

127-130

带约束的确定 Duffing 系统的复杂运动

COMPLICATED MOTION OF DEFINITE DUFFING SYSTEM WITH CONSTRAINT

罗义银
Luo Yiyin

詹先义
Zhan Xianyi

(重庆大学工程力学系)

0322

摘要 本文就带约束的确定 Duffing 系统进行了数字模拟,得到了较之一般无约束系统更复杂的运动现象。

关键词 约束; Duffing 系统; 复杂现象、复杂运动。

中国图书资料分类法分类号 O322

ABSTRACT The definite Duffing system with constraint has been discussed, and the numerical simulations of some typical cases have been given. It is found that the motion phenomena in the definite Duffing system with constraint are more complex than those in the normal Duffing system without constraint.

KEY WORDS constraint; Duffing system; complicated phenomena

0 引言

对于 Duffing 系统的复杂运动,文章^[1,2]进行了详细的数值模拟,对于带运动约束的 Duffing 系统,尚无人讨论。本文对此进行了初步数值模拟,所得结果,较之^[1,2]更为复杂。

1 系统模型

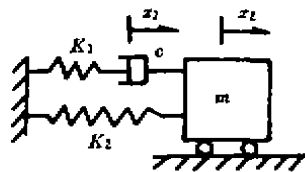


图1 系统模型

如图1所示的系统, K_2 为 Duffing 型硬弹簧,为了简便,令 $m = c = k_1 = k_2 = 1$, 系统运动方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - \dot{x}_2 + x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 - \dot{x}_2 - \dot{x}_1 + x_2 + x_2^3 = F \cos(Bt) \end{cases} \quad (1)$$

如果消去 x_1 坐标,则化为三阶非线性方程

$$\ddot{x} + \dot{x} + (2 + 3x^2)\dot{x} + x + x^3 = Q\cos(Bt + \varphi_0) \quad (2)$$

其中 $\varphi_0 = \text{tg}^{-1}B, Q = F/\sqrt{1+B^2}$ 。

2 数字模拟

对于方程(1),利用 $R-K$ 算法,给定初值条件,为了和^[2]比较,用 F^2 表达 F ,取不同的 B, F^2 及初值,步长取 $\Delta t = 2\pi/(400B)$,初步找到了系统的周期运动、突跳,分叉与混沌的复杂形态。部分结果如下表及图2~14所示。

$$(x_1 = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0, x_2 = 3.5, B = 9.5)$$

力幅 F^2	720	800	888	889	889.005	889.3	889.35	889.4	889.47
周期 $n(T)$	1	2	4	4	4	4	4	4	4
F^2	889.48	889.484	889.4843	889.48448	889.4844889		889.484488999		
n	4	4	4	4	4		4		
F_2	889.484489		889.48449		889.485	889.4945	889.495	889.498	889.5
n		3		3	3	4	4	4	3
F^2	889.55	900	902	950	1053	1055	1056	1058	1058.5
n	3	3	3	6	12	12	24	MT	MT
F^2	1060	1100	1120	1178	1220	1500	5000	50000	85000
n	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1	∞	∞

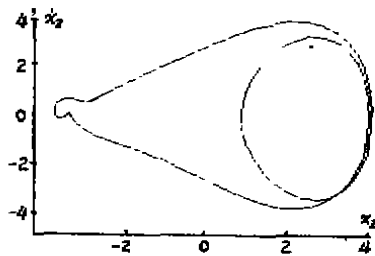


图2 周期 $1T$ 相图

$(B = 0.95, F^2 = 720, x_1 = 3.5, \dot{x}_2 = 0)$

$(x_1 = \dot{x}_1 = 0, \text{其他相同})$

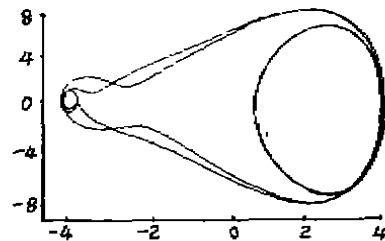


图3 周期 $2T$ 相图

$(0.95-800-3.5-0)$

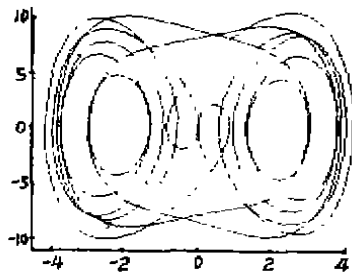


图4 周期 $3T$ 相图

$(0.95-889.484489-3.5-0)$

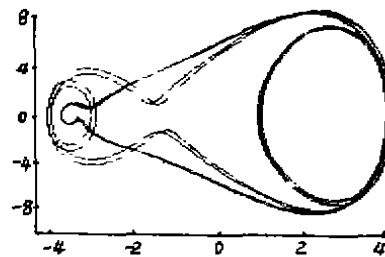


图5 周期 $4T$ 相图

$(0.95-484488999-3.5-0)$

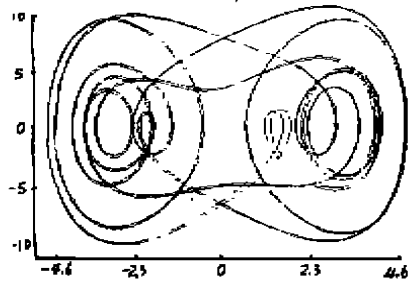


图 6 周期 $6T$ 相图
(0.95-1050-3.5-0)

