齿腰直线方程

设齿腰直线 \overline{BC} 上任意点的径矢为 \vec{R}_{12} ，则：

$$\vec{R}_{12} = \{-y_{12} \operatorname{tg} \varepsilon, y_{12}, 0\} \tag{2}$$

参变量 y_{12} 的变化范围为 (y_{1B}, y_{1C}) ；其中：

$$y_{1C} = (R_1 + \rho') \operatorname{cose}' \operatorname{cose}$$

式中： R_1 、 ρ' 、 ε' 分别为齿轮齿根圆半径、齿轮齿槽底圆弧半径、齿槽半角。

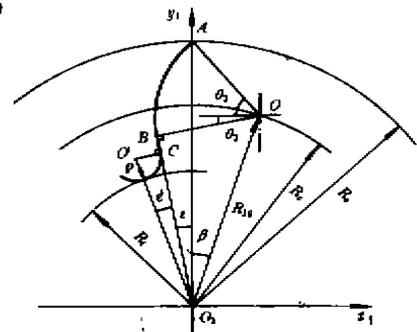


图 2

1.3 钟表齿形上任意点的法矢

齿形 \widehat{AB} 圆弧段上任意点的法矢 \vec{N}_{11} 及单位法矢 \vec{n}_{11} 为:

$$\vec{N}_{11} = \{-\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, 0\} \tag{3a}$$

$$\vec{n}_{11} = \vec{N}_{11}/|\vec{N}_{11}| = \{-\cos\theta, \sin\theta, 0\} \tag{3b}$$

齿腰 \overline{BC} 直线段上任意点的法矢 \vec{N}_{12} 及单位法矢 \vec{n}_{12} 为:

$$\vec{N}_{12} = \{-\rho \cos\theta_2, \rho \sin\theta_2, 0\} \tag{4a}$$

$$\vec{n}_{12} = \{-\cos\theta_2, \sin\theta_2, 0\} \tag{4b}$$

注意:这里 θ_2 应为定值。

1.4 齿形啮合点的相对速度 \vec{V}_{12}

如图3,设工件齿形上任意点 M 在齿轮逆时针转过 φ_1 角时处于啮合位置,其啮合点的相对运动速度为 \vec{V}_{12} :

$$\vec{V}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \tag{5}$$

其中: $\vec{V}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{R}_{11}$ (对齿形 \widehat{AB} 圆弧段)

或 $\vec{V}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{R}_{12}$ (对齿形 \overline{BC} 直线段)

式中: $\vec{\omega}_1$ 为工件角速度矢量,令 $\vec{\omega}_1 = \{0, 0, 1\}$ 仍不失其普遍性。

$$\vec{V}_2 = M_{21} \begin{bmatrix} -R_{od} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中: R_{od} 为工件的滚动圆半径;而 M_{21} 为由 \sum_2 到 \sum_1 的座标变换矩阵:

$$M_{21} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 0 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则:

$$\vec{V}_2 = \{-R_{od} \cos\varphi_1, R_{od} \sin\varphi_1, 0\}$$

由上可知,只要工件齿形上的点(由 θ 确定)及该点的啮合位置 φ_1 确定之后,就可由(5)式计算该点啮合时的相对运动速度 \vec{V}_{12} 。

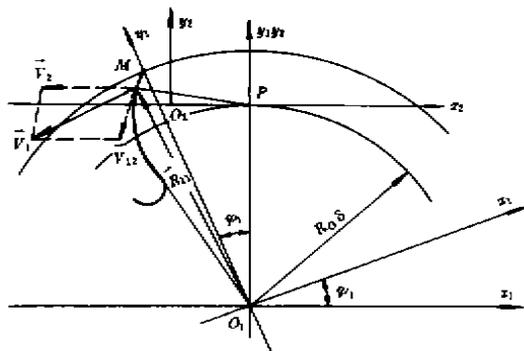


图 3

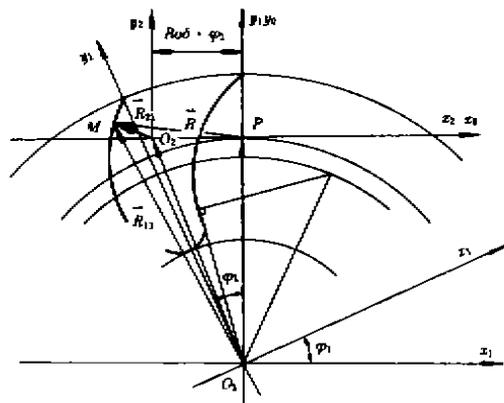


图 4

1.5 啮合方程及其求解

为确定工件齿形上给定的啮合位置 φ_1 ，需建立啮合方程。由齿形啮合基本定理，工件与刀具齿形在啮合点必须满足条件：

$$\vec{r} \cdot \vec{r}_{12} = 0 \quad (6a)$$

对于齿形 \widehat{AB} 圆弧段， \vec{r} 用 \vec{r}_{11} 代替；对于齿腰 \overline{BC} 直线段， \vec{r} 用 \vec{r}_{12} 代替。由于 \vec{r} 是 θ 的函数， \vec{r}_{12} 是 θ 和 φ_1 的函数，(6a) 式可记为：

$$F(\theta, \varphi_1) = 0 \quad (6b)$$

或

$$F(\theta, y_{12}) = 0 \quad (6c)$$

由(6a)式，可用迭代法求出齿形上给定点(由 θ 或 y_{12} 确定)的相应啮合位置 φ_1 之值。解啮合方程时，采用以增量代微分的牛顿——雷扶生法，避免对超越方程求导等繁杂的推导过程，直接进行方程的数值解。

1.6 啮合线方程及刀具齿形方程

工件齿形上处于啮合位置的点在固定坐标系 Σ_0 中的轨迹是啮合线，而该点在运动着的刀具坐标系 Σ_2 中的轨迹就是刀具齿形。如图4，啮合点 M 在 Σ_0 中的径矢为 \vec{R} ，在 Σ_2 中的径矢为 \vec{R}_{21} (或 \vec{R}_{22})， \vec{R} 及 \vec{R}_{21} 端点分别在 Σ_0 及 Σ_2 中描绘出了啮合线及刀具齿形。因而啮合线方程为：

$$\begin{cases} \vec{R} = M_{10}\vec{R}_{11} - O_1P & (\text{对齿形 } \widehat{AB} \text{ 圆弧段}) \\ \vec{R} = M_{10}\vec{R}_{12} - O_1P & (\text{对齿腰 } \overline{BC} \text{ 直线段}) \\ F(\theta, \varphi_1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中， $O_1P = \{0, R_{os}, 0\}$ ； M_{10} ——由 Σ_1 到 Σ_0 的坐标旋转变换矩阵：

$$M_{10} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

刀具齿形方程为：

$$\begin{cases} \vec{R}_{21} = M_{12}\vec{R}_{11} - O_1\vec{O}_2 & (\text{对齿形 } \widehat{AB} \text{ 圆弧段}) \\ \vec{R}_{22} = M_{12}\vec{R}_{12} - O_1\vec{O}_2 & (\text{对齿腰 } \overline{BC} \text{ 直线段}) \\ F(\theta, \varphi_1) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

式中： $O_1\vec{O}_2 = \{-R_{os}\varphi_1, R_{os}, 0\}$ ； $M_{12} = M_{10}$ 。

2 钟表齿轮滚动圆半径选择

按展成法设计钟表滚刀齿形时，工件滚动圆半径 R_{os} 选择得是否合适，将影响到工件齿根过渡曲线的高低、刀具齿顶是否变尖、甚至影响到刀齿齿廓是否存在，即工件齿形能否用展成法加工。

据文献[2]的推导，只有当 R_{os} 不小于中心圆半径 R_1 时，才有与齿轮共轭的刀具齿廓存在；要求滚刀齿根部分不产生奇点(曲率半径 ρ_2 为 0 的反折点)，则需 $R_{os} \geq \sqrt{R_1^2 + \frac{\rho^2}{27}}$ ；要求齿轮齿根不产生过渡曲线，则需 $R_{os} \leq \frac{(R_1 + \rho)^2 \cos^2 \alpha'}{R_1}$ 。

