(22)

120-125

具临界指数半线性椭圆方程正解存在的一个充分条件*

A Sufficient Condition of Existence of Positive Solutions to Semilinear Elliptic Equations with Critical Sobolev Exponents

O175.26

何传江
He Chuanjiang
(重庆大学系统工程及应用数学系)

摘　要　设 Ω 是 R^n 中有界区域，$n\geqslant 3$，给出了半线性椭圆方程边值问题

$$\begin{cases}-\triangle u=Q(x)u|u|^{4/(n-2)}+f(x,u) & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

正解存在的一个充分条件，推广了文献[1-3]的相应结果。

关键词　变分法；半线性椭圆方程 / 临界指数；正解　椭圆型方程

中国图书资料分类法分类号　O 175.29

ABSTRACT　Let Ω be a bounded domain in R^n, $n\geqslant 3$, this paper presents a sufficient condition of the existence of positive solutions of Dirichlet problem for the semilinear elliptic equation $-\triangle u=Q(x)u|u|^{4/(n-2)}+f(x,u)$ in Ω, $u=0$ on $\partial\Omega$. The present result generalizes the related ones in papers[1,2,3].

KEY WORDS　variational method; semilinear elliptic equation / critical sobolev exponent / positive solution

设 Ω 是 R^n 中有界区域，$n\geqslant 3$。本文讨论下面的问题

$$\begin{cases}-\triangle u=Q(x)u|u|^{p-1}+f(x,u) & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{1}$$

在 $H_0^1(\Omega)$ 中正解的存在性。其中 $p=(n+2)/(n-2)$，$Q(x)\geqslant\delta>0$，在 Ω 上连续；低阶扰动项 $f(x,u)$ 满足如下条件：

* 修改稿收到日期：1992-03-27
本文得到重庆大学青年科研基金资助

$$\begin{cases} (\mathrm{I})\quad f(x,u)\ 在\ \bar{\Omega}\times R\ 上连续，并记\ f(x,u)=a(x)u+g(x,u)； \\ (\mathrm{II})\quad \lim\limits_{u\to 0^+} g(x,u)/u=0\ 关于\ x\in\Omega\ 一致； \\ (\mathrm{III})\quad \lim\limits_{u\to+\infty} g(x,u)/u^p=0\ 关于\ x\in\Omega\ 一致； \\ (\mathrm{IV})\quad a(x)\in L^\infty(\Omega)\ 且存在常数\ \alpha>0，使 \\ \qquad \int_\Omega(|\nabla u|^2-au^2)\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x \qquad \forall\ u\in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{2}$$

因为我们只讨论正解，为方便计，当 $x\in\Omega,u\leqslant 0$ 时，定义 $f(x,u)=0$

(1) 对应的变分泛函为

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_\Omega Q|u|^{p+1}\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x \qquad \forall\ u\in H_0^1(\Omega)$$

其中 $F(x,u)=\int_0^u f(x,t)\mathrm{d}t$

引理 1　假设(2)(Ⅰ—Ⅳ)成立，还假设存在 $v_0\in H_0^1(\Omega)$　$v_0\geqslant 0,v_0\not\equiv 0$，满足

$$\sup_{t\geqslant 0} I(tv_0)<\frac{1}{n}(\max_\Omega Q)^{(2-n)/2}S^{n/2} \tag{3}$$

那么问题(1)至少有一正解。其中 S 是嵌入 $H_0^1(\Omega)\to L^{p+1}(\Omega)$ 的最优常数，即

$$S=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Big/\left(\int_\Omega|u|^{p+1}\mathrm{d}x\right)^{2/(p+1)}.$$

证明类似于文献[1]，详见文献[2]。

对 $Q(x)$ 再作如下假设：$Q(x)$ 在 Ω 中某点 x_0 处达到最大值，且

$$|Q(x)-Q(x_0)|=o(|x-x_0|^k) \qquad k=1\ 或\ 2 \tag{4}$$

本文的主要结果是下面的

定理 1　设 $f(x,u)$ 满足(2)，$Q(x)$ 满足(4)；再设存在 $f(u)\geqslant 0$，使 $f(x,u)\geqslant f(u),x\in\Omega,u\geqslant 0$，如果对任意常数 $C>0$，使得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{(n-2)/2}\int_0^{C\varepsilon^{-1/2}}F\left[\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{1+s^2}\right)^{(n-2)/2}\right]s^{n-1}\mathrm{d}s=a>0,n\geqslant 4 \tag{5}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_0^{C\varepsilon^{-1/2}}F\left(\frac{\varepsilon^{-1/4}}{\sqrt{1+s^2}}\right)s^2\mathrm{d}s=+\infty, \quad n=3 \tag{6}$$

