

# 缺陷形状对金属板极限应变影响的研究

## A RESEARCH ON THE EFFECT OF A DEFECT SHAPE ON LIMIT STRAIN FOR SHEET METALS

汪凌云

Wang Linyun

(重庆大学冶金及材料工程系)

**摘要** 在研究板料的极限应变时,提出了一种新的初始几何缺陷模型——椭圆缺陷模型。用大变形弹塑性有限元法,按大变形 $J_2$ 塑性流动理论,大变形 $J_2$ 塑性变形理论分析了具有不同长短半轴椭圆缺陷模型,标准的 $M-K$ 缺陷模型,圆形缺陷模型对双向受拉金属板极限应变的影响。分析结果表明,椭圆缺陷对双向受拉金属板极限应变的影响与椭圆的长短半轴比及椭圆区板厚有关。根据圆形缺陷模型算出的极限应变值是上限,根据标准的 $M-K$ 缺陷模型算出的极限应变值是下限。圆形缺陷模型和标准的 $M-K$ 缺陷模型是椭圆缺陷模型的特殊情况。分析还表明,大变形 $J_2$ 塑性流动理论对缺陷比大变形 $J_2$ 塑性变形理论更敏感。分析时,假定双向受拉金属板处于平面应力状态,在弹性、塑性状态下都是体积不可压缩的。

**关键词** 椭圆缺陷模型; 极限应变; 大变形

中国图书资料分类法分类号 TG301

**ABSTRACT** A new initial geometric defect model——elliptic defect model for research on the limit strain of sheet metals is first presented. The effects of the elliptic defect models of various ratios of major axis to minor axis, the standard  $M-K$  defect model and the circular defect models on the limit strains for a biaxially-stretched sheet are studied with large-strain FEM, large strain versions of  $J_2$  flow theory and  $J_2$  deformation theory of plasticity. The results show that the effects of the elliptic defect on the limit strain for biaxially-stretched sheet metals are related to the ratio of major axis to minor axis of ellipse and the sheet thickness in elliptic region. The results also indicate that the circular defect model gives an upper bound to limit strain, while the standard  $M-K$  defect model gives a lower bound to limit strain, and that the circular defect model and the  $M-K$  defect model are special cases of the elliptical defect models. The study proves that the  $J_2$  flow theory of large strain plasticity is more sensitive to the shape of the defect than the  $J_2$  deformation theory of large strain plasticity. The material of the sheet is elastically and plastically incompressible if it is subject to plane stress state.

**KEY WORDS** elliptic defect model; limit strain; large deformation

## 0 引言

随着汽车、航空、造船、家电等工业迅速发展,金属板成形使用愈来愈广泛。在金属板成形中,人们自然希望它能承受更大的成形而不发生破坏。因此,予示金属板成形的塑性失稳,极限应变及其影响因素是个非常重要的问题,一直受到很大的关注。

就双向受拉金属板而言,最近的研究<sup>[1~3]</sup>表明,所予示的极限应变与本构关系、初始几何缺陷形状等许多因素有关。在缺陷形状对双向受拉金属板极限应变影响的理论分析中,一直沿用1967年Marcinick和Kuczynisk提出的长沟槽缺陷模型,即文献中常称的标准的M-K缺陷模型<sup>[4]</sup>,1984年Bate和Wilson提出了由许多紧密排列的圆所构成的圆形缺陷模型<sup>[5]</sup>。其实,标准的M-K缺陷模型,紧密排列的圆形缺陷模型都不一定是最接近真实缺陷形状的缺陷模型。本文提出了一种更接近真实形状,更普遍形式的缺陷模型——椭圆缺陷模型,并用大变形弹塑性有限元法,按大变形 $J_2$ 塑性流动理论,大变形 $J_2$ 塑性变形理论分别分析了不同长短半轴比的椭圆缺陷,标准的M-K缺陷,圆形缺陷对双向受拉金属板极限应变的影响,作出了相应的结论。由于本文提出的缺陷模型的合理性、真实性、所使用的分析方法(大变形弹塑性有限元法)的先进法,故所得结论更能反映实际情况。