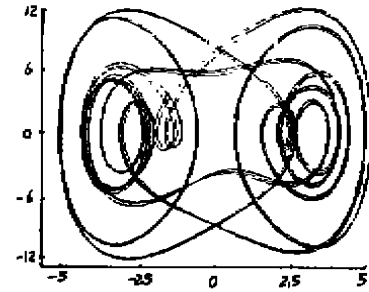


图 7 周期 $12T$ 相图
(0.95-1055-3.5-0)

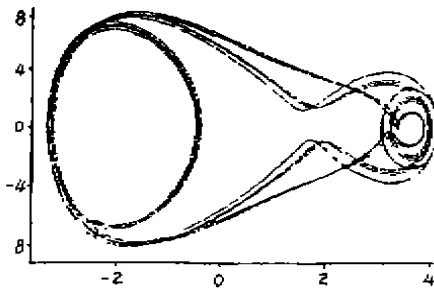


图 8 周期 $16T$ 相图
(1-1178-2-1)

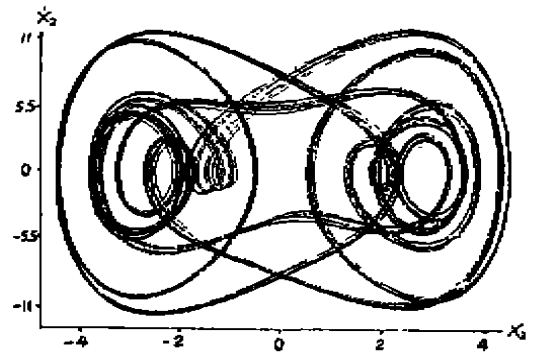


图 9 周期 MT 相图
(0.95-1058.5-3.5-0)

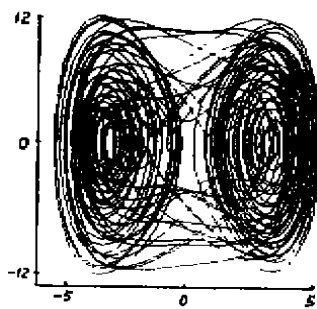


图 10 混沌运动相图
(0.95-1200-3.5-0)

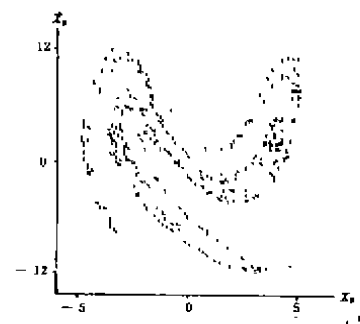


图 11 奇怪吸引子
(0.95-1200-3.5-0)

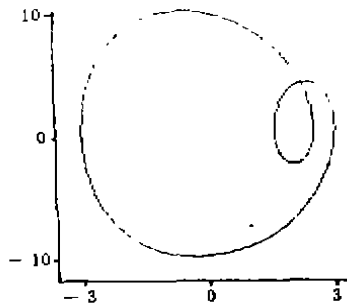


图 12 周期 $17T$ 相图
(5-500-1-1)

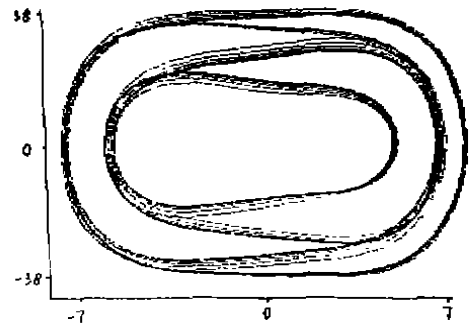


图 13 周期 MT 相图
(5-800-1-1)

3 结 论

(1) 当初值及频率一定时,周期倍化随力幅改变而变化,可呈现奇倍数 $1, 3, 6, \dots$, 又呈现偶倍数 $2, 4, 8, \dots$ 的周期运动,直至混沌。

(2) 力幅的微小改变会导致奇偶周期交替跳跃,如 $F^2 = 889.484489$ 时,为 $3T$ 周期运动, $F^2 = 889.484488999$ 时,确为 $4T$ 周期运动,其差值仅为 0.1×10^{-8} 。

(3) 初值改变,周期性态及相轨线发生显著变化。

(4) 相平面轨线随力幅、初值、频率变化而呈现复杂形态。

(5) 周期分叉遵从“对偶周期 \rightarrow 周期倍化 \rightarrow 概周期 \rightarrow 混沌”的规律。

(6) 奇怪吸引子形态与力幅、初值无关。

(7) 运动形态较一般 Duffing 系统^[1,2]更复杂,值得进一步研究运动约束的物理机制。

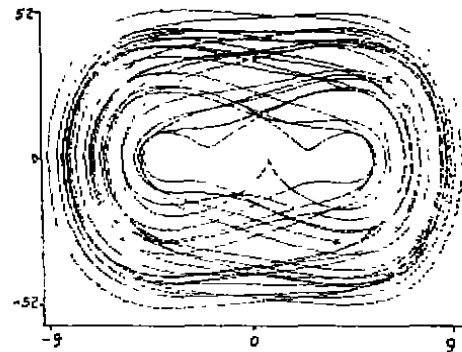


图 14 混沌运动(5-5000-1-1)

参 考 文 献

- 1 Ueda, Y, Int. Non-Linear Mech. 1987 20, 481~491
- 2 Fang T, Kunich A, Int. Non-Linear Mech. 1987, 20(5), 401~425