此处，$F(u)=\int_0^u f(t)\mathrm{d}t$，$a$ 可以取 $+\infty$，那么，问题(1)至少有一个正解。

为了便于与文献[1]和[2]的相应结果比较，我们讨论一个典型例子：

$$\begin{cases} -\Delta u=Q(x)u^{(n+2)/(n-2)}+\mu u^q & x\in\Omega \\ u>0 & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{7}$$

其中 $\mu>0$ 是常数，$1<q<(n+2)/(n-2)$，$Q(x)$ 适合(4)。

定理 2

(Ⅰ) 当 $k=1$ 时，如果 q 满足：

$$n/(n-2)\leqslant q<(n+2)/(n-2) \qquad 当\ n\geqslant 4$$
$$3<q<5 \qquad 当\ n=3$$

那么，问题(7)对任意 $\mu>0$ 均有一解。

（Ⅰ）当 $k=2$ 时，如果 q 满足：

$$1<q<(n+2)/(n-2)\quad 当\ n\geqslant 4;$$
$$3<q<5\qquad 当\ n=3$$

定理2不难从定理1得到，例如当 k=1时，可以验证：

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{(n-1)/2}\int_0^{C\varepsilon^{-1/2}}\left(\frac{\varepsilon^{1/2}}{1+s^2}\right)^{(n-2)(q+1)/2}s^{n-1}\mathrm{d}s=\begin{cases}+\infty, & 当\ q>\dfrac{n}{n-2}\\ a>0, & 当\ q=n/(n-2)\\ 0 & 当\ q<n/(n-2)\end{cases}\tag{8}$$

注：（Ⅰ）　当 $n\geqslant 4$ 时，条件 $|Q(x)-Q(x_0)|=(|x-x_0|^2)$ 使 q 达到了自然要求 $1<q<(n+2)/(n-2)$.

（Ⅱ）文献[3]用另外的方法得到定理 2 的第一个断言，文献[2]得到定理 2 的第二个断言（该文对 $Q(x)$ 的假设是：$Q(x)$ 在 x_0 处的所有一阶二阶偏导数全为 0）。应该指出，对于 $k=2$，文献[2]的结果比定理 1 要好。

（Ⅲ）文献[1]就 $Q(x)\equiv 1$ 的情形，得到定理 2（Ⅰ）.

定理 1 的证明需要下面的：

引理 2　设 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$，$0\leqslant\phi\leqslant 1$，在 x_0 的某邻域内等于 1，令

$$\phi_\varepsilon(x)=\frac{\phi(x)}{(\varepsilon+|x-x_0|^2)^{(n-2)/2}}\qquad \varepsilon>0$$

则有如下估计式：

$$\|\nabla\phi_\varepsilon\|_2^2=\begin{cases}K_1\varepsilon^{-(n-2)/2}+O(1) & n\geqslant 4\\ K_1\varepsilon^{-1/2}+C_1+O(\varepsilon^{1/2}) & n=3\end{cases}\tag{9}$$

$$\|\phi_\varepsilon\|_2^2=\begin{cases}K_1\varepsilon^{-(n-4)/2}+O(1) & n\geqslant 5\\ K_3|\log\varepsilon|+O(1) & n=4\\ O(\varepsilon^{1/2})+C_2 & n=3\end{cases}\tag{10}$$

$$\|\phi_\varepsilon\|_{p+1,Q}^2=Q(x_0)^{2/(p+1)}K_2\varepsilon^{-(n-2)/2}+o(\varepsilon^{(k+2-n)/2}),\qquad n\geqslant 3\tag{11}$$

其中 k_1,k_2,k_3,c_1,c_2 是与 ε 无关的常数且 $k_1/k_2=S$.

