1993年3月 重 庆 大 学 学 报 Vol. 16, №. 2
第16卷第2期 JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY Mar. 1993

(21)

次二次二阶 *Hamilton* 系统的极小周期解*

113-119

The Minimal Periodic Solutions to The Subquadratic Second Order Hamiltonian Systems

张世清

Zhang Shiqing

(重庆大学系统工程及应用数学系)

O175

摘　要　利用 Rabinowitz 鞍点定理及其临界点的 Morse 指标估计研究了二类非凸次二次二阶自治 Hamilton 系统的极小周期解的存在性。

关键词．二阶 Hamilton 系统；极小周期解；鞍点定理；Morse 指标　　哈密顿系统

中国图书资料分类法分类号　O176.3

ABSTRACT　The existence of the minimal periodic solutions to two classes of the nonconvex subquadratic autonomous second order Hamiltonian systems is studied on the basis of the Rabinowitz's saddle point theorem and the Morse index estimation of its critical points.

KEY WORDS　second order Hamiltonian system; minimal periodic solution; saddle point theorem; Morse index

1　引言及主要结果

人们利用 Clarke-Ekeland 共轭变分原理使凸 Hamilton 系统的极小周期解的研究取得了十分完美的结果，见 Ekeland 的专著[1]。

非凸 Hamilton 系统的极小周期解的研究十分困难，据作者所知，到目前为止，仅有三篇文章[3,4,6]研究没有任何凸性假设的 Hamilton 系统的极小周期解。

最近，龙以明[6]提出了一个关于非凸二阶 Hamilton 系统的新的变分方法，并证明了一个新的 Morse 指标迭代不等式，进而利用 Lazer-Solimini 关于 Rabinowitz 鞍点的 Morse 指标估计来研究超二次二阶 Hamilton 系统的极小周期的 Rabinowitz 猜测。

本文研究了二类次二次非凸二阶 Hamilton 系统的极小周期解问题，我们得到如下几个结果。

定理1　考虑二阶 Hamilton 系统：

$$\ddot{x} + V'(x) = 0, \quad \forall x \in R^n, \tag{1}$$

其中 n 是正整数，$V: R^n \to R$ 是实函数，V' 表示 V 的梯度。

假设 V 满足以下条件：

---

* 修改稿收到日期　1992-12-29

(V1) $V \in C^2(R^n;R)$.

(V2) 对任意 $\forall x \in R^n, V(x) \neq 0$,

(V3) 存在 $M > 0$ 使

$$|V'(x)| \leqslant M, \quad \forall x \in R^n,$$

(V4) $V(x) \to +\infty, \quad |x| \to \infty$,

则存在 $T_0 > 0$,使 $\forall T > T_0$,(1) 具有一个极小周期为 $T/k(1 \leqslant k \leqslant n+1)$ 的非常值周期解。

定理 2 假设 V 满足定理 1 中的条件(V1)—(V4) 及条件:

(V5) V 在 R^n 上严格凸,

则存在 $T_0 > 0$ 使对 $\forall T > T_0$,(1) 具有一个极小周期为 T 的非常值周期解。

定理 3 假设 V 满足条件(V1) 及

$(V2)'$ $V(x) < 0, \forall x \in R^n$,

$(V3)'$ $|V'(x)| \to 0, |x| \to \infty$,

$(V4)'$ $V(x) \to 0, |x| \to \infty$,

则 $\forall T > 0$,(1) 都具有一个极小周期为 $T/k(1 \leqslant k \leqslant n+1)$ 的非常值周期解。

定理 4 假设 V 满足条件(V1),$(V2)'$—$(V4)'$ 及(V5)。

则对 $\forall T > 0$,(1) 具有一个极小周期为 T 的非常值周期解。

2 主要结果的证明

我们下面主要利用 Rabinowitz 鞍点定理及鞍点的 Morse 指标估计、指标迭代不等式来研究定理1—4。

引理 1[8] 设 E 是实 Banach 空间,$E = V \oplus Z$,其中 $\dim V < \infty$,假设 $I \in C^1(E,R)$ 满足 *Palais-Smale* 条件及

(S1) 在 V 中存在 O 的一个有界邻域 D 及常数 α 使得 $I|_{\partial D} \leqslant \alpha$,

(S2) 存在常数 $\beta > \alpha$ 使得 $I|_Z \geqslant \beta$.

