

积分型内时本构方程的增量形式及其应用

INCREMENTAL FORM OF ENDOCHRONIC CONSTITUTIVE EQUATION AND ITS APPLICATIONS

彭 向 和 范 镜 泓
Peng Xianghe Fan Jinghong

(重庆大学工程力学系)

0344.1

摘 要 从积分型内时本构方程导出了增量公式,它有效地减小了从微分型内时本构方程直接得到的增量公式所带来的误差。由此发展了弹塑性矩阵及切线刚度有限元法。对自增强厚壁圆筒内壁残余应力的分析以及对含对称缺口平板受自身平面内轴向循环变形时应力应变场的分析,表明所发展的方法具有精度高,收敛性好且便于工程应用等优点。

关键词 内时理论;增量方程;误差分析;弹塑性矩阵;有限元算法 **有限元法**
中国图书资料分类法分类号 0344.1

ABSTRACT An incremental formula is derived from integral form of endochronic plastic constitutive equation, which greatly reduces the error caused by the one which was directly obtained from differential form of the constitutive equation. An elastoplastic matrix is then proposed, based on which a stiffness finite element approach is developed. The analysis of the residual stress at the inner skin of an autofrettaged thick-walled cylinder agrees well with the experimental result. The calculated stress-strain fields of a double-edge-notched plate subjected to cyclic zero-to-tension loading are also quite reasonable. The numerical process is steady and quickly convergent, and the developed approach can easily be applied to practical engineering analysis.

KEY WORDS endochronic constitutive equation; incremental formula; error analysis; elastoplastic matrix; tangent stiffness finite element approach

0 引 言

1983年范镜泓首次提出了增量内时本构方程,并在此基础上发展了初应力有限元算法,为内时理论在具有复杂边值条件的非均匀场问题中的应用做了奠基性的工作^[1]。在此基础上,Valanis和范镜泓针对含对称长边缘缺口的OFHC铜板在自身平面内受单调和循环载荷时的应力应变分布进行了有限元计算,计算所预言的应力应变场以及缺口前缘处的棘轮效

* 收文日期 1991-04-08
国家自然科学基金资助项目

应都在随后进行的实验中得到了定性和定量的验证^[2,3]。此后该增量本构方程被广泛地应用于材料和结构问题的弹塑性分析中^[4-6]。Murakami 将其应用于应力或应变控制的本构响应分析^[4]，Watanabe 和 Atfuri 以此为基础，建立了含屈服面的内时增量本构方程，它几乎包含了已有的各种塑性本构方程为其特例^[7]，进而发展了切线刚度有限元法^[5]，范镜泓和彭向和则以上述增量本构方程为基础，提出了不含屈服面的内时弹塑性矩阵，并发展了相应的有限元分析软件^[6]，所发展的方法已被应用于大量非均匀场问题的分析中。但是该增量本构方程是由微分型本构方程直接推广得到的，虽然具有一定的物理背景^[1]，但当增量步长加大时，难免卷入很大的误差，甚至使问题的收敛性恶化。这种状况对存在严重塑性变形问题的分析十分不利。

本文以积分型内时本构方程为基础，提出了新的增量公式。如果忽略增量步中强化函数的微小变化和增量线段与其所代表的增量弧之间的差别，所提出的增量公式是精确的。误差分析的结果表明，采用原增量本构方程，如果在迭代过程中不进行修正，当增量步长较大时，误差将达到难以容忍的数值。以新的增量公式为基础，提出了增量弹塑性矩阵，发展了切线刚度有限元算法。对 35CrNiMoV 高强度钢自增强厚壁圆筒内表面残余应力的分析与实验结果吻合较好。对含缺口平板受面内轴向循环变形时的应力应变分析较为合理地给出了应力应变分布及缺口附近的应力松弛与棘轮等现象。

1. 积分型内时本构方程的增量公式

等温小变形条件下各向同性塑性不可压缩材料的内时塑性本构方程为：

$$S_{ij} = \int_0^z \rho(z-z') \frac{de'_{ij}}{dz'} dz' \quad (1)$$

$$\sigma_{kk} = 3K \varepsilon_{kk} \quad (2)$$

式中

$$dz = d\zeta/f(z); \quad d\zeta = \|de^*\| \quad (3)$$

$$de'_{ij} = de_{ij} - dS_{ij}/2G \quad (4)$$

$$de_{ij} = de_{ij} - \frac{1}{3} d\varepsilon_{kk} \delta_{ij}; \quad dS_{ij} = d\sigma_{ij} - \frac{1}{3} d\sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (5)$$

