1991年11月
第14卷第6期

重庆大学学报
JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY

Vol. 14, №. 6
Nov. 1991

关于带余项Sobolev不等式的一点注记*

A REMARK ON SOBOLEV INEQUALITY WITH REMAINDER

杨 杰
Yang Jie
(重庆大学系统工程及应用数学系)

摘 要 在一类其定义域内无紧支集的函数空间 $V^2(\Omega)$ 上建立了一个带余项的 Sobolev 不等式。

关键词 Sobolev 不等式；α对称化；最佳嵌入常数；混合边值问题

中国图书资料分类法分类号 O175.8

ABSTRACT In this paper, a Sobolev inequality is established in space $V^2(\Omega)$ relative to a class of functions which do not have compact support in the domain where they are defined.

KEY WORDS Sobolev inequality; α-symmetrization; shape imbedding constant; mixed boundary problem

设 $\Omega \subset R^N$ 为一有界、连通的区域，则 $\forall\, u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ 有下面的 Sobolev 不等式：

$$S_N \|u\|_{p^*} \leqslant \|\nabla u\|_p \qquad p < N \tag{1}$$

其中 $\|\cdot\|_t$ 为 $L^t(\Omega)$ 中的范数，即

$$\|\cdot\|_t = \left(\int_\Omega |\cdot|^t dx\right)^{\frac{1}{t}}$$

而 S_N 为嵌入 $H_0^{1,p}(\Omega) \to L^{p^*}(\Omega)$ 的最佳常数。即

$$S_N = N\sqrt{\pi}\left[\frac{2\Gamma\left(\frac{N}{p}\right)\Gamma\left(N+1-\frac{N}{p}\right)}{N!\,\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{N}} \cdot \left(\frac{N-p}{N(p-1)}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$\Gamma(\cdot)$ 为 Γ 函数，$p^* = Np/(N-p)$. 熟知，在 $H_0^{1,p}(\Omega)$ 中，不存在任何非零元素使(1)等号成立。(一般来说，对于边界不为零的函数，(1)不成立。例如取常值函数。)H. Brezis 和 L. Nirenberg 在其著名论文[1]中，证明了如下的带有余项的 Sobolev 不等式

$$\|\nabla u\|_2^2 \geqslant S_N \|u\|_{2^*}^2 + C_s(\Omega)\|u\|_s^2 \tag{2}$$

$\forall\, u \in H_0^1(\Omega)$，其中 $s < N/(N-2)$，且当 $s \to N/(N-2)$ 时，$C_s(\Omega) \to 0$，H. Brezis 和 H. Lieb

* 收文日期 1990-03-27

在[3]中，利用函数的递减重排即 Schwartz 对称化技巧，得到了较(2)更精确的形式：

$$\|\nabla u\|_2^2 \geqslant S_N\|u\|_{2^*}^2 + C(\Omega)\|u\|_{s,w}^2 \tag{3}$$

其中 $s = N/(N-2)$，$C(\Omega)$ 是只与 Ω 和 N 有关的常数，$\|u\|_{s,w}$ 表示弱 L^s 范数，即

$$\|u\|_{s,w} = \sup_A |A|^{-\frac{1}{s'}}\int_A |u|\,dx$$

其中 $s' = (s-1)/s$，A 取遍 R^N 中所有具有有限测度的子集合。$|A|$ 为 A 的 Lebesgue 测度。

近年来，P. L. Lions，F. Pacella，M. Tricarico 和 H. Egnell 得到了关于一类新函数空间 $V^p(\Omega)$ 的最佳 Sobolev 嵌入常数，$V^p(\Omega)$ 的一个显著的特点就是其中的函数不必在 Ω 上有紧支集，因为这一点是使(1)—(3)成立的关键条件，因此，对应于 $V^p(\Omega)$ 的情形与 $H_0^{1,p}(\Omega)$ 的情形有很大的不同，对 Ω 也须加一定的几何限制，文[2]和文[4]分别在 $V^p(\Omega)$ 获得形如(1)和(2)的不等式。本文的目的在于在 $V^2(\Omega)$ 建立形如(3)的不等式。