则 I 有一个临界值 $C \geqslant \beta$。

引理2 (Lazer-Solimini[5]) 假设 $I \in C^1(E;R)$ 满足 Rabinowitz 鞍点定理的条件,那么存在 I 的一个临界点 $\bar{x}$,其 Morse 指标 $i_T(\bar{x}) \leqslant \dim V$

下面我们利用龙以明提出的变分公式:

令 $S_T = R / \left(\frac{2\pi}{T}Z\right)$,在连续函数空间 $C(S_T;R^n)$ 上定理 Z_2 一作用 $Z_2 = \{\delta_0, \delta_1\}$:

$\delta_0 x = x$,

$\delta_1 x(t) = x(-t), \forall x \in C(S_T;R^n)$

对 $\forall x \in E_T \equiv W^{1,2}(S_T;R^n)$ 赋予范数:

$$\|x\|_{E_T} = \left(\int_0^T |\dot{x}|^2 dt + T|x(0)|^2\right)^{1/2},$$

由 Poincaré 不等式,$\|\|_{E_T}$ 等价于通常的 $W^{1,2}$— 范数。则 E_T 是一个 Hilbert 空间,下面用$(\cdot,\cdot)_T$ 表示 E_T 中相应的内积。令

$$SE_T = \{x \in E_T | \delta_1 x = x\},$$

$$L_T = \{x \in E_T | x(0) = 0\},$$

$$SL_T = \{x \in L_T \mid \delta_1 x = x\}。$$

则我们有 E_T— 正交分解，

$$E_T = L_T \oplus R^n, SE_T = SL_T \oplus R^n,$$

注意到对给定的 $T > 0$ 和 $x \in L_T$，若 $x(t)$ 关于 $t = 0$ 奇(偶)，则它也关于 $t = T/2$ 奇(偶)。令 $\psi(x) = \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - V(x) \right\} dt, \forall x \in W^{1,2}(S_T, R^n)$

引理 3　([6]) 设 V 满足条件(V1)，则 $\forall$ T > 0 成立，

1°　$\psi \in C^2(E_T; R)$，

2°　$<\psi'(x), y>_T = \int_0^T (\dot{x} \cdot \dot{y} - V'(x) \cdot y) dt, \forall x, y \in E_T$

3°　$<\psi''(x)y, z>_T = \int_0^T (\dot{y} \cdot \dot{z} - V''(x)y \cdot z) dt, \forall x, y, z \in E_T$

4°　ψ 是 Z_2— 不变的，即

$$\psi(\delta_i x) = \psi(x), \forall x \in E_T, i = 0, 1$$

5°　若用 SE_T 代替 E_T，则上述 1°—4° 仍成立。

引理 4[6]　假设 V 满足条件(V1)，则

1°　若 $x \in SE_T$ 是 ψ 在 SE_T 上的临界点，则它也是(1)的一个 $C^2(S_T; R^n)$ 一解，且它关于 $t = 0$ 是偶的。

2°　反之，若 $x \in C^2(S_T; R^n)$ 是(1)的一个解，且它关于 $t = 0$ 是偶的，则 $x \in SE_T$ 且是 ψ 在 SE_T 上的一个临界点。

引理 5　假设 V 满足条件(V1)—(V4)，则 ψ 在 SE_T 上满足 *Palais-Smale* 紧性条件，即对 $\forall \{x_k\} \subset SE_T$，若存在 $C > 0$ 使 $\forall k \in N$，