σ_{ij}, S_{ij} 分别为应力和偏应力张量分量； $\varepsilon_{ij}, e_{ij}, e'_{ij}$ 分别为应变、偏应变和塑性应变张量分量； ζ, z 为内时量度和内时标度； $\rho(z)$ 是核函数，取为

$$\rho(z) = \sum_{r=1}^3 E_r e^{-\alpha_r z} \quad (6)$$

显然 $\rho(z)$ 在区间 $(0, \infty)$ 是可微的。强化函数 $f(z)$ 采用如下常用形式

$$f(z) = c - (c-1)e^{-\beta z} \quad (7)$$

设材料已经历某种塑性应变史，它可以用内时标度 z_0 表征。当 $z > z_0$ 时，应力响应可表示为

$$S_{ij}(z) = \sum_{r=1}^3 S_{ij}^{(r)}(z) \quad (8)$$

$$S_{ij}^{(r)}(z) = e^{-\alpha_r \Delta z} S_{ij}^{(r)}(z_0) + \frac{\Delta e'_{ij}}{\Delta z} \frac{E_r}{\alpha_r} (1 - e^{-\alpha_r \Delta z}) \quad (9)$$

式中 $\Delta z = z - z_0$ 。从式(9)并注意到 $\Delta S_{ij} = S_{ij}(z) - S_{ij}(z_0)$ ，可以推得

$$\Delta S_{ij} = A \Delta e_{ij}^p + B_{ij} \Delta z \quad (10)$$

式中

$$A = \sum_{r=1}^3 K_r E_r; \quad B_{ij} = - \sum_{k=r}^3 K_r \alpha_r S_{ij}^{(r)}(z_n) \quad (11)$$

$$K_r = \frac{1 - e^{-\alpha_r \Delta z}}{\alpha_r \Delta z} \quad (12)$$

如果忽略增量过程中强化函数的微小变化和增量线段与增量弧之间的差别,式(10)为精确的增量应力表达式。如果 $\Delta z \rightarrow 0$, 可得

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta S_{ij} = \rho(0) \Delta e_{ij}^p + h_{ij} \Delta z \quad (13)$$

式(13)中 $h_{ij} = - \sum \alpha_r S_{ij}^{(r)}(z)$ 。式(13)恰为文献[1,3]中发展的增量本构方程。可见原增量本构方程仅在 $\Delta z \rightarrow 0$ 时是正确的,当 Δz 增大时,误差将急剧上升。下面考虑原增量方程可能导致的误差,特将式(10)与(13)中的 ΔS_{ij} 分别表示为 ΔS_{ij}^2 与 ΔS_{ij}^1 。容易求得

$$\Delta S_{ij}^{1(r)} = e^{-\alpha_r \Delta z} S_{ij}^{1(r)}(z_n) + \frac{\Delta e_{ij}^p E_r}{\Delta z \alpha_r} (1 - e^{-\alpha_r \Delta z}) \quad (14)$$

或

$$\Delta S_{ij}^{1(r)} = e^{-\alpha_r \Delta z} [E_r \Delta e_{ij}^p - \alpha_r S_{ij}^{1(r)}(z_n) \Delta z] \quad (15)$$

另一方面,由式(10)可得

$$\Delta S_{ij}^{2(r)} = K_r [E_r \Delta e_{ij}^p - \alpha_r S_{ij}^{2(r)}(z_n) \Delta z] \quad (16)$$

比较式(15)与式(16),并且假设 S_{ij}^1 与 S_{ij}^2 在时刻 z_n 是精确的,可以得到下述关系

$$\Delta S_{ij}^{1(r)} = \frac{e^{-\alpha_r \Delta z}}{k_r} \Delta S_{ij}^{2(r)} \quad (17)$$

如果强化函数为1,则在单轴加载时,式(16)是精确的,我们定义相对误差

$$\delta_\epsilon = \frac{\Delta S_{ij}^{1(r)} - \Delta S_{ij}^{2(r)}}{\Delta S_{ij}^{2(r)}} = \frac{e^{-\alpha_r \Delta z}}{k_r} - 1 \quad (18)$$

同理,如果在迭代过程中取式(13)的 $h_{ij}^{(r)} = -\alpha_r S_{ij}^{(r)}(z_n)$,可以得到

$$\Delta S_{ij}^{1n(r)} = \frac{\Delta S_{ij}^{2(r)}}{k_r} \quad (19)$$

$$\delta_{\epsilon_n} = \frac{1}{k_r} - 1 \quad (20)$$

表1 相对误差 δ_ϵ 和 δ_{ϵ_n} (%)