以下设 Ω 是 R^N 中有界，连通的区域，边界 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续且由流形 Γ_0 和 Γ_1 组成，即 $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$，其中 $H_{N-1}(\Gamma_0) > 0$，这里 H_{N-1} 表示 $N-1$ 维 Hausdorff 测度。这样的 Ω 的全体记为 J。$\forall\ \Omega \in J$，有与 Γ_1 相关的等周常数 $Q(\Gamma_1,\Omega)$，即

$$Q(\Gamma_1,\Omega) = \sup_E \frac{|E|^{\frac{N-1}{N}}}{P_\Omega(E)}$$

其中 E 取遍 Ω 中所有满足下列条件的可测子集：$\partial\Omega \cap \Gamma_0$ 不含任何 $N-1$ 维 Hausdorff 测度大于零的子集，$P_\Omega(E)$ 为 E 相对于 Ω 的 De Giogi 周长。(见[5])

现在 R^N 中取极坐标系 $(\rho,\theta_1,\cdots,\theta_{N-1})$，$\theta_i \in [0,\pi]$，$1 \leqslant i \leqslant N-2$，$\theta_{N-1} \in [0,2\pi]$，$\rho \geqslant 0$，记

$$\sum(a,R) = \{x \in R^N \mid 0 \leqslant \rho < R, \theta_i \in (0,\pi), 1 \leqslant i \leqslant N-2, \theta_{N-1} \in (0,a)\}$$

$\forall\ a \in [0,2\pi]$，记 $C_a(\Omega)$ 为幅角为 a，且与 Ω 等测度的扇形 $\sum(a,R)$，又令 $\partial\sum(a,R) = \widetilde{\Gamma_0} \cup \widetilde{\Gamma_1}$，其中

$$\widetilde{\Gamma_0} = \{x \in R^N \mid x \in \partial\sum(a,R) \text{ 且 } |x| = R\}$$

$$\widetilde{\Gamma_1} = \{x \in R^N \mid x \in \partial\sum(a,R), \theta_{N-1} = 0 \text{ 或 } \theta_{N-1} = a\}$$

由[2]，$\forall\ a \in [0,\pi]$ 及 $\forall\ R > 0$，有

$$Q(\widetilde{\Gamma_1}, \sum(a,R)) = (Na_N^{1/N})^{-1}$$

其中，$a_N = |\sum(a,1)|$，可以看出，$Q(\widetilde{\Gamma_1}, \sum(a,R))$ 与 R 无关。可以证明，$\forall\ \Omega \in J$，必存在扇形 $\sum(a,R)$(可能为球)，使得 $Q(\Gamma_1,\Omega) = Q(\widetilde{\Gamma_1}, \sum(a,R)) = (Na_N^{1/N})^{-1}$. 定义

$$\varepsilon_{a_N} = \{\Omega \in J \mid Q(\Gamma_1,\Omega) = (Na_N^{1/N})^{-1}\}$$

又令 $$V^p(\Omega) = \{u \in H^{1,p}(\Omega) \mid u \equiv 0 \text{ 在 } \Gamma_0 \text{ 上}\}$$

由[2]，$\forall\ u \in V^p(\Omega)$ 及 $\forall\ \Omega \in \varepsilon_{a_N}$ 有

$$\|\nabla u\|_p^p \geqslant P(a_N)\|u\|_{p^*}^p \qquad 1 < p < N \tag{4}$$

其中 $P(a_N)$ 为嵌入 $V^p(\sum(a,R)) \to L^{p^*}(\sum(a,R))$ 的最佳常数。

现设 $u(x)$ 为 Ω 上的实值可测函数，令

$$\mu(x) = \mathrm{mes}\{x \mid x \in \Omega \text{ 且 } |u(x)| > t\} \qquad t \in [0, +\infty)$$

为 $u(x)$ 的分布函数，而 $u^*(s)$ 为 u 的递减重排，即

$$u^*(s) = \inf\{t \mid t \geqslant 1 \text{ 且 } \mu(t) < s\}$$

$\forall x \in C_a(\Omega)$，定义 $u(x)$ 的 a 对称化为

$$C_a u(x) = u^*(a_N |x|^N)$$

对于 a 对称化，有如下的不等式[2,5]

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx = \int_{C_a(\Omega)} |C_a u(x)|^p dx \qquad p > 0 \tag{5}$$