$|\psi(x_k)| \leqslant C$，且 $\psi'(x_k) \to 0, k \to \infty$，那么$\{x_k\}$ 有强收敛子列。

证　令 $y_k = x_k - x_k(0)$，由 $\psi'(x_k) \to 0$ 知，存在 $k_0 > 0$ 使当 $k > k_0$ 时有：

$$<\psi'(x_k), y_k>_T \leqslant \|y_k\|_{SE_T} = \|\dot{x}_k\|_2 \tag{2}$$

因为 $y_k(0) = y_k(T) = 0$，故由 Poincaré 不等式有

$$\|y_k\|_2 \leqslant \frac{T}{\pi} \|\dot{x}_k\|_2 \tag{3}$$

由此及条件(V3) 知，

$$\begin{aligned} <\psi'(x_k), y_k> &= \int_0^T |\dot{x}_k|^2 dt - \int_0^T V'(x_k) \cdot y_k dt \\ &\geqslant \|\dot{x}_k\|_2^2 - \frac{T}{\pi} M \|\dot{x}_k\|_2 \end{aligned} \tag{4}$$

由式(2)、(4) 即知 $\|\dot{x}_k\|_2$ 有界

又由 $\psi(x_k)$ 的有界性知，存在 C_1 使

$$C_1 \leqslant \frac{1}{2}\|\dot{x}_k\|_2^2 - \int_0^T (V(x_k) - V(x_k(0))) dt - \int_0^T V(x_k(0)) dt$$

由条件(V3) 及 Poincaré 不等式知，

$$\int_0^T (V(x_k) - V(x_k(0))) dt \leqslant C_2$$

又因 $\|\dot{x}_k\|_2$ 有界，故存在 C_3 使

$$-\int_0^T V(x_k(0)) dt = -TV(x_k(0)) \geqslant C_3$$

故由条件$(V4)$即知，存在$C_4>0$使

$$|x_k(0)|\leqslant C_4,\qquad \forall k\in N,$$

综上述即知存在$C_5>0$使

$$\|x_k\|_{SE_T}\leqslant C_5$$

故x_k有子列，仍记为x_k，它在SE_T中弱收敛，在L^∞中强收敛于$x\in SE_T$，因此$\langle V'(x_k),(x-x_k)\rangle_T$一致收敛于0，因为$\psi'(x_k)\to 0$且$x-x_k$是$SE_T$有界，故

$$-\lim_{k\to\infty}\|\dot{x}_k\|_2^2+\|\dot{x}\|_2^2=\lim_{k\to\infty}\int_0^T\dot{x}_k\cdot(\dot{x}-\dot{x}_k)\,dt$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left\{<\psi'(x_k),x-x_k>+\int_0^T V'(x_k)\cdot(x-x_k)dt\right\}=0$$

因此x_k在SE_T中强收敛于x。

引理6　设V满足定理1中的条件$(V1)$—$(V4)$，则ψ在SE_T上满足鞍点定理的条件$(S1)$和$(S2)$。

证：　因为$SE_T=SL_T\oplus R^n$，且对$\forall$ a $\in R^n$，

$$\phi(a)=-TV(a)\to-\infty,\ |a|\to\infty,$$

又对$\forall x\in SL_T$，

$$\phi(x)=\int_0^T\left\{\frac{1}{2}|\dot{x}|^2-V(x)\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^T|\dot{x}|^2dt-TV(0)-\int_0^T\{V(x)-V(0)\}dt$$

$$=\frac{1}{2}\|\dot{x}\|_2^2-TV(0)-\int_0^T\int_0^1<V'(sx(t)),x(t)>dsdt$$

由条件$(V3)$，Hölder不等式及Poincaré不等式有

$$\int_0^T\int_0^1<V'(sx(t)),x(t)>dsdt$$

$$\leqslant M\int_0^T|x(t)|dt\leqslant M\sqrt{T}\|x\|_2$$

$$\leqslant\frac{MT^{3/2}}{\pi}\|\dot{x}\|_2$$

即

$$\phi(x)\geqslant\frac{1}{2}\|\dot{x}\|_2^2-\frac{MT^{3/2}}{\pi}\|\dot{x}\|_2-TV(0)$$