		0.0005%	0.0010%	0.0020%	0.0100%	0.0200%	0.0500%	0.1000%
50000	δ_{ϵ_n}	13.0	27.1	58.2	403.4	900.0	2400.0	4900.0
	δ_ϵ	-12.0	-22.9	-41.8	-96.6	-100.0	-100.0	-100.0
5000	δ_{ϵ_n}	1.26	2.52	5.08	27.1	58.2	172.4	403.4
	δ_ϵ	-1.24	-2.48	-4.92	-22.9	-41.8	-77.6	-96.6
500	δ_{ϵ_n}	0.125	0.25	0.50	2.52	5.08	13.0	27.1
	δ_ϵ	-0.125	-0.25	-0.50	-2.48	-4.92	-12.0	-22.9

容易发现 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \delta_\epsilon = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \delta_{\epsilon_n} = 0$ 。当 Δz 较大时, δ_ϵ 与 δ_{ϵ_n} 急剧上升,表1列出了对于一些典型的 α_r 值在不同的 Δz 值下所对应的误差。从表1中可以看出,如果 $\alpha_r = 50000$,当 Δz 为 0.0005% 时,相对误差值 δ_ϵ 及 δ_{ϵ_n} 即已达 10% 以上;而当 $\Delta z = 0.1\%$ 时,对于 $\alpha_r = 500$,误差

值 δ_i 与 δ_{i-1} 也在 20% 以上。应力响应对增量步长如此敏感无疑为数据值分析过程带来了很大的困难。在大多数场合下,尤其是在卷入较大塑性应变时,增量过程中的局部塑性应变变化往往达到 0.1% 以上,如果不采取相应的措施改善收敛性,那么采用原增量本构方程所导致的误差后果将是十分严重的。本文提出的方法可以避免这种误差,即使在增量较大时,也具有较好的收敛性。

2 增量弹塑性矩阵与有限元算法

将弹性关系式(4)代入式(10)可以得到增量弹塑性本构方程

$$\Delta S_{ij} = 2G\Delta e_{ij} + T_i B_{ij} \Delta z \quad (21)$$

式中

$$T_i = \frac{1}{1 + \frac{A}{2G}}, \quad 2G_r = AT_r \quad (22)$$

从方程(1)与(3),容易求得

$$\Delta z = \frac{\Delta e_{ij}^p \Delta e_{ij}^e}{f^2(z) \Delta z} \quad (23)$$

联立式(2)、(4)、(5)与式(21)、(23),可以推得增量应力 $\Delta \sigma_{ij}$ 与增量应变 $\Delta \varepsilon_{ij}$ 的关系,其矩阵形式为

$$\{\Delta \sigma\} = [D_{ep}] \{\Delta \varepsilon\} \quad (24)$$

其中

$$[D_{ep}] = [D_e] + \frac{2(G-G_r)}{H} [D_2] \quad (25)$$

式(24)是三维本构方程。对于一般的三维应力问题,

$$\{\Delta \sigma\} = (\Delta \sigma_{11}, \Delta \sigma_{22}, \Delta \sigma_{33}, \Delta \sigma_{12}, \Delta \sigma_{23}, \Delta \sigma_{31})^T \quad (26)$$

$$\{\Delta \varepsilon\} = (\Delta \varepsilon_{11}, \Delta \varepsilon_{22}, \Delta \varepsilon_{33}, 2\Delta \varepsilon_{12}, 2\Delta \varepsilon_{23}, 2\Delta \varepsilon_{31})^T \quad (27)$$

$$[D_e] = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_r & 0 & 0 \\ \text{对 称} & & & & G_r & 0 \\ & & & & & G_r \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$[D_2] = C_3 (B_{11}, B_{22}, B_{33}, B_{12}, B_{23}, B_{31})^T \cdot (\Delta e_{11}^e, \Delta e_{22}^e, \Delta e_{33}^e, \Delta e_{12}^e, \Delta e_{23}^e, \Delta e_{31}^e) \quad (29)$$

其中

$$C_1 = K + \frac{4}{3}G_r, \quad C_2 = K - \frac{2}{3}G_r,$$

$$C_3 = \frac{T_r}{2G_r f^2(z) \Delta z}, \quad H = 1 + C_3 B_{ij} \Delta e_{ij}^e$$