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx = \int_{C_a(\Omega)} |\nabla C_a u(x)|^p dx \qquad p > 1 \tag{6}$$

$$\|u\|_{p,\omega(\Omega)} = \|C_a u\|_{p,\omega(C_a)} \qquad P > 0 \tag{7}$$

其中 $\Omega \in \varepsilon_{a_N}$，$u \in V^p(\Omega)$，$\|\cdot\|_{p,\omega(\Omega)}$ 为弱 $L^p(\Omega)$ 范数，即

$$\|\cdot\|_{p,\omega(\Omega)} = \sup_A |A|^{-\frac{1}{p'}} \int_A |\cdot| \mathrm{d}x$$

p' 为 p 的共轭数，A 取遍 Ω 中一切可测子集。这样，我们有下面的不等式

定理 1　$\forall u \in V^2(\Omega)$，及 $\forall \Omega \in \varepsilon_{a_N}$

$$\|\nabla u\|_2^2 \geqslant I^2(a_N)\|u\|_{2^*}^2 + I^2(a_N)\|u\|_{2^*,\omega(\Omega)}^2 \tag{$*$}$$

证明　由(5)—(7)知，我们只需对 $\sum(a,R)$ 上的非负球对称函数 $f \in V^2(\sum(a,R))$ 证明($*$)成立即可。

现令 $g(x) \in L^\infty(\sum(a,R))$，考虑下面的混合边值问题

$$\begin{cases} \triangle u = g & x \in \sum(a,R) \\ u = 0 & x \in \widetilde{\Gamma}_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & x \in \widetilde{\Gamma}_1 \end{cases} \tag{8}$$

利用 Lax-Milgram 定理可以知道，存在唯一的 $u \in H^1(\sum(a,R))$ 满足上述问题[7]。再利用广义解的标准估计[8]可知 u 是本性有界的。

令　$\varphi(x) = f(x) + u(x) + \|u\|_\infty \qquad \forall x \in \sum(a,R)$

对 $\varphi(x)$ 用(4)，注意到这时 $p = 2$，这样

$$\begin{aligned} \int_\Sigma |\nabla(f+u)|^2 \mathrm{d}x &\geqslant I^2(a_N)\left(\int_\Sigma |f + u + \|u\|_\infty|^{2^*} \mathrm{d}x\right)^{2/2^*} \\ &\geqslant I^2(a_N)\left(\int_\Sigma |f|^{2^*} \mathrm{d}x\right)^{2/2^*} \end{aligned}$$

这是因为 $f \geqslant 0$ 及 $u + \|u\|_\infty \geqslant 0$. 因而

$$\int_\Sigma |\nabla f|^2 + \int_\Sigma |\nabla u|^2 + 2\int_\Sigma \nabla u \cdot \nabla f \geqslant I^2(a_N)\left(\int_\Sigma |f|^{2^*}\right)^{2/2^*} \tag{9}$$

又因为
$$\int_{\Sigma}\nabla u\cdot\nabla f\mathrm{d}x=-\int_{\Sigma}f\triangle u\mathrm{d}x+\int_{\partial\Sigma}f\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}s$$
$$=-\int_{\Sigma}f\triangle u\mathrm{d}x$$
$$=-\int_{\Sigma}fg\mathrm{d}x$$

