

23

126-132

一种新的样条边界元法

A New Spline Boundary Element Method

云正清 谭邦定 俞集辉 黄键
Yun Zhengqing Tan Bangding Yu Jihui Huang Jian
(重庆大学电气工程系)

TM 151.1

摘 要 提出一种新的样条边界元法,它既不存在角点问题和奇异积分,也不涉及样条函数的端点条件。给出三个数值例子以证实方法的正确性和可行性。

关键词 样条函数; 边界元法; 二维问题; 样条边界元法
中国图书资料分类法分类号 TM151.1; TM153.1

ABSTRACT This paper introduces a New Spline Boundary Element Method, which neither has corner problems and singular integrals nor involves extreme-conditions of spline function. Three numerical examples are given to show the validity of the method.

KEY WORDS spline function; boundary element method; two-dimensional problem

0 引 言

样条边界元法(SBEM)是以样条作为插值函数的一种边界元法,它能进一步减少边界元法的计算量,提高其计算精度^[1]。但现行的样条边界元法也存在一些问题,例如角点问题和样条函数端点条件难以确定的问题等。

本文提出一种新的样条边界元法(NSBEM),它不存在角点问题、奇异积分,也不涉及样条函数的端点条件,可进一步简化样条边界元法的计算格式,提高其计算精度。

1 角点问题与端点条件

从加权余量法的观点看,边界元方程组是通过取一系列权函数而得到的。在SBEM中,将权函数取为Laplace方程的基本解,这是导致角点问题的根本原因。边界元法以边界节点处的未知物理量作为求解对象,当权函数取基本解时,权函数序列完全由边界节点所决定,即一个边界节点对应于一个权函数,从而使边界元方程组的阶数与边界节点总数相等。当每个节点仅有一个未知量时,边界元方程组的阶数与未知量数相等,方程组可解。但在角点作为节点且该处未知量不止一个的情况下,由于未知量总数大于边界元方程组的阶数,使得方程组无唯一解。这就是所谓的角点问题。只有对角点作某种处理以获得所需数量的附加方程

• 收文日期 1992-01-06
高等学校博士学科点专项科研基金资助课题

之后,才能使原边值问题可解。

应当指出,并不是所有作为节点的角点都会产生角点问题。

样条函数的端点条件,是在插值意义下保证样条函数唯一性所不可缺少的。就常用的三次 B 样条函数而言,若节点数为 $M+1$,样条函数的自由度将为 $M+3$ 。因此,除了要给定 $M+1$ 个节点处的型值,还必须给出两个端节点(即端点)处的所谓端点条件,方能获得唯一确定样条函数所需的 $M+3$ 个线性独立方程。

在 SBEM 中,角点均作为样条函数的端点,这就涉及到角点的处理和样条函数端点条件的确定两个方面的问题。

现行的 SBEM,处理角点问题有近似法(如节点分裂法)和精确法两类方法^[3]。但后者并不能处理所有角点问题,例如,角点两侧均为第一类边界条件且在角点处边界位值不连续的情形。至于样条函数端点条件的确定,则取决于作为端点的角点两侧的边界条件。仅当角点两侧边界上均给定第二类边界条件且在角点处边值为有限值时,才能求出精确的端点条件。对于其它情形则近似取自然端点条件,即令样条函数在端点处沿边界曲线的二阶切向导数为零。角点问题的处理和样条函数端点条件的确定将使 SBEM 的计算步骤复杂化,且在只能用近似法处理角点和确定端点条件时,也要增大数值解的误差。

2 新样条边界元法

2.1 边界积分方程

考虑二维 Laplace 方程的边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & \in \Omega \\ u = \bar{a} & \in \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = q = \bar{q} & \in \Gamma_2 \end{cases} \quad (1)$$

式中, Ω 为场域; $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ 为 Ω 的边界,如图 1 所示。

根据加权余量法的基本公式

$$\int_{\Omega} u \nabla^2 w_i d\Omega + \oint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial w_i}{\partial n} - q w_i \right) d\Gamma = 0 \quad (2)$$