综合起来,滚动圆半径 R_{os} 取值方法如下:

$$1) \text{ 当 } \frac{(R_i + \rho_s)^2 \cos^2 \epsilon'}{R_i} \geq R_f \text{ 时, 取 } R_{os} = R_f.$$

式中: R_i ——齿轮根圆计算半径。按工厂的设计经验: $R_i = R_a - (\Delta R_r - \Delta R_e)/2.5$, 其中 ΔR_r 、 ΔR_e 分别为齿轮根圆和顶圆半径公差。

ρ_s ——齿轮齿槽圆弧 ρ' 的计算半径:

$$\rho_s = \frac{R_i \sin \epsilon'}{1 - \sin \epsilon'} \quad (9)$$

R_f ——齿轮分圆半径。

$$2) \text{ 若 } \sqrt{B_s^2 + \frac{\rho_s^2}{27}} < \frac{(R_i + \rho_s)^2 \cos^2 \epsilon'}{R_i} < R_f, \text{ 取 } R_{os} = \frac{(R_i + \rho_s)^2 \cos^2 \epsilon'}{R_i}.$$

3) 当 $\frac{(R_i + \rho_s)^2 \cos^2 \epsilon'}{R_i} < \sqrt{R_i^2 + \frac{\rho_s^2}{27}}$, 若采用展成法加工, 取 $R_{os} = R_{osmin} =$

$$\sqrt{R_i^2 + \frac{\rho_s^2}{27}}, \text{ 但必须校验滚刀齿顶宽。校验方}$$

法如图 5 所示: 在求出齿腰圆弧后, 再求出它与齿顶圆弧交点。注意: 滚刀齿顶圆弧与齿腰圆弧有时有两个交点, 取其下交点 M 。将 M 点的横坐标与 $L/2$ 比较 (L 为法向齿距); 若 M 点在刀具对称轴线右侧则不变尖, 在左侧则变尖。若 M 点处于对称轴线上, 根据工厂里实际经验, 按齿顶不变尖处理。只是此时虽满足了要求的滚刀齿顶高, 但刀具寿命会大大降低。

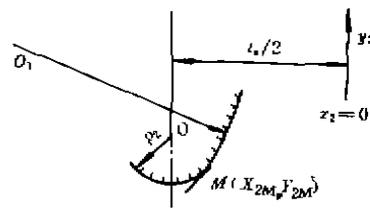


图 5

3 刀具齿形上的拐点及代用圆弧

为便于制造, 钟表齿轮滚刀的法向齿形都是用几段圆弧来代替的。为使代用圆弧与理论齿形之间的误差尽可能小, 我们若以滚刀齿形上的拐点作为代用圆弧的分界点 (钟表滚刀齿形上拐点两侧齿形凹凸相反), 就可大大提高滚刀齿形的精度。

3.1 滚刀齿形上拐点的求法

只要确定出滚刀齿形上各点的曲率半径, 转换成曲率, 则曲率 $k_2=0$ 的点即为拐点。现用平面啮合的欧拉——萨瓦里公式来计算:

$$\frac{1}{\rho_1 - r} + \frac{1}{\rho_2 + r} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \frac{1}{\sin \alpha} \quad (10)$$

式中: ρ_1 、 ρ_2 分别为啮合点处工件齿形、刀具齿形的曲率半径; r_1 为工件节圆半径, $r_1 = R_{os}$; r_2 为刀具齿形节圆半径, 对齿条形刀具, $r_2 = \infty$; r 为啮合点到节点 P 的距离, 由 (7) 式: $r = |R|$; α 为啮合角, 如图 8 所示: $\sin \alpha = y/r$ 。

按以上条件, (10) 式简化为:

$$\frac{1}{\rho_1 - r} + \frac{1}{\rho_2 + r} = \frac{1}{R_{os} \sin \alpha} \quad (11)$$

(1) 对于齿形 \widehat{AB} 圆弧段: 因 $\rho_1 = \rho$ (齿轮齿形圆弧半径), 根据实际计算情况, 滚刀齿根齿形上各点的曲率半径按下式取值:

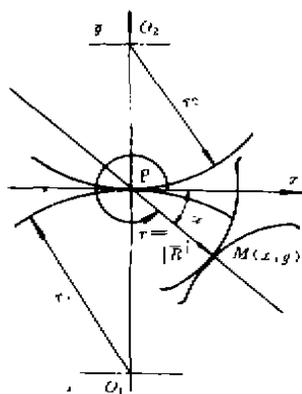


图 6

$$\begin{cases} y = 0 \text{ 时, } \rho_2 = -\rho \\ y > 0 \text{ 时, } \rho_2 = 1 / \left(\frac{1}{R_{\text{os}} \sin \alpha} - \frac{1}{\rho - r} \right) - r \\ y < 0 \text{ 时, } \rho_2 = 1 / \left(\frac{1}{R_{\text{os}} \sin \alpha} - \frac{1}{\rho + r} \right) + r \end{cases} \quad (12)$$

(2) 对于齿腰 \widehat{BC} 直线段: 因 $\rho_1 = \infty$, (11)式简化为 $\frac{1}{\rho_2 + r} = \frac{1}{R_{\text{os}} \sin \alpha}$, 则滚刀齿腰部分各点的曲率半径按下式取值:

$$\begin{cases} y = 0 \text{ 时, } \rho_2 = -r \\ y > 0 \text{ 时, } \rho_2 = R_{\text{os}} \sin \alpha - r \\ y < 0 \text{ 时, } \rho_2 = R_{\text{os}} \sin \alpha + r \end{cases} \quad (13)$$

以上计算中, $r \neq 0$ (即所选啮合点不要在节点上)。若算出的 $\rho_2 < 0$, 滚刀齿廓为凹齿廓; 若 $\rho_2 > 0$, 为凸齿廓。

计算滚刀齿形时, 先在工件齿形上选取 n 个计算点(由 $\theta(i)$ 确定, $i = 1 \sim n$), 计算相应的 $\bar{R}_{11}(i)$ 及 $\bar{R}_{12}(i)$, 再按(7)、(8)式计算啮合线、刀具齿形上相应的离散点 $\bar{R}(i)$ 及 $\bar{R}_{21}(i)$ 、 $\bar{R}_{22}(i)$ 。并由(12)、(13)式确定的滚刀齿形上各点的曲率半径 $\rho_2(i)$ 之值, 计算出相应点的曲率 $k_2(i)$, 从 $i = 1 \sim n$ 连续判别 $k_2(i)$ 的符号。若在某一点发生 $k_2(K)$ 反号, 则在 $(K-1)$ 点与 K 点之间存在着拐点。此时以 θ 为自变量, $\theta(K)$ 为初值, 以 $k_2 = 0$ 为条件, 迭代求解拐点处的参变量 $\theta^*(K)$ 之值。实际程序中, 采用了二分迭代办法进行逼近, 并规定迭代求出的 $k_2 < 10^{-8}$, 以该值作为拐点处的曲率, 并反算出此时的 $\theta^*(K)$, 再算出 $\bar{R}_{21}(K)$ 之值。

3.2 滚刀齿根代用圆弧

在设计时我们将滚刀拐点以上的部分定义为滚刀齿根部分。这部分齿形已由前面的齿形设计和拐点位置确定了 K 个离散点 $\bar{R}_{21}(i)$ ($i = 1 \sim K$)。钟表滚刀的这部分齿形一般可用一段圆弧来代替, 其误差可控制在 $0.5 \mu\text{m}$ (齿轮模数 $m \leq 0.2$)或 $1 \mu\text{m}$ ($m > 0.2$)以内。滚刀齿根代用圆弧半径 R_1 及中心坐标 (a, b_1) , 常用三点共圆法确定。即是选取 $\bar{R}_{21}(1)$ 、 $\bar{R}_{21}(K)$ 及另一动点 $\bar{R}_{21}(i)$, 当 i 由2到 $(K-1)$ 变动时, 由三点共圆法可确定 $(K-2)$ 个代用圆弧, 并分别求出它们的最大代用误差 $\Delta_{\text{max}}(i)$, 最后选取代用误差满足控制要求的一个圆弧来代替滚刀齿根理论齿形。实际程序中, 当 i 从2到 $(K-1)$ 依次变动时, 每确定一个 $\bar{R}_{21}(i)$ 值与 $\bar{R}_{21}(1)$ 、 $\bar{R}_{21}(K)$ 所作出的代用圆弧均与理论齿形比较, 求出其 $\Delta_{\text{max}}(i)$ 。只要它小于控制误差就不再往下算。因此实际迭代过程并非要求完 $(K-2)$ 个圆弧。