证　（9）－（10）式已在文献[1]中得到。文献[3]就 $k=1$ 情形得到（11）。完全照搬[3]中的估计即可得（11）. 为方便计，这里仍然给出估计过程：

$$\int_\Omega Q(x)\phi_\varepsilon^{p+1}(x)\mathrm{d}x=\int_D(Q(x)-Q(x_0))\frac{\phi^{p+1}(x)\mathrm{d}x}{(\varepsilon+|x-x_0|^2)^n}+\int_D Q(x_0)\frac{\phi^{p+1}(x)\mathrm{d}x}{(\varepsilon+|x-x_0|^2)^n}$$
$$\equiv I_1+I_2$$

经简单计算不难得到（亦可见文献[1]）

$$I_2=\begin{cases}Q(x_0)K_2'\varepsilon^{-n/2}+O(1) & 当\ n\geqslant 4\\ Q(x_0)\varepsilon^{-3/2}(K_2'+O(\varepsilon)) & 当\ n=3\end{cases}$$

其中 $K_2'=K_2^{(p+1)/2}=\|U\|_{p+1}^{p+1}$，$U(x)=C(1+|x-x_0|^2)^{-(n-2)/2}$

下面估计 I_1：

$$|I_1|\leqslant\int_{|x-x_0|<R}\frac{|Q(x)-Q(x_0)|}{(\varepsilon+|x-x_0|^2)^n}\mathrm{d}x$$
$$=\int_{|x-x_0|<R}\frac{o(|x-x_0|^k)}{(\varepsilon+|x-x_0|^2)^n}\mathrm{d}x\qquad（令\ y=\varepsilon^{-1/2}(x-x_0)）$$

$$= \int_{|y|<R\varepsilon^{-1/2}} \frac{o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}|y|)\varepsilon^{\frac{n}{2}}}{\varepsilon^{n}(1+|y|^{2})^{n}}\mathrm{d}y$$

$$= \varepsilon^{(4-n)/2}\int_{|y|<R\varepsilon^{-1/2}} \frac{|y|}{(1+|y|^{2})^{n}} \cdot \frac{o(\varepsilon^{1/2}|y|)}{\varepsilon^{1/2}|y|}\mathrm{d}y$$

注意到积分$\int_{R^n} \frac{|y|}{(1+|y|^{2})^{n}}\mathrm{d}y$对于$n>1$是收敛的，从而根据 Lebesgue 控制收敛定理，$I_1 = o(\varepsilon^{(4-n)/2})$，当$\varepsilon\to 0$时。综合以上估计，我们有

$$\int_{\Omega} Q(x)\varphi_\varepsilon^{p+1}(x)\mathrm{d}x = o(\varepsilon^{(4-n)/2}) + \begin{cases} Q(x_0)K_2'\varepsilon^{(4-n)/2} + O(1) & 当\ n \geqslant 4 \\ Q(x_0)\varepsilon^{1/2}(K_2' + O(\varepsilon)) & 当\ n = 3 \end{cases}$$

由此不难得到(11)。

有了以上准备，下面给出定理1的证明：

令

$$v_\varepsilon(x) = \frac{\varphi_\varepsilon(x)}{\|\varphi_\varepsilon\|_{p+1,Q}}$$

根据引理2不难估计得

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{p+1,Q} = K\varepsilon^{(2-n)/4} + o(\varepsilon^{(4-2-n)/4}) \qquad n \geqslant 3 \tag{12}$$

其中K是只依赖于n的正常数。从而

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 = Q(x_0)^{-2/(p+1)}S + \begin{cases} o(\varepsilon^{1/2}) & n \geqslant 4 \\ O(\varepsilon^{1/2}) & n = 3 \end{cases} \tag{13}$$

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} O(\varepsilon) & n \geqslant 5 \\ O(\varepsilon|\log\varepsilon|) & n = 4 \\ O(\varepsilon^{1/2}) & n = 3 \end{cases} \tag{14}$$

事实上，以(14)为例证明$n \geqslant 5$的情形，其余各式类似估计。根据引理2，我们有

$$\|v_\varepsilon\|_2^2 = \frac{\|\varphi_\varepsilon\|_2^2}{\|\varphi_\varepsilon\|_{p+1,Q}^2} = \frac{K_3\varepsilon^{(4-n)/2} + O(1)}{Q(x_0)^{2/(p+1)}K_2\varepsilon^{(2-n)/2} + o(\varepsilon^{(4-2-n)/2})}$$

从而

$$\varepsilon^{-1}\|v_\varepsilon\|_2^2 = \frac{K_3\varepsilon^{(4-n)/2} + O(1)}{Q(x_0)^{2/(p+1)}K_2\varepsilon^{(4-n)/2} + o(\varepsilon^{(4-4-n)/2})}$$

$$= \frac{K_3 + O(1)\varepsilon^{(n-4)/2}}{Q(x_0)^{2/(p+1)}K_2 + o(\varepsilon^{1/2})}$$