将权函数 w_i 取为 Laplace 方程分离变量解的线性无关项,即 w_i 满足

$$\nabla^2 w_i = 0 \quad (3)$$

于是式(2)简化为

$$\oint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial w_i}{\partial n} - q w_i \right) d\Gamma = 0 \quad (4)$$

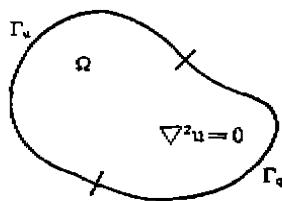


图1 场域

这就是边值问题(1)的边界积分方程。由于此时的权函数 w_i 与边界节点无关,从而不会出现角点问题。再则权函数序列 $\{w_i, i=1, 2, \dots\}$ 为无穷序列,无论样条函数的自由度为多少,总可以选取同样多个权函数,从而保证边界元方程组的阶数与未知量个数相等。

2.2 三次样条函数

在闭区间 $[-2, 2]$ 上定义三次函数 $B(x)$,即

$$B(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} (x+2)^3 & x \in [-2, -1] \\ (x+2)^3 - 4(x+1)^3 & x \in [-1, 0] \\ (2-x)^3 - 4(1-x)^3 & x \in [0, 1] \\ (2-x)^3 & x \in [1, 2] \\ 0 & x \in [-2, 2] \end{cases}$$

以此为基础,可以构造闭区间 $[a, b]$ 上的三次 B 样条序列.将 $[a, b]$ 作均匀分划 Δ :

$$\Delta: x_i = a + iH, H = (b-a)/M, i = 0, 1, \dots, M$$

其中, M 为分划数; H 为步长; x_i 表示第 i 个节点的坐标. $[a, b]$ 上关于均匀分划 Δ 的三次 B 样条函数序列为

$$B(x) = \left\{ B\left(\frac{x-a}{H} - m\right), m = -1, 0, 1, \dots, M, M+1 \right\}$$

记 $B_m(x) = B\left(\frac{x-a}{H} - m\right), m = -1, 0, 1, \dots, M+1$

图2示出了 $B(x)$ 的结构形状,从中可以看出 $B_m(x)$ 的正支集性,即 $B_m(x)$ 仅在子区间 $[x_{m-1}, x_{m+1}] \subset [a, b]$ 上有定义且其值是非负的。 $B_m(x)$ 还具有直至二阶连续的导数,有较好的光滑性。

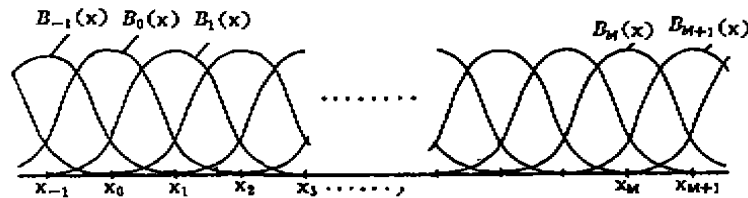


图2 $B(x)$ 的形状

$B(x)$ 是 $[a, b]$ 上关于分划 Δ 的三次样条函数空间的一组基,因此,关于分划 Δ 的任何三次样条函数 $s(x)$ 均可表为

$$s(x) = \sum_{m=-1}^{M+1} \alpha_{m-1} B_m(x) \quad (5)$$

式中, α_{m-1} 表示线性组合系数。

2.3 新样条边界元方程组

利用一、二类边界上的已知函数 \bar{u}, \bar{q} ,可将边界积分方程(4)改写成

$$\int_{\Gamma_1} w, \bar{q} d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} w, \bar{q} d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma_1 \quad (6)$$

式中,待求量 q, u 已移至等式的左端。

先按所给边界条件的不同将 Γ 分成 $\Gamma_1 = \Gamma_c$ 和 $\Gamma_2 = \Gamma_f$ 两段;如果 Γ_1, Γ_2 上有角点的话,还需以角点为端点将 Γ_1, Γ_2 各自分成若干段。为方便起见(并不失一般性),这里设 Γ_1, Γ_2 是光滑的。

由于三次样条函数定义在直线闭区间上,因此只有将曲线边界 Γ_1, Γ_2 分别变换成直线段后才能在其上构造样条函数。本文采用参数化方法来实现曲线到直线的变换。

设 $\Gamma_k (k = 1, 2, \text{下同})$ 的参数方程为

$$x_k = x_k(t_k), y_k = y_k(t_k), t_k \in [a_k, b_k]$$

并且由于

$$dx_k = x'_k(t_k)dt_k, dy_k = y'_k(t_k)dt_k$$

有

$$d\Gamma_k = \sqrt{(dx_k)^2 + (dy_k)^2} = \sqrt{[x'_k(t_k)]^2 + [y'_k(t_k)]^2} dt_k = S_k dt_k$$

式中, $S_k = \sqrt{[x'_k(t_k)]^2 + [y'_k(t_k)]^2}$. 这样, 式(6)被变换成

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{b_1} w_1(t_1)q(t_1)S_1 dt_1 - \int_{a_2}^{b_2} u(t_2) \frac{\partial w_1(t_2)}{\partial n} S_2 dt_2 \\ & = \int_{a_2}^{b_2} w_2(t_2)\bar{q}(t_2)S_2 dt_2 - \int_{a_1}^{b_1} \bar{u}(t_1) \frac{\partial w_2(t_1)}{\partial n} S_1 dt_1 \end{aligned} \tag{7}$$

设 $[a_k, b_k]$ 的均匀分划数为 M_k , 其上的三次样条函数写成

$$s_k(t_k) = \sum_{n=1}^{M_k-1} \alpha_{n-2}^k B_n^k(t_k)$$

用 s_k 分别代替式(7)中的待求量, 即令

$$\begin{cases} q(t_1) = s_1(t_1) = \sum_{n=1}^{M_1-1} \alpha_{n-2}^1 B_n^1(t_1) \\ u(t_2) = s_2(t_2) = \sum_{n=1}^{M_2-1} \alpha_{n-2}^2 B_n^2(t_2) \end{cases} \tag{8}$$

把式(8)代入式(7), 经整理可得

$$[S_1^* \quad S_2^*] \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = R' \tag{9}$$

式中

$$S_1^* = \int_{a_1}^{b_1} w_1(t_1) [B^1_{-1}(t_1), \dots, B^1_{M_1-1}(t_1)] S_1 dt_1$$

$$S_2^* = \int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial w_1}{\partial n}(t_2) [B^2_{-1}(t_2), \dots, B^2_{M_2-1}(t_2)] S_2 dt_2$$

$$A_1 = [\alpha_1^1, \dots, \alpha_{M_1-3}^1]^T$$

$$A_2 = [\alpha_1^2, \dots, \alpha_{M_2-3}^2]^T$$

$$R' = \int_{a_2}^{b_2} w_2(t_2)\bar{q}(t_2)S_2 dt_2 - \int_{a_1}^{b_1} \bar{u}(t_1) \frac{\partial w_2}{\partial n}(t_1)S_1 dt_1$$

在式(9)中, A_1 和 A_2 是待求的, 它们分别有 $M_1 + 3$ 和 $M_2 + 3$ 个元素. 因此总的未知量数为 $N = M_1 + M_2 + 6$.

令 $i = 1, 2, \dots, N$, 即取权函数序列中的前 N 项, 由式(9)可以得到 $NSBEM$ 的 N 阶方程组

$$\begin{bmatrix} S_1^1 & S_2^1 \\ S_1^2 & S_2^2 \\ \vdots & \vdots \\ S_1^N & S_2^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^1 \\ R^N \end{bmatrix} \tag{10}$$

求解式(10)即得 A_1 和 A_2 中的各个线性组合系数。再将它们代入式(8)便得到边界 Γ_1, Γ_2 上的待求量 q 和 u 。域内物理量的求取与 SBEM 相同,故不赘述。

3 关于解的唯一性

插值意义下样条函数的唯一性证明,见文献^[3]。

本文在逼近论^[4]意义下运用样条函数,故有必要考察式(10)的解的唯一性。为此,需要证明式(10)的系数矩阵是非奇异的。采用反证法证明。设系数矩阵是奇异的,则其诸行向量为线性相关,即存在 N 个不全为零的常数 $c_i (i = 1, \dots, N)$,使

$$\sum_{i=1}^N c_i [S_i^1 \quad S_i^2] = 0$$

其分量形式为

$$\int_{a_1}^{b_1} (c_1 w_1 + \dots + c_N w_N) S_1 B_m^1 dt_1 = 0, m = -1, \dots, M_1 + 1 \tag{11}$$

和
$$\int_{a_2}^{b_2} \left\{ c_1 \frac{\partial w_1}{\partial n} + \dots + c_N \frac{\partial w_N}{\partial n} \right\} S_2 B_m^2 dt_2 = 0, m = -1, \dots, M_2 + 1$$

因 $S_1 > 0, B_m^1 \geq 0$,由积分中值定理得知,对于式(11),总存在 $\xi \in (a_1, b_1)$,使得

$$[c_1 w_1(\xi) + \dots + c_N w_N(\xi)] \int_{a_1}^{b_1} S_1 B_m^1 dt_1 = 0, m = -1, \dots, M_1 + 1 \tag{12}$$

注意到积分 $\int_{a_1}^{b_1} S_1 B_m^1 dt_1 (m = -1, \dots, M_1 + 1)$ 不恒为零,必有

$$c_1 w_1(\xi) + \dots + c_N w_N(\xi) = 0 \tag{13}$$

但依假设“ w_i 是 Laplace 方程分离变量解的线性无关项”,对任何 $\xi \in (a, b)$,式(13)不可能成立。唯一性由此得证。

4 算例与结论

4.1 算例

4.1.1 求解边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & \in \Omega \\ u = 0 & \in \Gamma_1, \Gamma_2 \\ u = \sin \pi x & \in \Gamma_3 \\ u = e^{-y} \sin \pi x & \in \Gamma_4 \end{cases}$$

式中, Ω 为单位正方形,如图 3 所示。本例位函数解析解为 $u = \sin \pi x \cdot e^{-y}$ 。

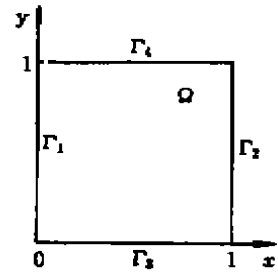


图 3 方形场域

表 1 列出了相同分划下用 SBEM 和 NSBEM 进行计算的结果。在用 SBEM 时,角点用精确法处理,端点条件取为自然端点条件。由表 1 可知,NSBEM 有较高的精度,CPU 时间亦较小。

表1 计算结果及CPU时间

节点坐标	x	0	0	0	0.05	0.25	0.50	0.25	0.25	0.50	0.50
	y	0.50	0.25	0.05	0	0	0	0.25	0.50	0.25	0.50
解析解		边界节点位的法向导数值						内点的位值			
		-0.653	-1.432	-2.685	0.491	2.221	3.142	0.322	0.147	0.456	0.208
SBEM	数值解	-0.659	-1.556	-2.856	0.523	2.239	3.168	0.323	0.147	0.4569	0.2084
	误差(%)	0.854	0.865	6.372	6.441	0.829	0.825	0.212	0.203	0.208	0.210
NSBEM	数值解	-0.658	-1.444	-2.845	0.520	2.239	3.167	0.323	0.147	0.4568	0.2083
	误差(%)	0.844	0.839	5.967	5.874	0.801	0.783	0.192	0.180	0.187	0.190
CPU时间(s)	SBEM							2.80			
	NSBEM							1.61			

4.1.2 求解边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & \in \Omega \\ u = 0 & \in \Gamma_1, \Gamma_2 \\ u = 1 & \in \Gamma_3 \\ u = \frac{2}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sin \pi x}{\operatorname{sh} \pi y} \right) & \in \Gamma_4 \end{cases}$$

这里的 Ω 及边界均与前例相同。解析解为 $u = \frac{2}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sin \pi x}{\operatorname{sh} \pi y} \right)$ 。在用SBEM计算时，以切去角点法处理角点并取自然端点条件。在相同分划下的计算结果见表2。

表2 计算结果及CPU时间

节点坐标	x	0	0	0	0.05	0.25	0.50	0.25	0.25	0.50	0.50
	y	0.50	0.25	0.05	0	0	0	0.25	0.50	0.25	0.50
解析解		边界节点位的法向导数值						内点的位值			
		-0.869	-2.302	-12.68	12.79	2.828	2.000	0.439	0.189	0.545	0.261
SBEM	数值解	-0.899	-2.391	-14.76	14.75	2.930	2.067	0.443	0.191	0.549	0.263
	误差(%)	3.411	3.854	16.387	15.310	3.001	3.342	0.931	0.821	0.779	0.833
NSBEM	数值解	-0.880	-2.334	-13.519	13.659	2.867	2.026	0.442	0.190	0.548	0.262
	误差(%)	1.322	1.410	6.617	6.801	1.390	1.285	0.813	0.644	0.635	0.401
CPU时间(s)	SBEM							3.01			
	NSBEM							1.65			

由表2可知，SBEM的误差在角点(即图3中的坐标原点)附近很大，这是由于不能用精确法处理该角点所致。与SBEM相比，NSBEM的各点计算结果都要好得多。

4.1.3 求解混合边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & \in \Omega \\ q = 15xy / \sqrt{4x^2 + y^2} & \in \Gamma_1 \\ u = 0 & \in \Gamma_2, \Gamma_3 \end{cases}$$

式中， Ω 为图4所示的1/4椭圆与两坐标轴围成的区域。椭圆方程为

$$x^2 + 4y^2 = 100$$

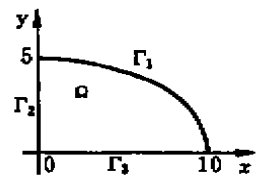


图4 椭圆形场域

分别用 SBEM 和 NSBEM 求解,结果列于表3(解析解见文献[5])。

表 3 计算结果及 CPU 时间

节点坐标	x	3.304	6.174	8.814	2.000	4.000
	y	4.719	3.933	2.361	2.000	3.500
解析解	边界节点位的法向导数			内点的位值		
		-9.356	-14.570	-12.489	-2.400	-8.400
SBEM	数值解	-9.469	-14.729	-12.637	-2.420	-8.476
	误差(%)	1.211	1.109	1.187	0.853	0.904
NSBEM	数值解	-9.413	-14.702	-12.605	-2.415	-8.458
	误差(%)	0.934	0.903	0.927	0.642	0.688
CPU 时间(s)	SBEM			4.81		
	NSBEM			2.47		

5 结 论

本文提出的新样条边界元法,既不存在角点问题和奇异积分,也无需处理样条函数的端点条件,使得前处理工作更简单。算例表明,NSBEM 有计算量小和精度高的优点。NSBEM 可以推广到三维场的计算,其有关内容将另文发表。

参 考 文 献

- 1 甘建学,江泽佳,俞集辉. 电磁场计算中的样条边界元法. 重庆大学学报, 1991, 14(3): 1~3
- 2 徐中汉. 位势问题的角点公式. 河海大学学报, 1991, 19(1): 101~104
- 3 潘承洞. Spline 函数的理论及应用(一). 数学的认识与实践, 1975, (3): 64~74
- 4 考涅楚克 H II 著, 孙永生译. 逼近论的极值问题. 上海科技出版社, 1982, 1~6
- 5 Brebbia C A, et al. Boundary elements An Introductory Course. Boston: Computational Mechanics Publications and McGraw-Hill Book Company, 1989. 102~106