## 1 基本方程

以物体变形前构形为参考构形,采用随动坐标, $g_{ij}$ , $G_{ij}$ 示变形前后度量张量, $u$ 示位移矢量,Lagrange应变率张量为

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_{ij} &= \frac{1}{2}(G_{ij} - g_{ij})' = \frac{1}{2}\dot{G}_{ij} \\ &= \frac{1}{2}[\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + u_{k,i}\dot{u}_{k,j} + \dot{u}_{k,i}u_{k,j}]\end{aligned}\quad (1)$$

式中记号“( )'”,“( )”示物质率,“( )”示相对于变形前度量的协变导数,根据[6],本构关系可表示为

$$\dot{\tau}^{ij} = L^{ijkl}\dot{\eta}_{kl}\quad (2)$$

式中 $\dot{\tau}^{ij}$ 是Kirchhoff应力 $\tau^{ij}$ 的物质率, $L^{ijkl}$ 是材料的瞬时模量,有

$$L^{ijkl} = L^{jikl} = L^{klij} = L^{lkji}\quad (3)$$

边值问题的控制方程,根据文献[7]为

$$\delta I = 0\quad (4)$$

$$I = \int_V \frac{1}{2}(L^{ijkl}\dot{\eta}_{ij}\dot{\eta}_{kl} + \tau^{ij}\dot{u}_{i,j}\dot{u}_{j,i})dV - \int_{S_r} \dot{T}^i\dot{u}_i ds\quad (5)$$

式中 $V$ 是变形前体积, $S_r$ 是变形前部分表面积, $\dot{T}^i$ 是 $S_r$ 上作用的已给定表面力率,瞬时模量 $L^{ijkl}$ 的值与本构关系有关。根据文献[8],对各向同性硬化 $J_2$ 塑性流动理论,在平面应力状态下为

$$\begin{aligned}L^{ijkl} &= \frac{2E}{3}\left[\frac{1}{2}(G^{ik}G^{jl} + G^{jk}G^{il} + 2G^{ij}G^{kl})\right] - \frac{1}{2}(G^{ik}\tau^{jl} \\ &+ G^{jk}\tau^{il} + G^{il}\tau^{jk} + G^{kl}\tau^{ij}) - A\frac{E - E_t}{\tau^2}\tau^{ij}\tau^{kl}\end{aligned}\quad (6)$$

式中  $i, j, k, l = 1, 2$ .  $E$  是 Young 氏模量,  $E_t$  是切线模量

$$\bar{\tau}^2 = \frac{2}{3} [G_{ii}G_{jj}\tau^{ij}\tau^{ij} - \frac{1}{3}(G_{ij}\tau^{ij})^2] \quad (7)$$

是等效 Kirchhoff 应力,  $\lambda$  是判断因子, 对各向同性  $J_2$  塑性流动理论而言

$$\lambda = \begin{cases} 1 & \text{若 } \dot{\tau}^{ij}\eta_{ij} > 0 \text{ 和 } \bar{\tau} = \bar{\tau}_{\max} \\ 0 & \text{若 } \dot{\tau}^{ij}\eta_{ij} \leq 0 \text{ 或 } \bar{\tau} < \bar{\tau}_{\max} \end{cases} \quad (8)$$

对  $J_2$  塑性变形理论而言, 当没有弹性卸载时, 用割线模量  $E_t$  代替(6)式中的 Young 氏模量  $E$ .

