⑲ 111-115

对称自治的次二次守恒系统的极小周期解*

THE MINIMAL PERIODIC SOLUTIONS OF SYMMETRICAL AUTONOMOUS SUBQUADRATIC CONSERVATIVE SYSTEMS

O175.1

张 世 清
Zhang Shiqing
(重庆大学系统工程及应用数学系)

摘 要 利用极小化方法研究了一类对称自治的次二次二阶哈米尔顿系统的非常值极小周期解的存在性。

关键词 守恒系统;对称势;极小周期解
中国图书资料分类法分类号 O176.3

ABSTRACT The existence of the minimal periodic solutions of the non-constant of a class of symmetrical autonomous subquadratic second order Hamiltonian systems is studied with minimization.

KEY WORDS conservative system; symmetry potential; minimal periodic solution.

0 引 言

研究下面的自治二阶 Hamilton 系统(1)的给定极小周期的非常值周期解的存在性具有重要的理论和实用意义,解决这一问题也有着较大的难度。

$$\ddot{x} + V'(x) = 0, \ \forall x \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

其中 n 是一自然数,$V: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 是实值函数,而 V' 表示 V 的梯度。

1978年 P. Rabinowitz 在先驱性工作中[10]首次用变分方法证明了在零点和无穷远点处均超二次的自治一阶和二阶 Hamilton 系统存在着无穷多个任意给定周期的非常值周期解,并提出了极小周期的猜测。继 P. Rabinowitz 的工作之后,Ambrosetti-Mancini, Ambrosetti-Coti Zelati, Clarke-Ekeland, Ekeland-Hofer, Girardi-Matzeu, Solimini-Terracini、邓诗涛,龙以明以及作者本人等都曾对此进行过研究,目前,已有数百篇研究 Hamilton 系统周期解的重要论文发表。

作者在本文中研究了对称守恒系统的极小周期解的存在性。通过极小化变分泛函获得了如下结果:

定理 1 设 V 满足以下条件:

---

* 收文日期 1992-01-14
重庆大学青年教师基金资助

(V1) $V \in C^2(\boldsymbol{R}^n; \boldsymbol{R})$;

(V2) $V(-x) = V(x), \forall x \in \boldsymbol{R}^n$;

(V3) $V'(0) \neq 0$;

(V4) 存在 $\omega > 0, r > 0$ 使

$$V(x) \leqslant \frac{\omega}{2}|x|^2, \quad \forall |x| > r;$$

则 $\forall T < 4/\sqrt{\omega}$，二阶 Hamilton 系统(1)具有一个以 T 为极小周期的非常值周期解。

1 定理 1 的证明

令 $S_T = \boldsymbol{R}/(\frac{2\pi}{T}Z)$，定义空间 E_T 如下：

$$E_T = \{x \mid x \in W^{1,2}(S_T; \boldsymbol{R}^n),\ x(t + \frac{T}{2}) = -x(t)\}$$

赋予 E_T 的模为：

$$\|x\|_{E_T} = \left(\int_0^T |x|^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_0^T |\dot{x}| dt\right)^{1/2}$$

在 E_T 上定义泛函 ψ：

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\int_0^T |\dot{x}(t)|^2 dt - \int_0^T V(x) dt,\ \forall x \in E_T$$