故当$\|x\|_{SL_T}=\|\dot{x}\|_2\to\infty$时，$\phi(x)\to+\infty$。

在Rabinowitz鞍点定理中令　$Y=R^n$，$Z=SL_T$，即知$\psi(x)$在SE_T上满足条件(S1)、(S2)。

引理7　设V满足条件(V1)及$(V2)'$—$(V4)'$，则ψ在SE_T上满足$(PS)^+$条件，即对$c>0$及$\{x_k\}\subset SE_T$：

$$\psi(x_k)\to c,\quad \psi'(x_k)\to 0,$$

则$\{x_k\}$在SE_T中具有强收敛子列。

证　由$(V2)'$及$\phi(x_k)$的有界性知，存在$A_1>0$使

$$\|\dot{x}_k\|_2\leqslant A_1$$

下面我们要证$|x_k(0)|$也有界，否则，$\{x_k(0)\}$存在一个子列，仍记为$\{x_k(0)\}$使当$k\to\infty$时，$|x_k(0)|\to\infty$。

由 Sobolev 不等式有

$$\|x_k(t)-x_k(0)\|_{L^\infty}\leqslant A_2\|\dot{x}_k\|_2\leqslant A_3$$

故
$$\inf_{0\leqslant t\leqslant T}|x_k(t)|\to+\infty,k\to+\infty,$$

由条件$(V4)'$知，

$$\int_0^T V(x_k(t))\mathrm{d}t\to 0,k\to+\infty,$$

由条件$(V3)'$知，

$$\int_0^T < V'(x_k(t)),x_k-x_k(0)>\mathrm{d}t\to 0,k\to+\infty,$$

注意 $\psi(x_k)=\frac{1}{2}<\psi'(x_k),x_k-x_k(0)>-\int_0^T V(x_k)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^T<V'(x_k),x_k-x_k(0)>\mathrm{d}t$

因为 $\|x_k-x_k(0)\|_{E_T}=\|\dot{x}_k\|_2$ 有界，且 $\psi'(x_k)\to 0$，故上式右端的第1项$\to 0(k\to\infty)$，又由条件$(V3)'$、$(V4)'$及$\|x_k-x_k(0)\|_2$有界知，上式右端第2、3项也趋于$0(k\to\infty)$，故当$k\to\infty$时，$\psi(x_k)\to 0$，这与假设条件$\psi(x_k)\to c>0$矛盾。因而$|x_k(0)|$有界。

综上述$\|x_k\|_{SE_T}$有界。则x_k有子列，仍记为x_k，它在SE_T中弱收敛，在L^∞中强收敛于某$x\in SE_T$。因此$V'(x_k)\cdot(x-x_k)$一致收敛于0，因为$\psi'(x_k)\to 0$且$x-x_k$是SE_T有界，

故
$$\begin{aligned}\|\dot{x}\|_2^2-\lim_{k\to\infty}\|\dot{x}_k\|_2^2&=\lim_{k\to\infty}\int_0^T \dot{x}_k\cdot(\dot{x}-\dot{x}_k)\mathrm{d}t\\&=\lim_{k\to\infty}\left\{\langle\psi'(x_k),x-x_k\rangle+\int_0^T V'(x_k)\cdot(x-x_k)\mathrm{d}t\right\}\\&=0\end{aligned}$$

因此x_k在SE_T中强收敛于x。

引理 8　设V满足条件$(V1)$、$(V2)'$—$(V4)'$，则ψ在SE_T上满足鞍点定理的条件$(S1)$、$(S2)$

证　$(S1)$ 对$\forall a\in R^n$，由$(V4)'$知，

$$\psi(a)=-TV(a)\to 0,|a|\to+\infty,$$

$(S2)$ 下面证明　$\inf\limits_{x\in SL_T}\psi(x)>0$

事实上，由$(V2)'$有$\inf\limits_{x\in SL_T}\psi(x)\geqslant 0$，若$\inf\limits_{x\in SL_T}\psi(x)=0$，则存在序列$x_k\in SL_T$使