显然，当$n \geqslant 5$时，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\|v_\varepsilon\|_2^2 =$ 常数，从而$\|v_\varepsilon\|_2^2 = O(\varepsilon)$。

下面验证：对充分小的$\varepsilon > 0$，v_ε满足引理1中条件(3)，从而定理1由引理1推出。

事实上，令$X_\varepsilon = \|\nabla v_\varepsilon\|_2^2$，则对任意$t \geqslant 0$，

$$I(tv_\varepsilon) = \frac{1}{2}t^2X_\varepsilon - \frac{1}{p+1}t^{p+1} - \int_{\Omega} F(x, tv_\varepsilon)\mathrm{d}x$$

注意到$I(tv_\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2}t^2X_\varepsilon - \frac{1}{p+1}t^{p+1}$，及$p+1>2$，存在$t_\varepsilon \geqslant 0$，使得

$$I(t_\varepsilon v_\varepsilon) = \sup_{t\geqslant 0} I(tv_\varepsilon)$$

不妨设$t_\varepsilon > 0$（因$t_\varepsilon = 0$时，结论已真），从而当$t = t_\varepsilon$时，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(tv_\varepsilon) = 0$，即

$$t_\varepsilon X_\varepsilon - t_\varepsilon^{p} - \int_{\Omega} f(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon\mathrm{d}x = 0 \tag{15}$$

因此

$$t_\varepsilon \leqslant X_\varepsilon^{1/(p-1)} \tag{15}$$

从而

$$\begin{aligned} I(t_\varepsilon v_\varepsilon) &= \frac{1}{2} t_\varepsilon^2 X_\varepsilon - \frac{1}{p+1} t_\varepsilon^{p+1} - \int_\Omega F(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{2} X_\varepsilon^{2/(p-1)} X_\varepsilon - \frac{1}{p+1} X_\varepsilon^{(p+1)/(p-1)} - \int_\Omega F(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n} X_\varepsilon^{n/2} - \int_\Omega F(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

根据(13)，上式变成

$$\sup_{t\geqslant 0} I(t v_\varepsilon) \leqslant \frac{1}{n} Q(x_0)^{-(n-2)/n} S^{n/2} - \int_\Omega F(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x + \begin{cases} o(\varepsilon^{n/2}), & n \geqslant 4 \\ O(\varepsilon^{1/2}), & n = 3 \end{cases} \tag{16}$$

另一方面，若我们有

$$\int_\Omega F(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x \geqslant \int_{|x-x_0|<\delta} F\left(\frac{A\varepsilon^{(n-2)/4}}{(\varepsilon + |x-x_0|^2)^{(n-2)/2}}\right)\mathrm{d}x \tag{17}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-n/2} \int_{|x-x_0|<\delta} F\left(\frac{A\varepsilon^{(n-2)/4}}{(\varepsilon + |x-x_0|^2)^{(n-2)/2}}\right)\mathrm{d}x = A_0 > 0, \quad n \geqslant 4 \tag{18}$$

以及

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1/2} \int_{|x-x_0|<\delta} F\left(\frac{A\varepsilon^{1/4}}{(\varepsilon + |x-x_0|^2)^{1/2}}\right)\mathrm{d}x = +\infty, \quad n = 3 \tag{19}$$

则根据(16)—(19)，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，

$$\sup_{t\geqslant 0} I(t v_\varepsilon) < \frac{1}{n} Q(x_0)^{-(n-2)/n} S^{n/2}$$

这便是引理1中条件(3)。因此，下面只需验证(17)—(19)。

(17)的验证：根据(15)

$$X_\varepsilon - t_\varepsilon^{p-1} - \int_\Omega t_\varepsilon^{-1} f(x, t_\varepsilon v_\varepsilon) v_\varepsilon \mathrm{d}x = 0 \tag{20}$$

