Banach空间中两类M—分解的刻划*

CHARACTERIZATION OF TWO KINDS OF MARKUSEVIC—DECOMPOSITION IN BANACH SPACE

傅 强　　吴从炘
Fu Qiang　　Wu ChongXin
（重庆大学）　（哈尔滨工业大学）

摘　要　引入了 Norming M—分解和强 M—分解的概念，给出了它们的刻划，得到了广义双正交序列成为无条件的 Schauder 分解的充分必要条件。

关键词　Banach 空间；M—分解；无条件的 Schauder 分解
中国图书资料分类法分类号　O177.2

ABSTRACT　Norming M—decomposition and strong M—decomposition are introduced, and their characterization are given. The necessary and sufficient condition that the generalized biorthogonal system becomes unconditional Schauder decomplsiton is acquired.

KEY WORDS　Banach space; M—decompositon; unconditonal Schauder decomposition

0　引　言

在本文中，E 表示 Banach 空间；$\{G_n\}$ 表示 E 的线性子空间序列；$[\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n]$ 表示由 $\{G_n\}$ 张成的 E 的子空间；$L(E,E)$ 表示由 E 到 E 的所有连续线性算子的全体。

定义 1[1].　$\{G_n\}$ 称为 E 的最小子空间序列，如果 $G_n \neq \{0\}$，$G_n \cap [\bigcup_{i\neq n} G_i] = \{0\}$ $n = 1,2,\cdots$。

定义 2[1].　$\{G_n, v_n\}$ 称为 Banach 空间 E 的一个广义双正交系，如果 $\{v_n\} \subset L(E,E)$，$v_n(E) = G_n$，$v_n v_m = \delta_{nm} v_n = \delta_{nm} v_m$，$n, m = 1,2,\cdots$。

其中 $\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m, \\ 0 & n \neq m. \end{cases}$

如果 $E = [\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n]$，则称 $\{G_n, v_n\}$ 为 E — 完备的广义双正交系。

如果 $\forall\, x \in E$，由 $v_n(x) = 0$ $n = 1,2,\cdots$，有 $x = 0$，则称 $\{v_n\}$ 在 E 上是全的。

定义 3[1].　Banach 空间 E 的子空间序列 $\{G_n\}$，$G_n \neq \{0\}$ $n = 1,2,\cdots$，称为 E 的一个 Markuševič 分解（简称 M — 分解），如果存在一序列 $\{v_n\} \subset L(E,E)$，使得 $\{G_n, v_n\}$ 为 E — 完备

* 收文日期　1990-11-30

且全的广义双正交系。

定义4[1]. $\{G_n\}$为E的子空间序列，如果$\forall\, x\in E$，存在唯一的$\{x_n\}$，$x_n\in G_n$，$n=1,2,\cdots$，使得$x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n$，则称$\{G_n\}$为E的一个分解。

定义4中级数的收敛是范数拓扑意义下的。$x_n\in G_n$的唯一性保证了E到G_n的射影v_n的存在性，称$\{v_n\}$为相应于$\{G_n\}$的坐标射影算子序列，显然$v_nv_m=\delta_{nm}v_m=\delta_{nm}v_n$，$n,m=1,2,\cdots$。

如果由$\{G_n\}$决定的坐标射影算子$\{v_n\}$均是连续的，则称该分解为E的Schauder分解。

定义5[1]. Banach空间E的Schauder分解$\{G_n\}$称为是无条件的，如果$\forall\, x\in E$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$是无条件收敛的（$\{v_n\}$为相应于$\{G_n\}$的坐标射影算子序列）。

关于M－分解，1971年Bachelis，G. F和Rosenthal，H. P给出了它的刻划，得到如下结果：

定理[2]：Banach空间E的子空间序列$\{G_n\}$为E的一个M－分解的充要条件是：

(1) 对于每个使得$N-\{n_k\}$为无限的正整数序列$\{n_k\}$，有$\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}G_{n_k}\right]\cap\left[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j\right]=\{0\}$，

(2) $G_n+\left[\bigcup_{j\neq n}G_j\right]=E$　　$n=1,2,\cdots$.

依靠单纯的M－分解，我们并不能得到空间及其分解更多的性质，因此，注意力理所当然地应放在具有某种特性或限制的M－分解的研究上，本文就是从这个角度来研究M－分解的。

1 Norming M—分解

对于一个M－分解$\{G_n\}$而言，相应于$\{G_n\}$的E到G_n的坐标射影算子v_n是确定的，于是，可以引入特征指标$r_G(V)$（G.V分别为E、E^*的子空间）[1]：

$$r_G(V)=\inf_{\substack{x\in G\\ \|x\|\leq 1}}\ \sup_{\substack{f\in V\\ \|f\|\leq 1}}|f(x)|=\inf_{\substack{x\in G\\ x\neq 0}}\ \sup_{\substack{f\in V\\ \|f\|\leq 1}}|f(x/\|x\|)|.$$

当$G=E$时，记$r_G(V)=r(V)$，称为通常特征指标。

下面依据$r(V)$的特点引入一类新的M－分解：

定义6. Banach空间E的一个M－分解$\{G_n,v_n\}$称为Norming M－分解，如果$r\left(\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*(E^*)\right]\right)>0$（此处$v_n^*$，$\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*(E^*)\right]$的意义见[1]§15）。

由[1]知，对每个Schauder分解$\{G_n,v_n\}$，有$r\left(\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*(E^*)\right]\right)>0$，所以任何一个Schauder分解都是一个Norming M－分解。

关于Norming M－分解，我们得到了如下重要定理：

定理1：设$\{G_n\}$为E的一个M－分解，$\{v_n\}$为相应于$\{G_n\}$的坐标射影算子序列，$\{n_k\}$为无限的正整数序列，如果$r_{\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}G_{n_k}\right]}\left(\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}v_{n_k}^*(E^*)\right]\right)>0$，则$E=\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}G_{n_k}\right]\oplus\left[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j\right]$。

如果$\{G_n\}$是Norming M－分解，则反之亦然。

证明：设ω为E到$E/\left[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j\right]$的典则映射，则由$c=r_{\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}G_{n_k}\right]}\left(\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}v_{n_k}^*(E^*)\right]\right)>0$，有

$$c\|x\|\leq\sup_{\substack{f\in\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}v_{n_k}^*(E^*)\right]\\ \|f\|\leq 1}}|f(x)|\leq\sup_{\substack{f\in\left[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j\right]^{\perp}\\ \|f\|\leq 1}}|f(x)|=\|\omega(x)\|\leq\|x\|$$

此处 $x \in [\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}]$，$[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}} G_j]^{\perp} = \{f \in E^* \mid f(x) = 0\ \forall x \in [\bigcup_{j\in N-\{n_k\}} G_j\}]\}$.

因此 $\omega \mid [\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}]$ 为一同构映射。

$\because E = [\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n]$，故 $\omega([\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}]) = [\bigcup_{k=1}^{\infty} \omega(G_{n_k})]] = E/[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}} G_j]$，

$\therefore (\omega \mid [\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}])^{-1}\omega$ 为 E 到 $[\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}]$ 上的一个射影，并有 $E = [\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}] \oplus [\bigcup_{j\in N-\{n_k\}} G_j]$。

反过来，如果 $r([\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]) > 0$，并且 $E = [\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}] \oplus [\bigcup_{j\in N-\{n_k\}} G_j]$，

用 v 表示 E 到 $[\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}]$ 上的自然射影，并伴有 $[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}} G_j]$，则由 $\{G_n, v_n\}$ 的广义双正交性，有 $v^* v_{n_k}^* = v_{n_k}^*(k = 1,2,\cdots)$，$v^* v_j^* = 0 \quad j \in N - \{n_k\}$，这表明：

$v^*([\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]) \subset [\bigcup_{k=1}^{\infty} v_{n_k}^*(E^*)]$。

令 $C_1 = r([\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]) > 0$，

则 $\forall x \in [\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}]$，有 $C_1\|x\| \leqslant \sup\limits_{\substack{f\in[\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]\\ \|f\|\leqslant 1}} |f(x)| =$

$\sup\limits_{\substack{f\in[\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]\\ \|f\|\leqslant 1}} |f(v(x))| = \sup\limits_{\substack{f\in[\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]\\ \|f\|\leqslant 1}} |v^*(f)(x)| =$

$\|v^*\| \cdot \sup\limits_{\substack{f\in[\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]\\ \|f\|\leqslant 1}} |v^*/\|v^*\|(f)(x)| \leqslant \|v^*\| \cdot \sup\limits_{\substack{h\in[\bigcup_{k=1}^{\infty} v_{n_k}^*(E^*)]\\ \|h\|\leqslant 1}} |h(x)|$

所以 $r_{[\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}]}([\bigcup_{k=1}^{\infty} v_{n_k}^*(E^*)]) > 0$ 证毕

这个定理表明，当 $\{G_n, v_n\}$ 为 Norming M－分解时，$E = [\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}] \oplus [\bigcup_{j\in N-\{n_k\}} G_j]$ 与 $r_{[\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}]}([\bigcup_{k=1}^{\infty} v_{n_k}^*(E^*)]) > 0$ 是等价的，在这里，我们把空间分解与特征指标很好地联系起来了。

2 强 M—分解的刻划

对于 Banach 空间的完备最小子空间序列，有 $\{x \mid v_i(x) = 0, i = 1,2,\cdots n\} = K_n = [\bigcup_{i=n+1}^{\infty} G_i]$，自然设想将以上关系推广到一般的正整数序列的情形，注意，如果 $N - \{n_k\}$ 是有限的，则必有 $\{x \mid v_j(x) = 0, j \in \{n_k\}\} = [\bigcup_{j\in N-\{n_k\}} G_j]$，可以断言，$\{v_n\}$ 在 E 上是全的。

一般来讲，$\{x \mid v_j(x) = 0, j \in \{n_k\}\} = [\bigcup_{j\in N-\{n_k\}} G_j]$ 这一关系并不都成立，为此，我们引入一类新的 M－分解：

定义 7. Banach 空间的一个 M－分解称为强 M－分解，如果对任意的单调增加的正整数序列 $\{n_k\}$，有 $\{x \mid v_{n_k}(x) = 0, k = 1,2,\cdots\} = [\bigcup_{j\in N-\{n_k\}} G_j]$ 成立。

显然，每一个 Schauder 分解一定是强 M － 分解。

我们注意到满足 $\{x|v_{n_k}(x)=0,k=1,2,\cdots\}=[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j]$ 但不为 M － 分解的广义双正交系是存在的：

例 1：$E=l^2$，$\{e_n\}$ 为 l^2 的单位向量基，令 $x_n=e_1+e_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$ 取 $G_n=[x_n]$，$v_n(x)=\xi_{n+1}(x)\cdot x_n(x=(\xi_n)_{n=1}^{\infty}\in l^2)$，可以证明 $\{G_n,v_n\}$ 不为 M － 分解，但对每个使 $N-\{n_k\}$ 为无限的单调增加的正整数序列 $\{n_k\}$，都有 $\{x|v_{n_k}(x)=0,k=1,2,\cdots\}=[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j]$。

如下定理给出了强 M － 分解的刻划：

定理 2：E 为 Banach 空间，$\{G_n,v_n\}$ 为 E 的一个 M － 分解，如下等价：

1) $\{G_n\}$ 为强 M － 分解，

2) 对于每一个单调增加的正整数序列 $\{n_k\}$，有 $\{x|v_{n_k}(x)=0,k=1,2,\cdots\}^{\perp}=[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j]^{\perp}$，

3) 由 $\psi_{n_k}(x+[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j])=v_{n_k}(x)(x\in E,k=1,2,\cdots)$ 定义的在 $E/[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j]$ 上是全的，换言之，$\{G_{n_k}+[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j]\}$ 为 $E/[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j]$ 的一个 M － 分解。

注意 $\psi_{n_k}\in L(E/[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j],E/[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j])$。

证明：由 1) 有 $\{x|v_{n_k}(x)=0,k=1,2,\cdots\}=[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j]$，$\therefore\{x|v_{n_k}(x)=0,k=1,2,\cdots\}^{\perp}=[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j]^{\perp}$，这正是 2)

2)$\Rightarrow$1)：若不然，存在 $x_0\in\{x|v_{n_k}(x)=0,k=1,2,\cdots\}$，但 $x_0\overline{\in}[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j]$，由于 $[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j]$ 为闭，所以由 Hahn － Banach 定理，有

$$f_0\in E^*,\text{使得 } f_0(x_0)=1,f_0(x)=0,\forall\ x\in[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j]$$

这表明 $f_0\in[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j]^{\perp}$，从而 $f_0\in\{x|v_{n_k}(x)=0,k=1,2,\cdots\}^{\perp}$，而 $f_0(x_0)=1$，故又有 $f_0\overline{\in}\{x|v_{n_k}(x)=0,k=1,2,\cdots\}^{\perp}$，矛盾。$\therefore$ 1) 成立。

3)$\Rightarrow$1)：令 $x\in\{x|v_{n_k}(x)=0,k=1,2,\cdots\}$，则 $v_{n_k}(x)=0,k=1,2,\cdots$，

故 $\psi_{n_k}(x+[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j])=v_{n_k}(x)=0,k=1,2,3,\cdots$

于是 $x\in[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j]$，因而 $\{x|v_{n_k}(x)=0,k=1,2,\cdots\}\subset[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j]$，这表明 $\{x|v_{n_k}(x)=0,k=1,2,\cdots\}^{\perp}\subset[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j]^{\perp}$，

由于每个广义双正交系 $\{G_n,v_n\}$ 都满足 $[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j]^{\perp}\supset\{x|v_{n_k}(x)=0,k=1,2,\cdots\}^{\perp}$，

$\therefore$ 1) 成立。

现有 1)，假定 $x\in E$，对一切 k，有

$\psi_{n_k}(x+[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j])=v_{n_k}(x)=0$，从而 $x\in[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j]$，所以 $x\in\{x|v_{n_k}(x)=0,k=1,2,\cdots\}$，故 ψ_{n_k} 在 $E/[\bigcup_{j\in N-\{n_k\}}G_j]$ 上是全的。证毕

3　广义双正交系成为无条件的 Schauder 分解的刻划

引理 1[1]：设 E 为 Banach 空间，$E=[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]$，则如下等价：

1) $\{G_n, v_n\}$ 为 E 的无条件的 Schauder 分解，

2) $\{G_n, v_n\}$ 的每一个变换 $\{G_{\sigma(n)}, v_{\sigma(n)}\}$ 为 E 的一个 Schauder 分解。

引理 2：设 E 为一个 Banach 空间，$\{G_n\}$ 为 E 的一个 Schauder 分解，如下等价：

1) $\{G_n, v_n\}$ 为 E 的一个无条件的 Schauder 分解，

2) 对于每一个正整数单增序列 $\{n_k\}$，都有 $E = [\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}] \oplus [\bigcup_{j\in N-\{n_k\}} G_j]$。

证明：1)⇒2) 由引理 1 即得.

反过来，由 $E = [\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}] \oplus [\bigcup_{j\in N-\{n_k\}} G_j]$，$\forall\, x \in E$，有唯一的表示 $x = y + z$，$y \in [\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}]$，$z \in [\bigcup_{j\in N-\{n_k\}} G_j]$，从而 $v_{n_k}(x) = v_{n_k}(y+z) = v_{n_k}(y)$，$k = 1, 2, \cdots$

注意 $\{G_n, v_n\}$ 为 E 的 Schauder 分解，故 $\sum_{k=1}^{\infty} v_{n_k}(y)$ 收敛于 y，由[3]的引理 16.1，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 无条件收敛，∴ 1) 成立。

有了引理 2，可以证明我们的结论：

定理 3：$\{G_n\}$ 为 Banach 空间 E 的完备子空间序列，$G_n \neq \{0\}$，$\{G_n\}$ 为 E 的无条件的 Schauder 分解的充分必要条件是对于每一个单调增加的正整数序列，有 $E = [\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}] \oplus [\bigcup_{j\in N-\{n_k\}} G_j]$。

证明：若 $\{G_n\}$ 为 E 的无条件的 Schauder 分解，由引理 2，有 $E = [\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}] \oplus [\bigcup_{j\in N-\{n_k\}} G_j]$ 成立。

反过来，先证明 $\{G_n\}$ 必为 E 的 Schauder 分解，为此，取有限集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$，则有 $E = [\bigcup_{i=1}^{n} G_i] \oplus [\bigcup_{j=n+1}^{\infty} G_j]$，$n = 1, 2, \cdots$，由最小子空间序列的刻划[4]，$\{G_n\}$ 为最小子空间序列。

设 $\{v_n\}$ 为相应于 $\{G_n\}$ 的坐标射影算子序列，$S_n = \sum_{i=1}^{n} v_i$ $n \in N$.

由假设对任意集合 $A \subset N$，存在一个由 E 到 $[\bigcup_{i\in A} G_i]$ 上的射影 v_A，并伴随有 $[\bigcup_{j\in N-A} G_j]$

即 $v_A(x) = 0$，$\forall\, x \in [\bigcup_{j\in N-A} G_j]$

从而 $v_A\left(\sum_{i\in I} x_i\right) = \sum_{i\in I\cap A} x_i$，此处 I 为任意有限的正整数集。

注意，$\forall\, I \subset N$，有 $\sum_{i\in I\cap A} x_i \in [\bigcup_{i\in A} G_i]$，$\sum_{i\in I\cap(N-A)} x_i \in [\bigcup_{j\in N-A} G_j]$，

我们断言，$\sup_{1\leq n<+\infty} \|S_n\| < +\infty$.

若不然，则可以构造单调正整数增加序列 $\{k_p\}$ 与 $\{n_p\}$，使得 $k_{p-1} \leq n_p \leq k_p$ ($p = 1, 2, 3, \cdots$, $k_0 = 0$)，

$\|z_p\| \leq 1/2^p$，$\|S_{n_p}(z_p)\| \geq 1$ ($p = 1, 2, \cdots$)，

注意 $\{\sum_{p=1}^{t} z_p\}_{t=1}^{\infty}$ 收敛，

但若令 $A = \{1, 2, \cdots n, k_1 + 1, \cdots n_2, k_2 + 1, \cdots, n_3, \cdots\}$，则序列 $\{v_A(\sum_{p=1}^{t} z_p)\} = \{\sum_{p=1}^{t} S_{n_p}(z_p)\}$ 是发散的，但 v_A 是连续算子，可见 $\{\sum_{p=1}^{t} S_{n_p}(z_p)\}$ 应收敛，矛盾。

因此，$\{G_n\}$ 为 E 的一个 Schauder 分解，

再利用引理2，$\{G_n\}$为E的无条件的Schauder分解。证毕

定理3是一个很漂亮的结果，从理论上给出了无条件的Schauder分解的子空间$\{G_n\}$应该满足的条件，从空间的角度看，这是很有意义的。下面定理给出了定理3的一个推论。

定理4：设E为Banach空间，$\{G_n\}$为E的一个M－分解，$\{v_n\}$为$\{G_n\}$相应的坐标射影算子序列，若对于每一个单调增加的正整数序列$\{n_k\}$，有$r_{[\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}]}([\bigcup_{k=1}^{\infty} v_{n_k}^*(E^*)]) > 0$，则$\{G_n, v_n\}$为$E$的无条件的Schauder分解。

证明：由定理1，3而得。证毕

最后给出一个例子，它表明，对E的一个M－分解而言，不一定有使得$\{n_k\}$与$N-\{n_k\}$都为无限且保证$r_{[\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}]}([\bigcup_{k=1}^{\infty} v_{n_k}^*(E^*)]) > 0$的自然数子序列$\{n_k\}$存在。

例2：$\{e_n\}$为c_0的自然的单位向量基，令$x_n = \sum_{i=1}^{n} e_i (n = 1, 2, \cdots)$，则$\{x_n\}$为$E$的标准条件基，令$v_n(x) = f_n(x) \cdot x_n, f_n = h_n - h_{n+1} (n = 1, 2, \cdots)$，此处$\{h_n\}$为$\{e_n\}$的系数泛函序列。可以证明[1]，对于任意一个使得$N-\{n_k\}$为无限的无限序列$\{n_k\}$，都有：

$$r_{[\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}]}([\bigcup_{k=1}^{\infty} v_{n_k}^*(E^*)]) = 0$$

本文引入了Norming M－分解与强M－分解两个重要概念，关于它们的进一步性质，比如：具有这两种M－分解的空间在拓扑结构上的特征；它们的存在性以及相关性质；两类M－分解与空间其它类型分解的相互关系等等都还需要作进一步深入的研究。

参 考 文 献

1 Ivan singer. Bases in Banach space Ⅱ. Berlin: Springer－Verlag, 1980

2 Bachelis G F, Rosenthal H P. On unconditionally covering series and biorthogonal systems in a Banach Space. Pacific J Math, 1971, 37: 1～5

3 Ivan Singer. Bases in Banach Space Ⅰ. Berlin: Springer－Verlag, 1970

4 Ariho, Mignal A. A theorem on Schauder decomplsitions in Banach spaces. Publ sec Mat Univ Autonoeoma. Berlelon, 1985, 29(1): 73～81