3.3 滚刀齿腰代用圆弧

滚刀齿腰部分的 $(n-K+1)$ 个离散点座标 $\bar{R}_{22}(i)$ ($i = K \sim n$), 已在齿形设计时确定。为使各段代用圆弧平滑连接并保证代用误差在控制范围之内, 滚刀齿腰往往需几段圆弧来逼近, 计算方法如下(参见图7):

(1) 求滚刀齿根代用圆弧 $\widehat{A'K}$ 在拐点 K 处的单位法矢 \bar{n}_k :

$$\vec{n}_k = \frac{\vec{R}_{21}(K) - \vec{R}_D}{|\vec{R}_{21}(K) - \vec{R}_D|}$$

式中: $\vec{R}_D = \{a_1, b_1, 0\}$

(2) 过 $\vec{R}_{21}(K)$ 、 $\vec{R}_{22}(z)$ ($z = n \sim K + 1$, 以步长 J 变动) 所确定的 K 及 K' 点, 作与滚刀齿根圆弧在 K 点相切的圆弧 $\widehat{K'K}$, 并按以下步骤求此代用圆弧半径 R_2 及圆心位置 \vec{R}_E :

$$\vec{K'K} = \vec{R}_{21}(K) - \vec{R}_{22}(z)$$

其单位矢量 $\vec{t} = \frac{\vec{K'K}}{|\vec{K'K}|}$ 。因 \vec{t} 、 \vec{n}_k 均为单位矢量, 其模为 1, 故:

$$\vec{n}_k \cdot \vec{t} = |\vec{n}_k| \cdot |\vec{t}| \cdot \cos\theta$$

则:

$$\cos\theta = \vec{n}_k \cdot \vec{t} = n_{kx} \cdot t_x + n_{ky} \cdot t_y + n_{kz} \cdot t_z$$

齿腰代用圆弧半径为:

$$R_2 = \frac{|\vec{K'K}|}{2\cos\theta} \quad (14)$$

齿腰代用圆弧中心 E 的径矢为:

$$\vec{R}_E = \vec{R}_{21}(K) + R_2 \vec{n}_k \quad (15)$$

(3) 确定代用圆弧 $\widehat{K'K}$ 与理论齿形上各点的误差, 并判别其最大误差是否超过了允许值。若满足精度要求则 $\widehat{K'K}$ 即是滚刀齿腰的代用圆弧。否则以 $(-J)$ 为步长, 变动 K' 点的位置, 重新求其代用圆弧, 直到满足精度要求为止。

既要满足精度要求, 又要使代用圆弧平滑连接, 滚刀齿腰部分往往需两段以上的代用圆弧来逼近理论齿形。但如代用圆弧超过 4 段, 就使滚刀制造困难, 故应尽量减少代用圆弧段数。为达此要求, 在工厂实际设计过程中, 滚刀齿根和齿腰的代用圆弧在拐点 K 处并非一定要求相切, 只要求二代用圆弧在拐点处的切线夹角小于 3° 即可。如此, 滚刀齿形从齿根经拐点到齿腰, 并不会陡然变化, 但却可以使齿腰代用圆弧在满足精度要求时段数减少。其各段代用圆弧的计算方法仍按 (14)、(15) 式进行。

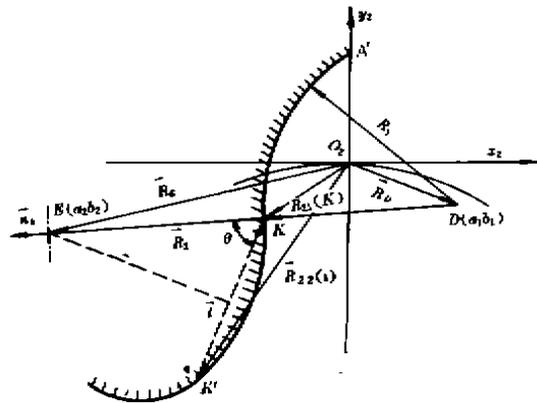


图 7

4 计算实例简介

以广州钟厂的一个(齿轴)齿轮为例。已知条件: $m = 0.36, z = 7, \Delta R_s = 0.04$, 齿根圆半径 $R_f = 0.663, \Delta R_r = 0.06$; 被动齿轮。

按本文所拟设计公式、设计方法和程序: 选取滚圆半径 $R_{os} = 1.26093299\text{mm}$, 对应齿轮齿顶圆弧 \widehat{AB} 段和齿腰直线 \widehat{BC} 段, 各取 30 个计算点, 故滚刀齿形有 60 个理论座标值。经计算

机反复迭代,求出代用圆弧结果如下:

加工 $m = 0.36, z = 7$ 的轴齿滚刀代用圆弧数值表

圆弧段 序号	计算点范围	名称	半径	圆心 x_k	座标 y_k	最大代用误差 数值	所在点位置
1	1 ~ 26	齿根代用圆弧	0.2533	0.0652	-0.0019	0.000281	第13点
2	26 ~ 28	齿腰代圆弧 I 段	0.0741	-0.262	0.00974	0.0000165	第27点
3	28 ~ 38	齿腰代圆弧 II 段	0.7797	-0.9601	0.1120	0.000807	第31点
4	38 ~ 60	齿腰代圆弧 III 段	1.4101	-1.5278	0.3863	0.000831	第53点
5		滚刀齿顶圆弧	0.25	-0.5659	-0.3479		

备注: ① 拐点 K 在 26 ~ 27 点间, $x_k = -0.1879, y_k = 0.00783, \rho_k = -10364.507$

② 齿腰与齿顶圆弧交点 M 在 57 ~ 58 点间, $x_M = -0.51227, y_M = -0.59211$ 顶宽 = 0.1073, 不变尖
所得结果与有关厂家按常规设计的滚刀相比,其精度高,代用圆弧段数少(有关厂家设计精度未给出,代用圆弧共 5 段)。滚刀法向齿形如图 8 所示,结构尺寸从略。

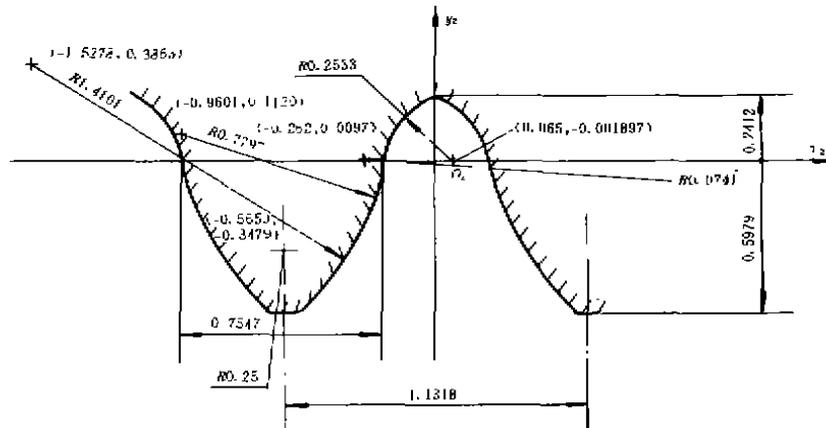


图 8 (比例50:1)

参 考 文 献

- 1 邓兴奕, 李文贵. 钟表齿轮滚刀齿形设计及其齿形上的奇点. 全国小模数齿轮学术讨论会论文, 1985
- 2 刘华明. 钟表齿轮滚刀滚动圆半径的确定. 钟表, 1978, (8)
- 3 欧阳志喜. 轴齿摆线滚刀齿形设计. 工具技术, 1985, (9)
- 4 吴序堂. 齿轮啮合原理. 机械工业出版社, 1982
- 5 四川省机械工业局. 复杂刀具设计手册. 下册, 机械工业出版社, 1979
- 6 张世英. 苹果Ⅱ及其 BASIC 程序设计. 北京大学出版社, 1985