代入(9)并将 g 和 u 分别换成 λg 和 λu,得
$$\lambda^2\int_{\Sigma}|\nabla u|^2-2\lambda\int_{\Sigma}fg+\int_{\Sigma}|\nabla f|^2-I^2(a_N)(\int_{\Sigma}|f|^{2^*})^{2/2^*}\geqslant 0$$
对 λ 优化,即可得
$$\int_{\Sigma}|\nabla f|^2\geqslant I^2(a_N)(\int_{\Sigma}|f|^{2^*})^{2/2^*}+\frac{(\int_{\Sigma}fg)^2}{\int_{\Sigma}|\nabla u|^2} \tag{10}$$
设 A 为 $\sum(a,R)$ 中任一可测子集,令 $g=1_A$ 为 A 的特征函数,现在(8)中方程两端乘以 u,并在 $\sum(a,R)$ 上积分,故
$$\int_{\Sigma}u\triangle u\mathrm{d}x=\int_{\Sigma}ug\mathrm{d}x$$
由于
$$\int_{\Sigma}u\triangle u\mathrm{d}x=-\int_{\Sigma}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int_{\partial\Sigma}u\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}s$$
因而,由 Hölder 不等式及(4)有
$$\int_{\Sigma}|\nabla u|^2=-\int_{A}u$$
$$\leqslant(\int_{A}|u|^{2^*})^{1/2^*}(\int_{A}1)^{\frac{N+2}{2N}}$$
$$\leqslant(\int_{\Sigma}|u|^{2^*})^{1/2^*}|A|^{\frac{N+2}{2N}}$$
$$\leqslant(I^2(a_N))^{-\frac{1}{2}}(\int_{\Sigma}|\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{N+2}{2N}}$$
故
$$\int_{\Sigma}|\nabla u|^2\leqslant(I^2(a_N))^{-1}|A|^{\frac{N+2}{N}}$$
代入(10)式,得
$$\int_{\Sigma}|\nabla f|^2\geqslant I^2(a_N)(\int_{\Sigma}|f|^{2^*})^{2/2^*}+I^2(a_N)\frac{(\int_{A}f)^2}{|A|^{\frac{N+2}{N}}}$$
对所有 $\sum(a,R)$ 的可测子集取上确界,则有
$$\|\nabla f\|_2^2\geqslant I^2(a_N)\|f\|_{2^*}^2+I^2(a_N)\|f\|_{\frac{N}{2},w(\Sigma)}^2$$
因而(*)成立。

另外,对于 Brezis-Lieb 的不等式(3),如果其中 $s=2^*=\dfrac{2N}{N-2}$ 的话,$C(\Omega)$ 可用绝对常数 S_N 代替,即有下面的

定理 2 $\forall u\in H_0^1(\Omega)$,有

$$\| \nabla u \|_2^2 \geqslant S_N \| u \|_{2^*}^2 + S_N \| u \|_{2^*,w}^2 \qquad (**)$$

证明　$\forall u \in H_0^1(\Omega)$，用 u^* 表示 u 的递减重排即 Schwartz 对称化，熟知有下面的

$$\| \nabla u^* \|_2 \leqslant \| \nabla u \|^2 \qquad (5)'$$

$$\| u^* \|_{2^*} = \| u \|_{2^*} \qquad (6)'$$

$$\| u^* \|_{2^*,w} = \| u \|_{2^*,w} \qquad (7)'$$

因此，为证（* *），只需对 $B_R(0)$ 上的非负递减的球对称函数 f 证明即可，其中 $f|_{\partial B} = 0$，$B_R(0)$ 为以原点为心，半径为 R 的开球，且 $|B_R(0)| = |\Omega|$

令 $g(x) \in L^\infty(B_R)$，则由椭圆方程的标准理论，必有 $u \in L^\infty(B_R) \cap H^1$ 使

$$\begin{aligned} \triangle u &= g & x &\in B_R \\ u &= 0 & x &\in \partial B_R \end{aligned}$$

作辅助函数 $\varphi(x) = f(x) + u(x) + \| u(x) \|_\infty$，$x \in B_R$ 再利用与证明定理1类似的方法，可证明（* *）. 这里从略。

参 考 文 献

1 Brezis H, Nirenberg L. Positive solution of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Comm. Pure Appl Math, 1983, 36(4): 437～477

2 Lions P L, Pacella F, Tricarico M. Best constants in Sobolev inequalities for functions vanishing on some parts of the boundary and related questions. Indiana Univ Math J, 1988, 37(2): 301～324

3 Brezis H, Lieb E. H. Sobolev inequalities with remainder terms. J Func Anal, 1985, 62(1): 73～86

4 Egnell H, Pacella F, Tricarico M. Some remarks on Sobolev inequalities. Nonlinear Anal T M &A. 1989, 13(6): 671～681

5 Pacella F, Tricarico M. Symmetrization for a class of elliptic equations with mixed boundary conditions. Atti Semin Math fis Univ Modena, 1985～1986, 34: 75～94

6 Lieb E H. Existence and uniqueness of the minimizing solutions of Choquard' s nonlinear equation. Stud Appl Math, 1977, 57(2): 93～105

7 Lions J L 著；李大潜译. 偏微分方程的边值问题. 上海科学技术出版社，1980

8 Ладыженская О А, Уральцева Н Н 著；严子谦等译. 线性和拟线性椭圆型方程. 北京：科学出版社，1987

9 杨杰. 一个带余项的 Sobolev 不等式. 自然杂志，1991, 14(10): 793