$$\psi(x_k)\to 0,\quad k\to+\infty,$$

即
$$\|\dot{x}_k\|_2\to 0,k\to\infty,$$

$$\int_0^T V(x_k)\mathrm{d}t\to 0,\quad k\to\infty,$$

又由 Sobolev 不等式有，

$$\|x_k\|_{L^\infty}\leqslant A_4\|\dot{x}_k\|_2\to 0$$

故由条件$(V4)'$及$\int_0^T V(x_k)\mathrm{d}t\to 0$知，

$$\int_0^T V(0)\mathrm{d}t=0$$

即$V(0)=0$，这与已知假设$(V2)'$矛盾。

下面我们要考虑临界点的 Morse 指标。

设x是(1)的$C^2(S_T;R^n)$一解，令$A(t)=V''(x(t))$，则A是连续，T—周期对称阵，在SE_T上$\psi''(x)$定义双线性型：

$$\Phi_T(y,z)=\int_0^T(\dot{y}\cdot\dot{z}-A(t)y\cdot z)dt,\forall\ y,z\in SE_T$$

用 $\Phi_T(y)=\Phi_T(y,y)$ 表示相应的二次型，ψ 在 SE_T 中的临界点 x 处的 Morse 指标定义为二次型 Φ_T 在 SE_T 中的原点的 Morse 指标。

Φ_T 相应于下面的线性二阶 Hamilton 系统，

$$\ddot{y}+A(t)y=0,\quad \forall\ y\in R^n$$

设 $L_s(R^n)$ 表示域 R 上的 n × n 阶对称阵空间，对给定的 T > 0，假设

(A) $A\in C(S_T;L_s(R^n))$

由引理 4，(1) 的解 x(t) 关于 t = 0 和 t = T/2 偶，所以 $A(t)=V''(x(t))$ 也关于 t = 0 和 t = T/2 偶，所以不妨设

(AS) $A\in C(S_T;L_s(R^n))$ 且 A(t) 关于 T = 0 偶

引理 9[6] 假设(AS)成立，则

1° SE_T 具有 Φ_T 一正交分解：

$$SE_T=SE_T^-\oplus SE_T^0\oplus SE_T^+,$$

其中，Φ_T 分别在 SE_T^+，SE_T^0，SE_T^- 上正定、零、负定。

2° $SE_T^0=\ker\Phi_T$，$\dim SE_T^0<+\infty$，

3° $\dim SE_T^-<+\infty$.

定义 10([6]) 令 $Si_T=\dim SE_T^-$，$Sv_T=\dim SE_T^0$.

Si_T，Sv_T 分别称为 Φ_T 在 SE_T 上的对称 Morse 指标和对称零维数。

下面我们要考虑 R^n 对 Φ_T 的 *Morse* 指标的影响。

设 A(t) 满足条件(A)、(AS).

在 $X=R^n$ 上定义二次型 $g=g_{T,A}$：

$$g(a)=\left(\int_0^T A(t)dt\right)a\cdot a,\quad \forall\ a\in R^n$$

则 X 具有 g 一正交分解：

$$X=X_T^-\oplus X_T^0\oplus X_T^+$$

其中 X_T^-，X_T^0，X_T^+ 分别是 g 的负定、零、正定子空间。

令
$$K_T=X_T^0\cap E_T^0$$

设 Q_T 表示 K_T 在 X_T^0 中的 g 一正交补。则 $X_T^0=K_T\oplus Q_T$，$K_T\subset\operatorname{Ker}\Phi_T=E_T^0$，

$$Q_T\cap\operatorname{Ker}\Phi_T=\{0\}$$

故有下面的 Φ_T 一正交分解：

$$X=X_T^-\oplus K_T\oplus(Q_T\oplus X_T^+)$$

定义 11([6]) 定义三个指标 σ_T^-，σ_T^0，σ_T^+ 如下：

$$\sigma_T^-=\dim X_T^-,$$

$$\sigma_T^0=\dim K_T,$$

$$\sigma_T^+=\dim X_T^++\dim Q_T$$

显然
$$\sigma_T^-+\sigma_T^0+\sigma_T^+=n$$

定义 12([2]) 给定 $T>0$，对(1)的非常值 T 一周期解 x，定义 $O(x)$ 为满足 $\frac{T}{k}$ 是 $x(t)$ 的周期的最大整数。

引理 13[6]　假设 V 满足条件(V1)，则对给定的 $T>0$，若 x 是(1)的非常值且关于 $t=0$ 是偶的 $C_2(S_T;R^n)$ 一解，那么成立

$$O(x)\leqslant Si_T(x)-\sigma_T^-(x)+1$$

我们下面依次来证明定理1°—4°。

1° 由引理 1,4,5,6 知，(1) 存在关于 $t=0$ 是偶的 $C^2(S_T;R^n)$ 一解 x，若 T 充分大，我们断言 $x(t)\not\equiv const$，因为否则设 $x(t)\equiv a$，则 $\psi(x)=-TV(a)$，由条件(V2)知，$V(a)\neq 0$，故当 T 充分大时，$\psi(x)$ 也充分大，更具体地，$\psi(x)\to-\infty$，$(T\to+\infty)$，而由引理 1,4,5,6 知，$\psi(x)>-\infty$，矛盾。因而存在 $T_0>0$ 使当 $T>T_0$ 时，系统(1)存在关于 $t=0$ 是偶的 $C^2(S_T;R^n)$ 一非常值解 x，由引理 2 知，x 的 *Morse* 指标 $Si_T(x)\leqslant n$，故由引理 13 有

$$\begin{aligned}O(x)&\leqslant Si_T(x)-\sigma_T^-(x)+1\\&\leqslant n+1\end{aligned}$$

定理1即得证。

2°　由于 V 严格凸，故 $\sigma_T^0(x)=\sigma_T(x)=0$，$\sigma_T^-(x)=n$，故由定理 1 的证明中的不等式有

$$\begin{aligned}O(x)&\leqslant Si_T(x)-\sigma_T^-(x)+1\\&\leqslant n-n+1=1\end{aligned}$$

即 x 以 T 为极小周期。

3°　由引理 1,4,7,8 知，对任意给定的 $T>0$，(1)存在一个关于 $t=0$ 是偶的 $C^2(S_T;R^n)$ 解 x，由引理 8 及条件(V4)′ 知，x 是非常值的。故由引理 13 及引理 2 知

$$\begin{aligned}O(x)&\leqslant Si_T(x)-\sigma_T^-(x)+1\\&\leqslant n+1\end{aligned}$$

定理3得证。

4°　定理4的证明与定理2类似，故略去。

参 考 文 献

1 Ekeland, I., Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1990, 106～149

2 Ekeland, I., Hofer, H., Periodic solutions with prescribed period for convex autonomous Hamiltonian systems, Invention Math. 1985, 81(1): 155～188

3 Girardi, M., Matzeu, M., *Periodic solutions of convex autonomous Hamiltonian systems with a quadratic growth at the origin and superquadratic at infinity*. Ann. Mat. Pura ed appl, 1987, 147(1): 21～72

4 Girardi, M., Matzeu, M., Dual Morse index estimates for periodic solutions of Hamiltonian systems in some nonconvex superquadratic case. Nonlinear Anal. TMA. 1991, 3(17): 481～497

5 Lazer. A., Solimini, S., Nontrivial solutions of operator equations and Morse indices of critical points of min-max type. Nonlinear Anal. TMA. 1988, 5(12): 761～775

6 Long, Y., The minimal period problem of periodic solutions for autonomous superquadratic second order Hamiltonian systems, Forschungsinstitut Für Mathematik ETH Zürich, 1992, 1～32

7 Mawhin, J., Willem, M., Critical point theory and Hamiltonian systems, Springer, 1989, 1～52

8 Rabinowitz, P., some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations, in Nonlinear Analysis, A Collection of Papers in honor of Erich H. Rothe, edited by L. Cesari, etc. Academic Press, 1978, 161～177

9 Rabinowitz, P., Periodic solutions of Hamiltonian systems, Comm. Pure Appl. Math., 1978, 31(1): 157～184