1992年3月　　重 庆 大 学 学 报　　Vol. 15. №. 2
第15卷第2期　　JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY　　Mar. 1992

两个多重临界点存在定理的应用*

THE APPLICATION OF TWO MULTIPLE CRITICAL POINT THEOREMS

何传江
He Chuanjiang
(重庆大学系统工程及应用数学系)

摘　要　推广了两个多重临界点存在定理。作为其应用的例子，主要讨论了二阶半线性椭圆方程边值问题 $-\triangle u = f(x,u)$，$x \in \Omega$，$u = 0$，$x \in \partial\Omega$ 有三个互异解的条件。

关键词　临界点定理 / 半线性椭圆方程；多重解

中国图书资料分类法分类号　O175.29

ABSTRACT　Two multiple critical point theorems are generalized. As an example of their applications, the conditions of the Dirichlet problem for the semilinear elliptic equation $-\triangle u = f(x,u)$ in Ω and $u = 0$ on $\partial\Omega$, which possesses three solutions are discussed.

KEY WORDS　critical point theorem / semilinear elliptic equation; multiple solutions

设 X 是 Banach 空间，S 是闭集，Q 是带边流形，边界为 ∂Q。我们说 S 与 ∂Q 挽着，如果 $S \cap \partial Q = \Phi$，且对 $\forall$ 映射 $\psi: X \to X$，$\psi|_{\partial Q} = id$ 有 $\psi(Q) \cap S \neq \Phi$。对 $c \in R$，记

$$f^c = \{x \in X; f(x) \geqslant c\}$$

$$f_c = \{x \in X; f(x) \leqslant c\}$$

$$K_c = \{x \in X; f(x) = c, f'(x) = 0\}$$

本文的主要结果是下面的几个定理：

定理1　设 $f \in C^1(X,R)$ 下方有界，满足 P.S 条件。S 与 ∂Q 挽着，这里 Q 同胚于 R^n 中的单位球。又设存在常数 $\alpha \in R$，使 $f(x) < \alpha$，$x \in \partial Q$；$f(x) > \alpha$，$x \in S$，那么 f 至少有三个临界点。

注1　在文献[1]中，条件 $f(x) > \alpha$；$x \in S$ 须由下式代替：$f(x) \geqslant \beta > \alpha$，$x \in S$。

定理2　设 $f \in C^1(X,R)$ 下方有界，满足 P.S. 条件。如果存在常数 α 和 $x_0 \in X$ 及 x_0 的某邻域 U；还存在 $\bar{x} \notin \bar{U}$，使得

$$f(x) > f(x_0) \qquad x \in \partial U \tag{1}$$

及

$$f(\bar{x}) \leqslant f(x_0) \tag{2}$$

* 收文日期　1990-10-25

则 f 至少有三个临界点，且其中有两个是局部极小点。

注 2 在文献[2]中，定理 2 是对 $f\in C^{2-0}(X,R)$ 来证明的。对于 $f\in C^{1}(X,R)$，(1)式须由下式代替： $f(x)\geqslant\alpha>f(x_0),x\in\partial V$， α 是某常数 (1)

定理1—2的证明分别基于文献[3]中定理1和文献[4]中定理1，它们分别是[1]和[2]中相应定理证明之修改。这里只给出证明大意，以突出修改之所在。

定理1的证明 设 $m=\inf\limits_{x\in X}f(x)$，根据通常的形变引理，$m$ 是 f 的临界值。

定义
$$c=\inf_{h\in\Gamma}\sup_{x\in Q}f(h(x))$$
此处
$$\Gamma=\{h\in C(X,X):h|_{\partial Q}=id\}$$
如果 $c>\alpha$，根据极大极小原理，c 是 f 的临界值，显然 $c>\alpha>m$；如果 $c=\alpha$，根据文献[3]的定理，c 也是 f 的临界值，显然 $c=\alpha>m$。余下证明同[1]。从而 f 至少有三个临界点。

定理 2 的证明 不妨设 $f(x_0)=0$。考虑水平集 f_0。由于 $f(x)>0,x\in\partial U$；$f(\bar{x})\leqslant 0,\bar{x}\notin\bar{U}$。因此 f_0 在 U 内部及外部分别存在子集 D_1,D_2。令 $m_i=\inf\limits_{x\in D_i}f(x)$， $i=1,2$

根据形变引理，$m_i(i=1,2)$ 均为 f 的临界值且 $m_i\leqslant 0$。为证第三个临界点的存在性，命
$$c=\inf_{g\in\Gamma}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}f(g(t))$$
$$\Gamma=\{g\in C([0,1],X)|g(0)=x_0,g(1)=\bar{x}\}$$
分两种情况：① 若 $c>0$，照搬山路引理的证明，c 为 f 的临界值，显然 $c>0\geqslant m_i,i=1,2$；② 若 $c=0$，根据文献[4]中定理 1，$K_c\cap\partial U\neq\Phi$，这时对应于临界值 c 的临界点位于 ∂U 上，自然不同于 m_i 对应的极小点。