而 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_\Omega t_\varepsilon^{-1} f(x, t_\varepsilon v_\varepsilon) v_\varepsilon \mathrm{d}x = 0$，事实上，从条件(2) 知，对 $\forall \delta > 0$，存在常数 C，使得

$$|f(x,u)| \leqslant \delta u^p + Cu, \quad x \in \Omega, \quad u \geqslant 0$$

因此，根据 Sobolev 嵌入定理及(15)′

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega t_\varepsilon^{-1} f(x, t_\varepsilon v_\varepsilon) v_\varepsilon \mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant \delta t_\varepsilon^{p-1} \int_\Omega v_\varepsilon^{p+1}\mathrm{d}x + C \int_\Omega v_\varepsilon^2 \mathrm{d}x \\ &\leqslant \delta S^{-(p+1)/2} \|\nabla v_\varepsilon\|_2^{p+1} t_\varepsilon^{p-1} + C\int_\Omega v_\varepsilon^2 \mathrm{d}x \\ &\leqslant \delta S^{-(p+1)/2} X_\varepsilon^{(p-1)/2} X_\varepsilon + C\|v_\varepsilon\|_2^2 \end{aligned}$$

又根据(13)、(14)，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} X_\varepsilon = Q(x_0)^{-2/(p-1)} S$，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \|v_\varepsilon\|_2^2 = 0$，注意到 $\delta > 0$ 的任意性，得到前面的断言。从而由(20) 知：

$$t_\varepsilon \to Q(x_0)^{-2/(p^2-1)} S^{1/(p-1)}，当\ \varepsilon \to 0 \tag{12}$$

因此，由(12) 及 ψ_ε 之定义，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，

$$t_\varepsilon v_\varepsilon(x) = t_\varepsilon \frac{\varphi_\varepsilon(x)}{\|\varphi_\varepsilon\|_{p+1,\Omega}} = t_\varepsilon \frac{1}{K\varepsilon^{(2-n)/4} + o(\varepsilon^{(n-2-n)/4})} \cdot \frac{\psi(x)}{(\varepsilon + |x - x_0|^2)^{(n-2)/2}}$$

$$\geqslant A \frac{\varepsilon^{(n-2)/4}}{(\varepsilon + |x - x_0|^2)^{(n-2)/2}} \psi(x), \quad A > 0 \text{ 是常数}$$

从而，注意到 $F(u)$ 的非负性非减性，我们有

$$\int_\Omega F(x, t_\varepsilon v_\varepsilon) \mathrm{d}x \geqslant \int_\Omega F(v_\varepsilon t_\varepsilon) \mathrm{d}x \geqslant \int_{|x-x_0|<\delta} F(t_\varepsilon v_\varepsilon) \mathrm{d}x \qquad (\delta > 0 \text{ 充分小})$$

$$\geqslant \int_{|x-x_0|<\delta} F\left(\frac{A\varepsilon^{(n-2)/4}}{(\varepsilon + |x - x_0|^2)^{(n-2)/2}} \right) \mathrm{d}x$$

(18)的验证：

$$\varepsilon^{-n/2} \int_{|x-x_0|<\delta} F\left(\frac{A\varepsilon^{(n-2)/4}}{(\varepsilon + |x - x_0|^2)^{(n-2)/2}} \right) \mathrm{d}x$$

$$\overset{|x-x_0|=r}{=} \omega_n \varepsilon^{-n/2} \int_0^\delta F\left(\frac{A\varepsilon^{(n-2)/4}}{(\varepsilon + r^2)^{(n-2)/2}} \right) r^{n-1} \mathrm{d}r \qquad (\omega_n \text{ 为 } S^{n-1} \text{ 的表面积})$$

$$\overset{r=\varepsilon^{1/2}t}{=} \omega_n \varepsilon^{(n-4)/2} \int_0^{\delta\varepsilon^{-1/2}} F\left[\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{1 + t^2} \right)^{(n-2)/2} A \right] t^{n-1} \mathrm{d}t$$

$$\overset{t=A^{1/(n-2)}t}{=} C\varepsilon^{(n-4)/2} \int_0^{\delta'\varepsilon^{-1/2}} F\left[\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{1 + t^2} \right)^{(n-2)/2} \right] t^{n-1} \mathrm{d}t$$

其中 C、δ' 是相应的正常数，由(5)即知(18)。

(19)的验证：因为(19)与文献[1]中(2.57)取 $n = 3$ 时完全一样，文献[1]中对此已有验证，这里省略。

参 考 文 献

1 Brezis. H, Nirenberg. L, Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents, Comm Pure Appl Math, 1983, (36): 437～477

2 Esobar J F, Positive Solutions for Some Semilinear Elliptic Equations with Critical Sobolev Exponents, Comm Pure Appl Math, 1987, (XL): 623～657

3 何传江. 一个带临界指数半线性椭圆方程的正解. 重庆大学学报, 1991, 14(3): 96～100