由此可见增量弹塑性矩阵 $[D_{ep}]$ 由 $[D_e]$ 与 $\frac{2(G-G_r)}{H} [D_2]$ 两部分构成。 $[D_e]$ 为类弹性矩阵,它决定于材料常数 E , ($r=1,2,3$) 和塑性应变增量 Δz 。在几何意义上, $[D_e]$ 表示变形开始时应力应变曲线对应于 Δz 部分的割线斜率,而 $\frac{2(G-G_r)}{H} [D_2]$ 则为塑性矩阵。

对于轴对称问题,式(26~29)变为

$$\{\Delta\sigma\} = (\Delta\sigma_r, \Delta\sigma_\theta, \Delta\sigma_z, \Delta\sigma_{rz})^T \tag{30}$$

$$\{\Delta\varepsilon\} = (\Delta\varepsilon_r, \Delta\varepsilon_\theta, \Delta\varepsilon_z, 2\Delta\varepsilon_{rz})^T \tag{31}$$

$$[D_r] = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_2 & 0 \\ & C_1 & C_2 & 0 \\ & & \text{对称} & C_1 & 0 \\ & & & & G_r \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$[D_2] = C_3(B_r, B_\theta, B_z, B_{rz})^T (\Delta e_r^e, \Delta e_\theta^e, \Delta e_z^e, \Delta e_{rz}^e) \tag{33}$$

对于平面问题:

$$\{\Delta\sigma\} = (\Delta\sigma_x, \Delta\sigma_y, \Delta\sigma_{xy})^T \tag{34}$$

$$\{\Delta\varepsilon\} = (\Delta\varepsilon_x, \Delta\varepsilon_y, 2\Delta\varepsilon_{xy})^T \tag{35}$$

如果是平面应力问题

$$[D_s] = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 \\ & C_1 & 0 \\ & & \text{对称} & G_y \end{bmatrix} \tag{36}$$

$$[D_2] = C_3(B_x, B_y, B_{xy})^T (e_x^e, y, \Delta e_y^e, 2\Delta e_{xy}^e) \tag{37}$$

如果是平面应变问题

$$[D_{ep}] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \tag{38}$$

其中

$$D_{ij} = D_{ij} - D_{i3}D_{3j} \quad i, j = 1, 2, 4 \tag{39}$$

而 D_{ij} 为式(25)中矩阵 $[D_{ep}]$ 中的对应元素.利用虚功原理容易求得

$$[K]_n^{-1} \{\Delta u\}_n = \{\Delta P\}_n \tag{40}$$

式中

$$[K]_n^{-1} = \sum_{j=1}^m \int_{V_j} [B]^T [D_{ep}]_n^{-1} [B] dV \tag{41}$$

$$\{\Delta P\}_n = \{P\}_n - \sum_{j=1}^m \int_{V_j} [B]^T \{\sigma\}_{n-1} dV \tag{42}$$

$\{\Delta P\}_n$ 是第 n 次增量节点载荷列阵; $\{\sigma\}_{n-1}$ 是直至 $n-1$ 次增量加载的应力矢量; $[K]_n^{-1}$ 是第 n 次增量加载第 i 次迭代的总刚度阵; $[B]$ 为应变矩阵.式(42)中 $\{\Delta P\}_n$ 的计算已计入由不平衡节点力导致的误差.其增量迭代过程可叙述如下:设已完成第 n 步增量加载的第 $i-1$ 次迭代,利用该次迭代的结果由式(41)求得刚度阵 $[K]_n^{-1}$,代入式(40)可得 $\{\Delta u\}_n$,进而依次求得每个高斯点处的 $\{\Delta e\}_n, \{\Delta \sigma\}_n, \{\Delta e\}_n, \{\Delta s\}_n, \{\Delta e^p\}_n, \Delta z$ 以及 $\{B\}_n$,并由下式

$$ERR = \max_{j=1}^N \frac{|\Delta z_j^i - \Delta z_j^{i-1}|}{\Delta z_j^i} \tag{43}$$

求得误差,其中 N 为高斯点总数.如果 ERR 大于控制误差 ERO ,则继续进行下一次迭代;否则将所求得的结果叠加到第 $n-1$ 次增量后的结果上依次求得 $\{\sigma\}_n, \{e\}_n, \{e^p\}_n, \{B\}_n, z_n, \{u\}_n$. 等后进入 $n+1$ 次增量加载过程.