下面仅仅给出定理2对非线性椭圆方程的应用。为了更清楚地看出本文工作的意义，我们只考虑下述问题：
$$\begin{cases}-\triangle u=f(x,u) & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{3}$$
其中 Ω 是 R^n 中光滑有界区域。

设 $f(x,u)$ 满足如下条件：

① $f(x,u)\in C(\bar{\Omega}\times R)$ 且 $f(x,0)=0$；

② 存在常数 $a_1>0,b(x)\in L^{p'}(\Omega)$，$p'$ 为 p 之共轭指数，使得
$$|f(x,u)|\leqslant a_1|u|^p+b(x)\text{。}1<p<\frac{n+2}{n-2},n\geqslant 3;$$
③存在常数 $a_2,a_3>0$，及 $c(x)\in L^1(\Omega)$ 使
$$\int_0^u f(x,t)\mathrm{d}t=F(x,u)\leqslant a_2|u|^2+a_3|u|+c(x)$$
此处 $a_2<\lambda_1/2,\lambda_1$ 是 $-\triangle|_{H_0^1(\Omega)}$ 的最小本征值；

④ 设 $\lim\limits_{u\to 0}f(x,u)/|u|=a_0(x)$ 关于 x 一致，且 $a_0(x)<\lambda_1$；

⑤ 存在 $u_1\in H_0^1(\Omega),u_1\neq 0$ 使
$$\int_\Omega|\nabla u_1|^2\mathrm{d}x\equiv\|\nabla u_1\|^2\leqslant 2\int_\Omega F(x,u_1)\mathrm{d}x$$
定理3 设 $f(x,u)$ 满足上述条件 ①—⑤，则问题(3) 在 $H_0^1(\Omega)$ 中至少有三个解。

证明 根据条件③

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x \\
&\geqslant \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \int_\Omega [a_2|u|^2 + a_3|u| + c(x)]\mathrm{d}x \\
&\geqslant \frac{1}{2}\lambda_1\|u\|^2 - a_2\|u\|^2 - a_3\|u\| - c_1
\end{aligned}
$$

此处　$c_1 = \int_\Omega c(x)\mathrm{d}x$。

可见，I 下方有界，且 $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} I(u) = +\infty$。

根据条件④，　$\lim\limits_{|u|\to 0} F(x,u)/u^2 = \frac{1}{2}a_0(x)$，关于 x 一致。　对于任意给定的 $u \in H_0^1(\Omega)$，且 $u \neq 0$，　$\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} F(x,\varepsilon u)\varepsilon^{-2} = \frac{1}{2}a_0(x)|u|^2$

根据 Lebesgue 控制收敛定理

$$
\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\Omega \varepsilon^{-2}F(x,\varepsilon u)\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{1}{2}a_0(x)|u|^2\mathrm{d}x < \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega |u|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x
$$

可见，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，我们有

$$
\int_\Omega F(x,\varepsilon u)\mathrm{d}x < \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(\varepsilon u)|^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\|\nabla(\varepsilon u)\|^2
$$

因此，对充分小的 $\varepsilon > 0$，

$$
I(\varepsilon u) = \frac{1}{2}\|\nabla(\varepsilon u)\|^2 - \int_\Omega F(x,\varepsilon u)\mathrm{d}x > \frac{1}{2}\|\nabla(\varepsilon u)\|^2 - \frac{1}{2}\|\nabla(\varepsilon u)\|^2 = 0
$$

从而，对 $\forall\, u \in H_0^1(\Omega)$，$u \neq 0$，令 $\|u\| = \rho > 0$，当 ρ 充分小时，$I(u) = I(\rho \cdot \frac{u}{\|u\|}) > 0$。

$I \in C^1(H_0^1(\Omega), R)$ 且满足 PS 条件，其验证是标准的并注意到 $I(0) = 0$，$I(u_1) \leqslant 0$。根据定理 2，定理 3 获证。

注 3　(a) 这个结论推广了文[2] 中的相应结果：条件④在文[2] 中由 $\lim\limits_{u\to 0} f(x,u)/|u| = 0$ 代替等。

(b) 基于文[5]，我们可以把这个结果推广到拟线性和各向异性情形。

(c) 基于本文的讨论，同样可考虑文[1] 中给出的三个应用，其对应的条件也可作相应的削弱，这里就不赘述了。

参考文献

1　刘嘉荃，李树杰. 多重临界点存在定理及其应用. 科学通报，1984，29(17)：1025～1027

2　李树杰. 一个多临界点定理及其在非线性偏微分方程中的应用. 数学物理学报，1984，4(2)：135～140

3　杜一宏. 一个形变引理及其应用. 科学通报，1990，(2)：96～98

4　戚桂杰. 山路引理的推广. 科学通报，1986，(10)：724～727

5　陆文端. 一类二阶拟线性椭圆方程的 Dirichlet 问题. 四川大学学报，1986，(1)：28～39