有下面的关键性引理：

引理 1([4]) ψ 在 E_T 上的临界点也是 ψ 在 $W^{1,2}(S_T; \boldsymbol{R}^n)$ 上的临界点，从而是(1)的古典解。

证 设 $\bar{x}(t)$ 是 ψ 在 E_T 上的临界点，则我们有

$$\langle \psi'(\bar{x}(t)), v \rangle = 0,\ \forall v \in E_T,$$

即 $\psi'(\bar{x}(t)) \in E_T^{\perp}$。

由于 $\psi'(\bar{x}) = \ddot{\bar{x}} + V'(\bar{x})$，故有：

$$\psi'(\bar{x}(t + T/2)) = \frac{d^2}{dt^2}(-\bar{x}(t)) + V'(-\bar{x}(t))$$

$$= -\ddot{\bar{x}}(t) - V'(-\bar{x}(t)) = -\psi'(\bar{x}(t)),$$

即 $\psi'(\bar{x}(t)) \in E_T$，故

$$\psi'(\bar{x}(t)) \in E_T^{\perp} \cap E_T = \{0\}$$

因此有

$$\ddot{\bar{x}}(t) + V'(\bar{x}(t)) = 0,\ \forall t \in \boldsymbol{R}$$

引理2 对 $\forall x \in E_T, \int_0^T x(t) dt = 0$

证 $\int_0^T x(t) dt = \int_0^{T/2} x(t) dt + \int_0^{T/2} x(t + T/2) dt = 0$

引理 3 对 $\forall x \in E_T$，成立以下不等式：

$$\|x\|_{L^2} \leqslant \frac{T}{2\pi}\|\dot{x}\|_{L^2}$$

$$\|x\|_{L^\infty} \leqslant \frac{\sqrt{T}}{4}\|\dot{x}\|_{L^2}$$

$$\|\dot{x}\|_{L^2}^2 \leqslant \|x\|_{E_T}^2 = \|x\|_{L^2}^2 + \|\dot{x}\|_{L^2}^2 \leqslant \left(1 + \frac{T^2}{4\pi^2}\right)\|\dot{x}\|_{L^2}^2$$

证：1)　由引理 2 及 Wirtinger 不等式即得。

2)
$$\begin{aligned}\|x\|_{L^\infty} &= \max_{t\in[0,T]}|x(t)| \\ &= \frac{1}{2}\max_{t\in[0,T]}\left|x\left(t+\frac{T}{2}\right) - x(t)\right| \\ &= \frac{1}{2}\max_{t\in[0,T]}\left|\int_t^{t+T/2}\dot{x}(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\max_{t\in[0,T]}\left(\int_t^{t+T/2}1^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_t^{t+T/2}|\dot{x}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{T}{2}\right)^{1/2}\left(\int_0^{T/2}|\dot{x}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{T}}{4}\|\dot{x}\|_{L^2}\end{aligned}$$

3)　由不等式 1),3) 式显然成立。

引理 4　ψ 在 E_T 上有下界

证　由 $(V4)$ 及引理 3 的不等式 1) 即知：

当 $\|x\|_{L^\infty} \geqslant r$ 时，我们有：

$$V(x) \leqslant \frac{\omega}{2}|x|^2,$$

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{2}\int_0^T|\dot{x}|^2\mathrm{d}t - \int_0^T V(x)\mathrm{d}t \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|\dot{x}\|_{L^2}^2 - \frac{\omega}{2}\|x\|_{L^2}^2 \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|\dot{x}\|_{L^2}^2 - \frac{\omega}{2}\cdot\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\|\dot{x}\|_{L^2}^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega}{2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\right)\|\dot{x}\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

因为 $T < 2\pi/\sqrt{\omega}$，故 $\frac{1}{2} - \frac{\omega}{2}(\frac{T}{2\pi})^2 > 0$. 即当 $\|x\|_{L^\infty} \geqslant r$ 时，$\psi(x) \geqslant 0$. 又因 V 在 R^n 上连续，故存在 $M > 0$，使对 $\forall\ x \in \Omega = \{x \in R^n \mid \|x\|_{L^\infty} \leqslant r\}$，$V(x) \leqslant M$，即 $\forall\ x \in \Omega$ 有：

$$\psi(x) \geqslant -\int_0^T V(x)\mathrm{d}t \geqslant -TM,$$

综上可知，ψ 在 E_T 上有下界。

引理 5　ψ 在 E_T 上满足 Palais-Smale 紧性条件。

证　若 $\psi(x_n) \to c$，$\psi'(x_n) = \ddot{x}_n + V'(x_n) \to 0$，则我们要证 x_n 在 E_T 中有强收敛子列。

若 $\|x_n\|_{L^\infty}$ 有界，则易知 x_n 在 E_T 中有强收敛子列。

不妨设 $\|x_n\|_{L^\infty} \to +\infty$，则当 n 充分大时，由 $(V4)$ 知，

$$\begin{aligned}c + 1 \geqslant \psi(x_n) &= \frac{1}{2}\int_0^T|\dot{x}_n|^2\mathrm{d}t - \int_0^T V(x_n)\mathrm{d}t \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|\dot{x}_n\|_{L^2}^2 - \frac{\omega}{2}T\|x_n\|_{L^\infty}^2\end{aligned}$$

故
$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\|\dot{x}_n\|_{L^2}}{\|x_n\|_{L^\infty}} \leqslant \sqrt{\omega T},$$

另一方面，由引理 3 的不等式(2)知，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|\dot{x}_n\|_{L^2}}{\|x_n\|_{L^\infty}}\geqslant\frac{4}{\sqrt{T}}.$$

因为 $T<4/\sqrt{\omega}$，故上述两个不等式矛盾。因此 $\|x_n\|_{L^\infty}$ 有界，x_n 在 E_T 中有强收敛子列。

引理 6 X 是 Banach 空间，$f\in C^1(X,R)$ 在 X 上满足 *Palais-Smale* 紧性条件且有下界，则存在 $x_0\in X$ 使 $f(x_0)=\inf\limits_{x\in X}f(x)$，即 f 在 X 上达到最小值。