上述计算过程的特点在于不采用屈服面的概念,因而避免了由于加卸载准则的引入而

导致的繁冗的判断和反复。另外新的增量公式能较精确地反映塑性变形的历史对应力状态的影响,因而可以有效地提高精度和改善收敛性。

3 自增强厚壁圆筒残余应力分析

自增强厚壁圆筒被广泛地用于不同的工业部门中,它的残余应力的计算一直是人们十分关心的问题,但至今仍未得到满意的解决。由于理论分析和实际测量之间的可观误差,使得人们不得不采用高达百分之几十的缩减系数以修正分析结果。显然这种方法很难被认为是合理的和可靠的。

在本部分中,用所提出的方法分析了厚壁圆筒的自增强残余应力并将其与实测结果^[4]进行了定量比较。厚壁圆筒的外径为55mm,内径为22mm,材料为35CrNi3MoV 高强度合金钢,其材料常数确定如下:

$$E_{1,2,3} = (3.8 \times 10^7, 1.24 \times 10^8, 4.95 \times 10^4) \text{MPa}$$

$$\sigma_{1,2,3} = (5.0 \times 10^4, 8.0 \times 10^3, 4.5 \times 10^2)'$$

$$f(z) = 1$$

自增强内压分别为6789,7055和7245atm。有限元分析采用具有2×2高斯积分点的八节点等参单元。在三个自增强压力下圆筒内表面环向残余应力 σ_θ^R 的分析结果与用 Sachs 镫孔法测得的结果^[4]列于表2。

表2 内表面 σ_θ^R 的计算值与测量值

$P(\text{atm.})$	$\sigma_\theta^{R(c)}(10\text{MPa})$	$\sigma_\theta^{R(E)}(10\text{MPa})$	ERR(%)
6789	-23.17	-25.38	8.71
7055	-28.16	-28.34	0.64
7245	-31.82	-30.35	4.80

上表中误差 ERR 由下式定义

$$\text{ERR} = \left| \frac{\sigma_\theta^{R(c)} - \sigma_\theta^{R(E)}}{\sigma_\theta^{R(E)}} \right| \quad (44)$$

$\sigma_\theta^{R(c)}$ 与 $\sigma_\theta^{R(E)}$ 分别为 σ_θ^R 的计算值与测量值。计算过程表明,基于新的增量公式的算法具有很好的稳定性和收敛性。

4 含对称缺口板的应力应变场分析

用基于新的增量公式的算法,分析了含对称缺口的平板受面内循环变形时缺口根部的应力应变变化和缺口前缘的应力应变分布。

平板材料为304不锈钢^[9],其材料参数确定如下:

$$E_{1,2,3} = (3.29 \times 10^6, 6.16 \times 10^4, 9.63 \times 10^3) \text{MPa}$$

$$\sigma_{1,2,3} = (2.86 \times 10^4, 1.97 \times 10^3, 8.7 \times 10)$$

卷入强化函数的诸参数如下(该强化函数考虑了循环过程中的循环强化、附加强化和记忆,

读者可参阅[10]):

$$y_{1,2,3,4} = (8.06 \times 10^{-1}, 1.97 \times 10^{-2}, 1.65 \times 10^{-2}, 1.665)$$

$$f_{2,3}, f_{3,2} = 1.24, 2.00$$

$$r_1, r_2 = 4.5 \times 10^1, 1.40$$

$$\beta_1, \beta_2 = 5.0, 8.0$$

$$\lambda, \rho, a_1, a_2 = 1.5, 6.0, 0, 0.5$$

由于对称,只取平板的四分之一进行分析,共分为36个单元135个节点(见图1),上表面受范围为0~0.08mm的循环位移,且假设为平面应变问题。图2是靠近缺口根部的A点的 $\sigma_t \sim e_t$ 关系。可以看到应力幅值逐渐松弛到一稳定值而平均应力逐渐松弛而趋于0。随循环过程的进行,应变不断累积,但其速率不断下降,这可归咎于平均应力的不断松弛。图3是靠近底部区域内的应力 σ_x 的分布及其随循环次数的变化,可以观察到沿整个截面的应力松弛。图4是 e_x 的分布及其在循环过程中的变化,可以看到应变 e_x 的分布及其在循环过程中的变化,应变 e_x 在缺口根部达到最大值。所观察到的现象与大量的实验观察在定性上是一致的。