## 2 分析模型及有限元公式

采用 Descart 直角坐标, 设所分析双向受拉金属板尺寸为  $2l \times 2l$ , 在板面中央有一椭圆形初始几何缺陷(图 1), 其长短半轴比  $a/b$  为  $1 \sim 8$ , 板长与椭圆短半轴比  $l/b$  大于 10, 椭圆区  $x = 0$  处板厚为  $h_0$ ,  $x = b$  处板厚为  $h_b$ , 板厚不均性

$$\xi = (h_b - h_0)/h_b \geq 0 \quad (9)$$

极限应变定义为卸载前缺陷区以外的最大均匀应变. 设  $U_i^*$  是卸载前  $x = l$  处, 即板边部的均匀位移, 于是极限应变为

$$\epsilon_i^* = \ln(1 + U_i^*/l) \quad (10)$$

式中记号  $( )^*$  示缺陷以外的区域. 这个表达式相当于均匀区域应变的整体表达式, 局部应变可取为

$$\epsilon_i = \frac{1}{2} \ln(2\eta_i + 1) \quad (11)$$

式中  $\eta_i$  是 lagrange 应变的主分量, 由(10)式规定的极限应变与由(11)式规定的局部应变相比, 在均匀区内几乎没有什么误差. 在整个分析中, 认为双向受拉金属板处于平面应力状态, 认为其在弹性状态和塑性状态都是体积不可压缩的(这样, 就有  $v = \tau, \sigma = \tau, \bar{v} = \bar{\tau}, \sigma$  是 Cauchy 应力张量), 认为其单向应力——对数应变曲线为指数曲线.

$$\sigma = \begin{cases} E\epsilon & \text{若 } \sigma \leq \sigma_s \\ K\epsilon^N & \text{若 } \sigma \geq \sigma_s \end{cases} \quad (12)$$

式中  $\sigma_s$  是材料的 Cauchy 屈服应力,  $N$  是加工硬化指数,  $K$  是材料参数. 分析时,  $\sigma_s/E = 0.001, N = 0.22, K$  按  $\sigma = \sigma_s$  处的连续条件确定.

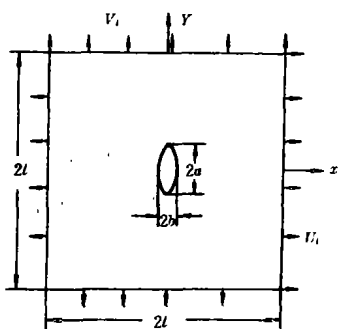


图 1 具有椭圆形缺陷的金属板

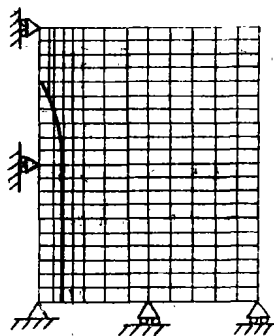


图 2 金属板的 1/4 离散模型

由于对称, 仅取板的四分之一(图 2) 进行分析, 采用四边形单元, 每四边形内又包含四个三角形, 每个三角形内设置 7 个 Gauss 积分点。若设结点位移率分量为  $\dot{U}, \dot{V}$  则对一个单元有

$$\{\dot{q}\}^T = [\dot{U}_1 \dot{V}_1 \dot{U}_2 \dot{V}_2 \dot{U}_3 \dot{V}_3] \quad (13)$$

$$\{\dot{\eta}\} = [A][G]\{\dot{q}\} \quad (14)$$

式中  $\dot{U}, \dot{V}$  的下标示三角形单元结点号,  $\{\dot{\eta}\}$  示 Lagrange 应变率列向量, 矩阵  $[A], [G]$  分别为

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 + \dot{U}_1 & 0 & \dot{V}_1 & 0 \\ 0 & \dot{U}_2 & 0 & 1 + \dot{V}_2 \\ \dot{U}_3 & 1 + \dot{U}_3 & 1 + \dot{V}_3 & \dot{V}_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[G] = \frac{1}{2A_0} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中  $2A_0 = (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)$ ,  $x, y$  的下标示  $\Delta$  单元结点号, 本构关系 (2) 的矩阵表达式为

$$\{\dot{\tau}\} = [L]\{\dot{\eta}\} \quad (17)$$

式中  $\{\dot{\tau}\}$  为 Kirchhoff 应力率列向量,  $[L]$  为

$$\left. \begin{aligned} l_{11} &= \frac{4E}{3} G^{11} G^{11} - 2G^{11} \tau^{11} - A \frac{E - E_t}{\bar{\tau}^2} \tau^{11} \tau^{11} \\ l_{12} &= \frac{2E}{3} (G^{12} G^{12} - G^{11} G^{22}) - 2G^{12} \tau^{12} - A \frac{E - E_t}{\bar{\tau}^2} \tau^{11} \tau^{22} \\ l_{13} &= \frac{4E}{3} G^{11} G^{22} - G^{11} \tau^{22} - G^{22} \tau^{11} - A \frac{E - E_t}{\bar{\tau}^2} \tau^{11} \tau^{22} \\ l_{22} &= \frac{4E}{3} G^{22} G^{22} - 2G^{22} \tau^{22} - A \frac{E - E_t}{\bar{\tau}^2} \tau^{22} \tau^{22} \\ l_{23} &= \frac{4E}{3} G^{12} G^{22} - G^{22} \tau^{12} - G^{12} \tau^{22} - A \frac{E - E_t}{\bar{\tau}^2} \tau^{12} \tau^{22} \\ l_{33} &= \frac{E}{3} (G^{12} G^{22} + 3G^{22} G^{22}) - \frac{1}{2} (G^{11} \tau^{22} + G^{22} \tau^{11} + 2G^{12} \tau^{12}) - A \frac{E - E_t}{\bar{\tau}^2} \tau^{12} \tau^{12} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

把 Hill 变分原理 (4) 应用于一个单元, 将 (13) ~ (18) 关于单元的量代入 (4) 式, 即可求出单元平衡方程, 按单元组装后可得整体平衡方程

$$[K]\{\dot{Q}\} = \{\dot{F}\} \quad (19)$$

式中  $[K]$  是整体刚度矩阵,  $\{\dot{Q}\}$  是结点位移率列向量  $\{\dot{F}\}$  是载荷率列向量

### 3 分析结果

在图 3 标示出了  $\xi = 0.01, \rho = \varepsilon_2^0 / \varepsilon_1^0 = 1$  时圆形缺陷 ( $a/b = 1$ ) 和椭圆缺陷 ( $a/b = 8$ ) 中应变  $\varepsilon_1$  与缺陷外应变  $\varepsilon_2^0$  的关系, 这些曲线是按  $J_2$  塑性流动理论得到的。图 3 表明, 缺陷外的应变达到 0.35 时, 椭圆缺陷区的局部化过程开始发生。对于  $a/b = 8$  的椭圆缺陷而言, 均匀应变 (缺陷外的应变) 可达到 0.55。对圆形缺陷而言, 局部化过程开始较晚, 要到均匀应变达到 0.6 时才开始。均匀应变可进一步增长, 完全局部化仅当  $\varepsilon_1^0 = 0.95$  时才开始发生。在图 3

中,最大均匀应变用实点表示,越过此点以后,应变  $\epsilon_1^0$  减少。在图 4 中标示出了  $U_i/l = 0.5$ ,  $U_i/l = 0.7$ ,  $\xi = 0.01$  时椭圆缺陷区 ( $a/b = 8$ )  $\epsilon_1$  和  $\bar{\sigma}/\sigma_y$  沿  $x$  轴的变化。完全局部化在  $U_i/l = 0.71$  时发生。图 4 表明,当  $U_i/l = 0.5$  时,缺陷区 ( $x/l < 0.1$ ) 发生局部化,而在缺陷区以外的整个区域内仍处于均匀状态,而  $U_i/l = 0.7$  时,局部化不仅在缺陷区发生,而且亦在其邻近 ( $x/l \leq 0.5$ ) 发生,对于  $x/l \geq 0.5$  的区域,应变和等效应力都是均匀的,由 (10) 式所计算的极限应变代表了该区域的均匀应变。

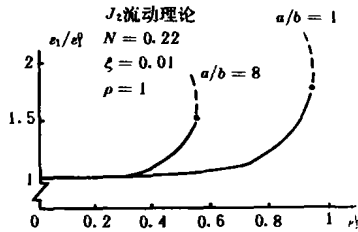


图 3 缺陷区应变与缺陷区外应变的关系

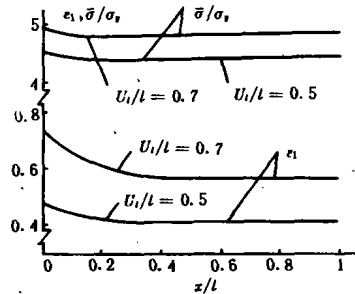


图 4  $\epsilon_1$  和  $\bar{\sigma}/\sigma_y$  沿  $x$  轴的变化 ( $a/b=8, \xi=0.01$ )

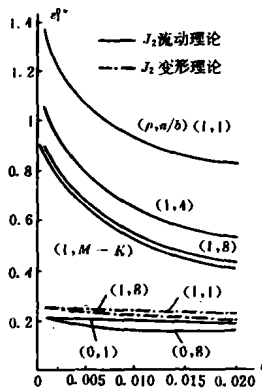


图 5 极限应变与缺陷区板厚关系

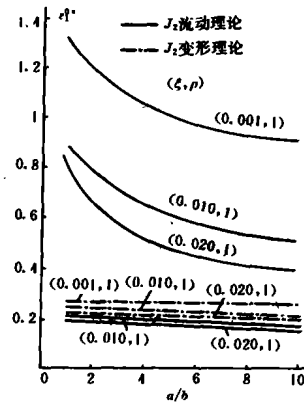


图 6 极限应变与长短半轴比  $a/b$  关系

在图 5 和图 6 中标示出了  $\rho = 0$  (平面应变),  $\rho = 1$  时极限应变与  $\xi$  及  $a/b$  的关系。 $\xi$  的变化范围为  $0.001 \sim 0.02$ ,  $a/b$  的变化范围为  $1 \sim 8$ , 在图 5 中亦标示出标准的  $M-K$  模型的结果, 对于  $\rho = 0$  的情况,  $J_2$  塑性流动理论和  $J_2$  塑性变形理论所予示的结果基本上是相同的。因此, 图中只标出按  $J_2$  塑性流动理论所予示的极限应变值。图 5 表明, 若  $\rho = 0$ ,  $a/b = 1$  或  $8$ , 则极限应变随  $\xi$  增加而线性地变化, 图 6 表明, 若  $\rho = 0$ ,  $\xi = 0.001$  或  $0.02$ 。极限应变亦几乎随  $a/b$  增加而线性地变化。对于双向等拉状态, 图 5 的曲线表明, 根据椭圆缺陷模型

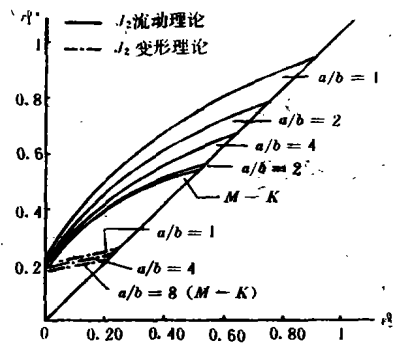


图 7 不同缺陷的 FLD

所予示的极限应变比根据标准的  $M-K$  缺陷模型所予示的要大些。图 5 和图 6 都表明, 对  $J_2$  塑性变形理论而言, 极限应变随  $\xi, a/b$  的变化而线性地变化。对  $J_2$  塑性流动理论而言, 极限应变随  $\xi, a/b$  的变化  $J_2$  塑性变形理论要强烈一些。这也就是说,  $J_2$  塑性流动理论对缺陷比  $J_2$  塑性变形理论更敏感。

在图 7 中, 标示出  $p$  的整个范围,  $\xi = 0.01, a/b = 1 \sim 8$  时的极限应变(即 FLD)。为了便于比较起见, 亦标示出了按标准的  $M-K$  缺陷模型予示之极限应变, 从这些曲线看出, 在  $p$  的整个范围内, 从图 5、图 6 所得结论亦成立。并且, 对  $a/b = 8$  的椭圆缺陷, 无论按  $J_2$  塑性流动理论还是按  $J_2$  塑性变形理论, 所予示的极限应变几乎和由标准的  $M-K$  缺陷模型予示的相, 也就是说, 标准的  $M-K$  缺陷模型可看作  $a/b = 8$  的椭圆缺陷模型, 根据标准的  $M-K$  缺陷模型予示的极限应变是下限。根据圆形缺陷模型予示的有限应变是上限。

## 4 结 论

本文研究了不同长短地轴比为  $1 \sim 8$  ( $a/b = 1 \sim 8$ ) 的椭圆缺陷模型, 标准的  $M-K$  缺陷模型, 圆形缺陷模型对双向受拉金属板极限应变的影响, 研究结果表明, 椭圆缺陷对双向受拉金属板极限应变的影响与椭圆长短半轴比的大小及椭圆区的厚度有关。在一般情况下, 具有椭圆缺陷的双向受拉金属板极限应变变化具有标准的  $M-K$  缺陷的大, 比具有圆形缺陷的小, 即标准的  $M-K$  缺陷给出的极限应变是 (FLD 的) 下限, 圆形缺陷给出的极限应变是 (FLD 的) 上限。但当椭圆缺陷长短半轴比大于 8, 即  $a/b \geq 8$  时, 其对极限应变的影响与标准的  $M-K$  缺陷的影响相同, 因此, 标准的  $M-K$  缺陷可看作是  $a/b \geq 8$  的椭圆缺陷, 而圆形缺陷则可看作是  $a/b = 1$  的椭圆缺陷, 亦即椭圆缺陷模型是一种更普遍形式的缺陷模型。研究结果还表明, 极限应变的予示值与本构理论有关,  $J_2$  塑性流动理论对缺陷比  $J_2$  塑性变形理论更敏感。

由于本文所提出缺陷模型的合理性和分析方法(大变形弹性有限元法)的先进性, 可认为本文的分析结果更切实际。

## 参 考 文 献

- 1 Hutchinson J., et al. Sheet necking-I, Validity of plane stress assumptions of the long-wavelength approximation. In: Edited by Koistinen, D., *Mechanics of sheet metal forming*, New York, Plenum Press, 1978, 111~126
- 2 Hutchinson J., et al. Sheet necking- I, Time-independent behavior, In: Edited by Koistinen, D., *Mechanics of sheet metal forming*, New York, Plenum Press, 1978, 127~153
- 3 Hutchinson J., et al. Sheet necking- II, Strain-rate effects, In: Edited by Koistinen, D., *Mechanics of sheet metal forming*, New York, Plenum Press, 1978, 269~285
- 4 Marciniak Z and Kuczynski K. Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal. *Int. J. Mech. Sci.*, 1967(9): 609~620
- 5 Bate P. and Wilson d. Strain localization in biaxially stretched sheets containing compact defect- I. Analysis using a finite element model, *Int. J. Mech. Sci.* 26, 1984, 573~585
- 6 Hutchinson J. Finite strain analysis of elastic-plastic solids and structures, In: Edited by Hartung, *Numerical solution of nonlinear structural problems*, ASME, 1973, 17~29
- 7 Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids.* 6, 1958, 236~249
- 8 Neale K. Phenomenological constitutive laws in finite plasticity, *SM Archs.* 6, 1981, 79~128