有了上述准备工作，我们现在即可给出定理 1 的证明：

证 由引理 4，5，6 知，ψ 在 E_T 上具有一个极小值点 $x_0(t)$，显然极小值点的极小周期是 T，进一步，$x_0(t)$ 是非常值的。因为否则若 $x_0(t)\equiv c$，由于 $x_0\in E_T=\{x\in W^{1,2}(S_T;R^n)|x(t+\frac{T}{2})=-x(t)\}$，故 $x_0(t)\equiv 0$，因为 $x_0(t)\equiv 0$ 是方程(1)的解，故 $V'(0)=0$。但由条件(V3)，这是不可能的。故 $x_0(t)$ 是系统(1)的一个以 T 为极小周期的非常值周期解。

2 注 记

在势函数 C^2 对称的假设下，对在 E_T 上定义的泛函 ψ 应用山路引理及其监界点的 *Morse* 指标估计，我们解决了 *Rabinowitz* 在[10]中提出的极小周期猜测，即我们得到如下重要结果：

定理 2 假设 V 满足以下条件：

(V1) $V\in C^2(R^n,R)$，

(V2) 存在 $\mu>2$ 及 $r>0$，使得：

$$0<\mu V(q)\leqslant\langle V'(q),q\rangle,\ |q|\geqslant r,$$

(V3) $V(q)\geqslant V(0)=0,\ \forall\ q\in R^n$，

(4V) $V(q)\leqslant\frac{\omega}{2}|q|^2,\forall\ q\in\{q\in R^n||q|\leqslant\varepsilon\}$，

(V5) $V(-q)=V(q),\forall\ q\in R^n$，

则 $\forall\ T<2\pi/\sqrt{\omega}$，二阶 *Hamilton* 系统：

$$\ddot{x}+V'(x)=0$$

至少有一个以 T 为极小周期的非常值周期解。

显然，当势函数 V 为奇函数，即 $V(-x)=-V(x)$ 时，且若 V 满足条件(V3)，那么 $V(x)\equiv 0$，因此 V 不可能再满足条件(V2)，故 Rabinowitz 极小周期猜测对奇的势函数无意义。若举反例否定 Rabinowitz 猜测，只能在既不奇又不偶的超二次函数类中寻找。

关于超二次对称守恒系统的次调和解，我们得到如下结果：

定理 3 设 V 满足定理 2 中的条件(V1)—(V5)，则 $\forall\ T<2\pi/\sqrt{\omega}$，二阶 Hamilton 系统(1)存在一列以 kT 为极小周期的次调和解。

最后，作者猜测，去掉对称性条件，定理1仍成立，定理2很可能不成立。

参 考 文 献

1 Ambrosetti A，Coti Zelati V. Solutions with minimal period for Hamiltonian systems in a potential well. Ann. Inst. H. Poincare Analyse nonline aire 1987，4(3)：275～296

2 Ambrosetti A，Mancini G. Solutions of minimal period for a class of convex Hamiltonian systems. Math Ann.

1981,255:405～421

3 Clarke F,Ekeland I. Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period.Comm Pure Appl Math 1980 33:103～116

4 Coti Zelati V. The periodic solutions of n-boby-type problems.Ann. Inst. H. Poincaré Analyse nonlinéaire 1990 7:477～492

5 Deng S. Minimal period solutions of a class of Hamiltonian equation systems.Acta Math. Sinica 1984 27:664～675

6 Ekeland I,Hofer H. Periodic solutions with prescribed period for convex autonomous Hamiltonian systems.Invention Math. 1985 81:155～188

7 Girardi M,Matzeu M. Solutions of minimal period for a class of nonconvex Hamiltonian systems and applications to the fixed energy,Nonlinear Anal TMA 1986 10:371～382

8 Long Yiming. The minimal period problem of periodic solutions for autonomous superquadratic second order Hamiltonian systems. Research Report,Tianjin Nankai Inst of Math,1991,1～32

9 Solimini S,Terracini S. A multiplicity result for periodic solutions of autonomous conservative systems.Nonlinear Analysis TMA 1991 16:903～916

10 Rabinowitz P. Periodic solutions of Hamiltonian systems. Comm Pure Appl Math. 1978 31:157～184

11 Zhang Shiqing.The study of the minimal periodic solutions of Hamiltonian systems. Doctoral Thesis,Nankai University,1991