对本问题的计算过程也表明了本文提出的方法是稳定的和收敛的。

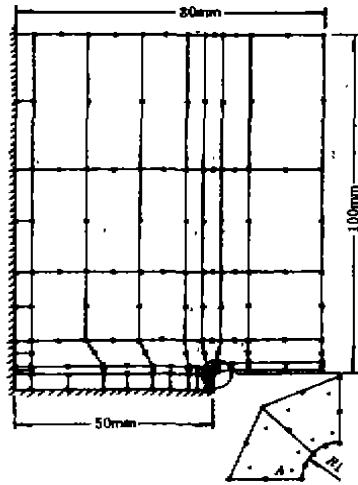


图1 含缺口板的有限元网格

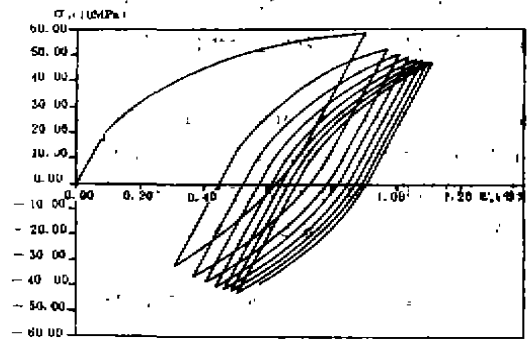


图2 A点处的 $\sigma_t \sim e_t$ 关系

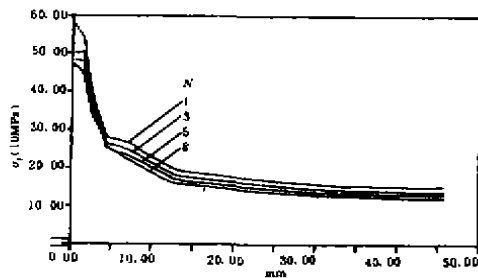


图3 缺口前缘的应力 σ_x 分布

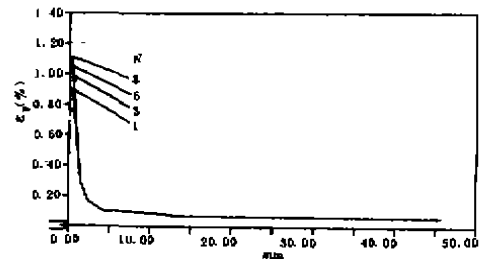


图4 缺口前缘的应变 e_x 分布

5 结 论

本文从积分型内时塑性本构方程导出了增量公式,它避免了由微分型本构方程推广得到的增量本构方程所带来的误差。由此得到了增量弹塑性矩阵,它包含了一个类弹性矩阵和一个塑性矩阵。进而发展了可以处理复杂边值条件的有限元分析方法。对自增强厚壁圆筒内壁残余应力的分析以及对含对称缺口的平板受面内循环变形的应力应变场的分析,都得到了满意的结果。计算还表明了所发展的方法在数值过程中有效性。

参 考 文 献

- 1 Fan Jinghong, Ph D. Dissertation, University of Cincinnati, USA, Manuscript Publications, University Microfilm International, June, 1983
- 2 Valanis K C, Fan J. Endochronic Analysis of Elastoplastic Strain Field in a Notched Plate. *J. Appl. Mech.*, 1983, 50: 789~793
- 3 Valanis K C, Fan J. A Numerical Algorithm of Endochronic Plasticity with Experimental Verification. *Computers and Structures*, 1984, 19: 717~724
- 4 Murakami H, Read H E. Endochronic Plasticity; Some Basic Properties of Plastic Flow and Failure. *Int. J. Solids and Structures*, 1986, 53: 395~403
- 5 Watanabe O, Atluri S N. A New Endochronic Approach to Computational Elasto-Plasticity: Example of a Cyclically Loaded Cracked Plate. *J. Appl. Mech.*, 1985, 52: 857~864
- 6 范镜泓, 彭向和. 内时弹塑性分析的一种新算法及其实验验证, *计算结构力学及其应用*, 1988, 5(4): 21~28
- 7 Watanabe O, Atluri S N. Internal Time, General internal Variable and Multi-Yield-Surface Theories of Plasticity and Creep; A Unification of Concepts. *Int. J. Plasticity*, 1986, 2: 37~57
- 8 曹纬. 厚壁筒自增强残余应力的分析和计算. 重庆大学硕士学位论文, 1984
- 9 Tanaka E et al. Effect of Strain Amplitudes on Nonproportional Cyclic Plasticity. *Acta. Mechanica*, 1985, 57: 167~182
- 10 彭向和, 范镜泓. 金属材料非比例循环塑性的本构描述. *重庆大学学报*, 1992, 15: